第 38 卷第 11 期 西 南 大 学 学 报 (自然科学版) 2016年11月
Vol. 38 No. 11 Journal of Southwest University (Natural Science Edition) Nov. 2016

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2016.11.012

含 Hénon 临界指数的非线性椭圆边值问题的正解①

王奇峰， 邓志颖

重庆邮电大学 理学院，重庆 400065

摘要：讨论了一类含 Hénon 临界指数的非线性椭圆型边值问题，通过应用 Ekeland 变分原理和强极大值原理得到方程的一个正解，再结合适当条件下的山路定理得到方程的多重正解.

关 键 词：正解；山路引理；Hénon 临界指数；Ekeland 变分原理

中图分类号：O175.25 **文献标志码**：A **文章编号**：1673-9868(2016)11-0079-07

本文研究了下述含 Hénon 临界指数的非线性椭圆型边值问题：

$$\begin{cases} -\Delta u = |x|^{\alpha} |u|^{2^*(\alpha)-2} u + \lambda f(x, u) & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

其中：Ω 是 $\mathbb{R}^N$ $(N \geqslant 3)$ 中的开球，其球心在原点，$\alpha > 0$，$\lambda > 0$，$2^*(\alpha) \triangleq \dfrac{2N+2\alpha}{N-2}$ 为 Hénon 临界指数[1]，$2^* = 2^*(0)$ 是 Sobolev 临界指数，$f(x, u)$ 是满足适当条件的 Caratheodory 函数.

形如(1) 式这类 Hénon 型方程，起源于 Hénon[2] 在研究旋转恒星结构时所得到的椭圆方程

$$-\Delta u = |x|^{\alpha} u^{p-1},\ u > 0,\ x \in B_1;\ u = 0,\ x \in \partial B_1 \tag{2}$$

近年来 Hénon 方程的研究备受关注，当区域为 $\mathbb{R}^N$ 中的球形区域时，文献[3] 证明了在径向对称的函数空间中，嵌入指数 p 能比 Sobolev 临界指数大，并指出当 $p \in (2, 2^*(\alpha))$ 时，问题(2) 至少有一个径向对称的正解. 当区域是有界光滑区域且关于原点是星型时，文献[4] 通过检验 Pohozaev 等式说明问题(2) 在指数 $p \geqslant 2^*(\alpha)$ 时没有正解. 另一方面，也有学者关注问题(2) 非径向对称解的存在性，如文献[5] 通过比较基态解和径向对称解的能量，说明了当 $p \in (2, 2^*)$ 且 α 足够大时问题(2) 至少有一非径向对称的基态解.

然而，含有 Hénon 临界指数的方程类型结果很少. 由于 Hénon 临界指数的存在，嵌入 $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*(\alpha)}(\Omega, |x|^{\alpha} \mathrm{d}x)$ 失去紧性，其中 $L^{2^*(\alpha)}(\Omega, |x|^{\alpha} \mathrm{d}x)$ 是加权函数空间，但存在连续嵌入. 文献[6] 通过有效的变量变换，获得全域 $\mathbb{R}^N$ 上与问题(2) 径向解相关极值函数的达到函数，并对其径向解的唯一性给出了证明，证明径向解的唯一性还可参见文献[4]. 形如(1) 式这类既含 Hénon 临界指数同时具扰动项的问题还尚未有人研究，我们得到的主要结果是：

定理 1 假设 $N \geqslant 3$，若 f 满足以下条件

(f_1) $f(x, t) \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$；

(f_2) $f(x, t) = o(t^{2^*(\alpha)-1})$，当 $t \to +\infty$ 时对 $x \in \overline{\Omega}$ 一致成立；

---

① 收稿日期：2015-05-27
基金项目：国家自然科学基金面上项目(11471235)；重庆市教委科研基金项目(KJ130503).
作者简介：王奇峰(1991-)，男，湖北黄石人，硕士研究生，主要从事非线性椭圆边值问题研究.
通信作者：邓志颖，副教授，硕士研究生导师.

(f_3) $f(x,0)=0$，$\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{f(x,t)}{t}=+\infty$，对 $x\in\overline{\Omega}$ 一致成立.

则对给定的 $\alpha>0$，存在 $\lambda_*>0$，使得当 $0<\lambda<\lambda_*$ 时，问题(1) 至少有一个正解.

定理 2　假设 $N\geqslant 3$，若 f 满足$(f_1)-(f_3)$，还满足下列条件

(f_4) $f(x,t)$ 关于第二个变量单调递增.

则对给定的 $\alpha>0$，存在$\widehat{\lambda}>0$，使得当 $0<\lambda<\widehat{\lambda}$ 时，问题(1) 至少有两个不同的正解.

1　预备知识

在下述讨论中，用 $H_0^1(\Omega)$ 表示通常的 Sobolev 函数空间，赋以范数

$$\| u \|=\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

$H^{-1}(\Omega)$ 表示 $H_0^1(\Omega)$ 的对偶空间，在 $L^p(\Omega)(p>1)$ 中定义范数

$$|u|_p=\left(\int_\Omega |u|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$

由文献[6] 知，对给定的 $\alpha>0$，可定义嵌入 $H_0^1(\Omega)\underset{\rightarrow}{\subset} L^{2^*(\alpha)}(\Omega,|x|^\alpha\mathrm{d}x)$ 的最佳常数

$$S_\alpha\triangleq\inf_{0\neq u\in D^{1,2}(\Omega)}\frac{\displaystyle\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x}{\left(\displaystyle\int_\Omega |x|^\alpha|u|^{\frac{2N+2\alpha}{N-2}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{N-2}{N+\alpha}}}$$

并当 $\Omega=\mathbb{R}^N$ 时，S_α 由函数

$$U_\varepsilon(x)=\frac{\varepsilon^{\frac{N-2}{2(2+\alpha)}}}{(\varepsilon+|x|^{2+\alpha})^{\frac{N-2}{2+\alpha}}}$$

$$U(x)=\frac{1}{(1+|x|^{2+\alpha})^{\frac{N-2}{2+\alpha}}}$$

达到. 由于 $0\in\Omega$，故可取 $\delta>0$，使得 $B_{2\delta}(0)\subset\Omega$，同时可定义 $\eta(x)\in C_0^\infty(\Omega)$，使得当 $x\in B_\delta(0)$ 时，$\eta(x)=1$；当 $x\in\Omega\backslash B_{2\delta}(0)$ 时，$\eta(x)=0$，且满足 $|\nabla\eta(x)|\leqslant C$. 令

$$u_\varepsilon=\eta(x)U_\varepsilon(x)$$

$$v_\varepsilon(x)=\frac{u_\varepsilon(x)}{\left(\displaystyle\int_\Omega|x|^\alpha|u_\varepsilon|^{2^*(\alpha)}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2^*(\alpha)}}}\tag{3}$$

从而

$$\left(\int_\Omega|x|^\alpha|v_\varepsilon|^{2^*(\alpha)}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2^*(\alpha)}}=1$$

应用文献[7] 的方法，可得估计式

$$\int_\Omega|x|^\alpha|u_\varepsilon|^{2^*(\alpha)}\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^N}|x|^\alpha|U|^{2^*(\alpha)}\mathrm{d}x+O(\varepsilon^{\frac{N+\alpha}{2+\alpha}})$$

$$\int_\Omega|\nabla u_\varepsilon|^2\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla U|^2\mathrm{d}x+O(\varepsilon^{\frac{N-2}{2+\alpha}})\tag{4}$$

若无特别说明，$C,C_1,C_2,\cdots$ 均表示正常数. 用“$\rightarrow$” 和“$\rightharpoonup$” 分别表示相应Banach空间中的强收敛和弱收敛. 用 $|\Omega|$ 表示 Ω 的 Lebesgue 测度. 用 $B_r(x)$ 表示以 x 为球心，r 为半径的球型区域. $o(1)$ 表示当 $n\to\infty$ 时的无穷小量，$O(1)$ 表示当 $n\to\infty$ 时的有界量.

2　主要结果的证明

由于本文的目的是寻求问题(1) 的正解，从而假定当 $x\in\Omega$，$t\leqslant 0$ 时 $f(x,t)=0$. 问题(1) 所对应的

能量泛函定义为

$$J_{\lambda}(u)=\frac{1}{2}\int_{\Omega}|\nabla u|^{2}\mathrm{d}x-\frac{1}{2^{*}(\alpha)}\int_{\Omega}|x|^{\alpha}(u^{+})^{2^{*}(\alpha)}\mathrm{d}x-\lambda\int_{\Omega}F(x,u^{+})\mathrm{d}x \tag{5}$$

其中

$$u^{+}=\max\{0,u\}\qquad F(x,u^{+})=\int_{0}^{u}f(x,t)\mathrm{d}t$$

容易验证 $J_{\lambda}(u)\in C^{1}(H_{0}^{1}(\Omega),)$，从而问题(1) 的弱解与 $J_{\lambda}(u)$ 的临界点一一对应. 具体地说，称 $u\in H_{0}^{1}(\Omega)$ 是方程的弱解，当且仅当

$$\langle J'_{\lambda}(u),\varphi\rangle=\int_{\Omega}\nabla u\cdot\nabla\varphi\mathrm{d}x-\int_{\Omega}|x|^{\alpha}(u^{+})^{2^{*}(\alpha)-1}\varphi\mathrm{d}x-$$
$$\lambda\int_{\Omega}f(x,u^{+})\varphi\mathrm{d}x=0,\ \forall\varphi\in H_{0}^{1}(\Omega) \tag{6}$$

引理 3　对给定的 $\alpha>0$，若 f 满足条件$(\mathrm{f}_1)-(\mathrm{f}_3)$，则存在 $\lambda'>0$，使得当 $0<\lambda<\lambda'$ 时，$J_{\lambda}(u)$ 满足$(\mathrm{PS})_c$ 紧性条件，其中

$$c<\frac{2+\alpha}{2(N+\alpha)}S_{\alpha}^{\frac{N+\alpha}{2+\alpha}} \tag{7}$$

证　假设$\{u_n\}\subset H_{0}^{1}(\Omega)$ 是 $J_{\lambda}(u)$ 中的$(\mathrm{PS})_c$ 序列，从而存在 $c\in\mathbb{R}$，使得当 $n\to\infty$ 时

$$J_{\lambda}(u_n)\to c\qquad J'_{\lambda}(u_n)\to 0 \tag{8}$$

由$(\mathrm{f}_1)-(\mathrm{f}_3)$ 及 Ω 的有界性知，对任意的 ε，$\varepsilon'>0$，存在 $T_0=T_0(\varepsilon)>0$，使得当 $x\in\overline{\Omega}\backslash\{0\}$，$t\leqslant T_0$ 时，

$$|f(x,t)t|\leqslant C_1(\varepsilon)\qquad |F(x,t)|\leqslant C_2(\varepsilon)$$

当 $x\in\overline{\Omega}\backslash\{0\}$，$t>T_0$ 时，

$$|f(x,t)t|\leqslant\varepsilon'|x|^{\alpha}t^{2^{*}(\alpha)}\qquad |F(x,t)|\leqslant\frac{\varepsilon'}{2^{*}(\alpha)}|x|^{\alpha}t^{2^{*}(\alpha)}$$

其中 $C_1(\varepsilon)$，$C_2(\varepsilon)>0$. 因而当$(x,t)\in\overline{\Omega}\backslash\{0\}\times\mathbb{R}$ 时

$$|f(x,t)t|\leqslant C_1(\varepsilon)+\varepsilon'|x|^{\alpha}t^{2^{*}(\alpha)}\qquad |F(x,t)|\leqslant C_2(\varepsilon)+\frac{\varepsilon'}{2^{*}(\alpha)}|x|^{\alpha}t^{2^{*}(\alpha)}$$

因此，令

$$C(\varepsilon)=\frac{1}{\theta}C_1(\varepsilon)+C_2(\varepsilon),\ \theta\in(2,2^{*}(\alpha))\qquad \varepsilon=\frac{\varepsilon'}{2^{*}(\alpha)}+\frac{\varepsilon'}{\theta}$$

从而

$$F(x,t)-\frac{1}{2}f(x,t)t\leqslant F(x,t)-\frac{1}{\theta}f(x,t)t\leqslant C(\varepsilon)+\varepsilon|x|^{\alpha}t^{2^{*}(\alpha)},\ (x,t)\in\overline{\Omega}\backslash\{0\}\times\mathbb{R} \tag{9}$$

定义 $h(x,t)\triangleq|x|^{\alpha}(t^{+})^{2^{*}(\alpha)-1}+\lambda f(x,t)$. 由式(9) 知，存在 $T_1>0$，使得当 $|t|\geqslant T_1$ 时，$0\leqslant\theta H(x,t)\leqslant h(x,t)t$，其中

$$H(x,t)=\int_{0}^{s}h(x,s)\mathrm{d}s$$

即 $h(x,t)$ 满足 Ambrosetti-Rabinowitz 条件[8]. 此外，又由连续性知

$$H(x,t)-\frac{1}{\theta}h(x,t)t\leqslant\max_{x\in\Omega,\ 0\leqslant t\leqslant T_1}\left\{H(x,t)-\frac{1}{\theta}h(x,t)t\right\}\triangleq M_1 \tag{10}$$

从而由式(9) 和(10) 知，对任意的 $x\in\overline{\Omega}$，$t\geqslant 0$ 有

$$H(x,t)-\frac{1}{\theta}h(x,t)t\leqslant M_1 \tag{11}$$

结合式(5)，(6) 和(11)，容易验证$\{u_n\}$ 在 $H_{0}^{1}(\Omega)$ 中有界，故存在一个子列仍记作$\{u_n\}$，$u_0\in H_{0}^{1}(\Omega)$ 使得当 $n\to\infty$ 时满足 $u_n\to u_0$ 于 $H_{0}^{1}(\Omega)$，$u_n\to u_0$ 于 $L^{2}(\Omega)$，$u_n\to u_0$ a. e. 于 Ω，同时由连续嵌入易知$\{u_n\}$ 在

$L^{2^*(\alpha)}(\Omega, |x|^\alpha \mathrm{d}x)$ 上有界，从而存在正常数 C_α 使得

$$\int_\Omega |x|^\alpha |u_n|^{2^*(\alpha)} \mathrm{d}x \leqslant C_\alpha < \infty$$

又由$(\mathrm{f}_1)-(\mathrm{f}_3)$知，对任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $C_3(\varepsilon) > 0$ 使得当 $(x, t) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ 时

$$|f(x, t)t| \leqslant C_3(\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2C_\alpha} |x|^\alpha |t|^{2^*(\alpha)}$$

取 $\delta_1 = \dfrac{\varepsilon}{2C_3(\varepsilon)} > 0$，当 $E \subset \Omega$，$\operatorname{mes} E < \delta_1$ 时

$$\begin{aligned}\left|\int_E f(x, u_n)u_n \mathrm{d}x\right| \leqslant \int_E |f(x, u_n)u_n| \mathrm{d}x \leqslant \\ \int_E C_3(\varepsilon)\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2C_\alpha}\int_E |x|^\alpha |u_n|^{2^*(\alpha)} \mathrm{d}x \leqslant \\ C_3(\varepsilon)\operatorname{mes} E + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\end{aligned}$$

因此$\left\{\int_E f(x, u_n^+)u_n \mathrm{d}x, n \in \mathbb{N}\right\}$是等度绝对连续的，由 Vitali 定理[9] 知，当 $n \to \infty$ 时，有

$$\int_\Omega f(x, u_n^+)u_n \mathrm{d}x \to \int_\Omega f(x, u_0^+)u_0 \mathrm{d}x, \int_\Omega F(x, u_n^+)\mathrm{d}x \to \int_\Omega F(x, u_0^+)\mathrm{d}x \tag{12}$$

令 $\omega_n = u_n - u_0$，由 Brezis-Lieb 引理[10] 可得

$$\|\omega_n\|^2 = \|u_n\|^2 - \|u_0\|^2 + o(1) \tag{13}$$

$$\int_\Omega |x|^\alpha (\omega_n^+)^{2^*(\alpha)} \mathrm{d}x = \int_\Omega |x|^\alpha (u_n^+)^{2^*(\alpha)} \mathrm{d}x - \int_\Omega |x|^\alpha (u_0^+)^{2^*(\alpha)} \mathrm{d}x + o(1) \tag{14}$$

从而由(8),(12),(13)和(14)式推得

$$\lim_{n\to\infty}\langle J'_\lambda(u_n), u_0\rangle = \|u_0\|^2 - \int_\Omega |x|^\alpha (u_0^+)^{2^*(\alpha)} \mathrm{d}x - \lambda\int_\Omega f(x, u_0^+)u_0 \mathrm{d}x = 0$$

$$\|\omega_n\|^2 - \int_\Omega |x|^\alpha (\omega_n^+)^{2^*(\alpha)} \mathrm{d}x = o(1) \tag{15}$$

并由式(9)知

$$\begin{aligned}J_\lambda(u_0) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*(\alpha)}\right)\int_\Omega |x|^\alpha (u_0^+)^{2^*(\alpha)} \mathrm{d}x - \lambda\left(\int_\Omega F(x, u_0^+) - \frac{1}{2}f(x, u_0^+)u_0^+ \mathrm{d}x\right) \geqslant \\ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*(\alpha)}\right)\int_\Omega |x|^\alpha (u_0^+)^{2^*(\alpha)} \mathrm{d}x - \lambda(C(\varepsilon)|\Omega| + \varepsilon |x|^\alpha C_\alpha)\end{aligned}$$

故存在 $\lambda' > 0$，使得当 $0 < \lambda < \lambda'$ 时，$J_\lambda(u_0) \geqslant 0$. 联立式(12)－(15)，得

$$J_\lambda(u_0) + \frac{1}{2}\|\omega_n\|^2 - \frac{1}{2^*(\alpha)}\int_\Omega |x|^\alpha (\omega_n^+)^{2^*(\alpha)} \mathrm{d}x = c + o(1) \tag{16}$$

由式(15)知，假定存在$\{\omega_n\}$的子列仍记作$\{\omega_n\}$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\|\omega_n\|^2 = l \geqslant 0 \qquad \lim_{n\to\infty}\int_\Omega |x|^\alpha (\omega_n^+)^{2^*(\alpha)} \mathrm{d}x = l$$

又由 S_α 的定义知 $l \geqslant S_\alpha l^{\frac{2}{2^*(\alpha)}}$，从而要么 $l = 0$，要么 $l \geqslant S_\alpha^{\frac{N+\alpha}{2+\alpha}}$. 由式(16)得

$$c = J_\lambda(u_0) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*(\alpha)}\right)l \geqslant \frac{2+\alpha}{2(N+\alpha)}S_\alpha^{\frac{N+\alpha}{2+\alpha}}$$

这与式(7)相矛盾，故 $l = 0$，从而当 $n \to \infty$ 时 $u_n \to u_0$. 也就是说，$J_\lambda(u)$ 满足$(\mathrm{PS})_c$条件.

引理4　假定 f 满足条件$(\mathrm{f}_1)-(\mathrm{f}_4)$，则存在 $v_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$，$v_\varepsilon \not\equiv 0$ 使得

$$\sup_{t\geqslant 0} J_\lambda(tv_\varepsilon) < \frac{2+\alpha}{2(N+\alpha)}S_\alpha^{\frac{N+\alpha}{2+\alpha}}$$

证　由 $v_\varepsilon(x)$ 的定义(4)，可定义

$$\varphi(t)=J_\lambda(tv_\varepsilon)=\frac{t^2}{2}\|v_\varepsilon\|^2-\frac{t^{2^*(\alpha)}}{2^*(\alpha)}-\lambda\int_\Omega F(x,tv_\varepsilon)\mathrm{d}x$$

$$\widehat{\varphi}(t)=\frac{t^2}{2}\|v_\varepsilon\|^2-\frac{t^{2^*(\alpha)}}{2^*(\alpha)}\qquad t\geqslant 0$$

由$\widehat{\varphi}(t)$的定义知，

$$\widehat{\varphi}(0)=0\qquad \lim_{t\to+\infty}\widehat{\varphi}(t)=-\infty\qquad \lim_{t\to 0^+}\widehat{\varphi}(t)>0$$

因而$\widehat{\varphi}(t)$在某个$t=t_*$处取得上确界，在区间$[0,t_*]$内单调递增，并且$\widehat{\varphi}'(t_*)=0$，则

$$\sup_{t\geqslant 0}\widehat{\varphi}(t)=\widehat{\varphi}(t_*)=\frac{2+\alpha}{2(N+\alpha)}\|v_\varepsilon\|^{\frac{2(N+\alpha)}{2+\alpha}}\tag{17}$$

结合估计式(5)，有

$$\|v_\varepsilon\|^2=\frac{\|u_\varepsilon\|^2}{\left(\int_\Omega|x|^\alpha|u_\varepsilon|^{2^*(\alpha)}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{2^*(\alpha)}}}=S_\alpha+O(\varepsilon^{\frac{N-2}{2+\alpha}})$$

$$\sup_{t\geqslant 0}\widehat{\varphi}(t)=\frac{2+\alpha}{2(N+\alpha)}S_\alpha^{\frac{(N+\alpha)}{2+\alpha}}+O(\varepsilon^{\frac{N-2}{2+\alpha}})\tag{18}$$

由于当$t\geqslant 0$时，$\varphi(t)\leqslant\widehat{\varphi}(t)$，因此联立式(17)和(18)知，存在$T_2>0$，使得当$T_2\in(0,t_*)$时，

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T_2}\varphi(t)\leqslant\sup_{0\leqslant t\leqslant T_2}\widehat{\varphi}(t)<\frac{2+\alpha}{2(N+\alpha)}S_\alpha^{\frac{N+\alpha}{2+\alpha}}$$

另一方面，由(f_4)知$f(x,t)$关于第二个变量单调递增，因而$F(x,t)$也关于第二个变量单调递增，并且$0\in\Omega$，从而存在足够小的$\rho_0>0$，使得

$$\int_\Omega F(x,tv_\varepsilon)\mathrm{d}x\geqslant\int_{B_{\rho 0}(0)}F(x,tv_\varepsilon)\mathrm{d}x$$

因此

$$\sup_{t\geqslant T_2}\varphi(t)<\sup_{t\geqslant 0}\widehat{\varphi}(t)-\lambda\int_\Omega F(x,T_2v_\varepsilon)\mathrm{d}x\leqslant\frac{2+\alpha}{2(N+\alpha)}S_\alpha^{\frac{N+\alpha}{2+\alpha}}+C\varepsilon^{\frac{N-2}{2+\alpha}}-\lambda\int_{B_{\rho 0}(0)}F(x,T_2v_\varepsilon)\mathrm{d}x$$

取$0<\varepsilon<\rho_0^{2+\alpha}$，从而对于$x\in B_{\rho_0}(0)$，由式(3)和(4)知

$$v_\varepsilon(x)=\frac{u_\varepsilon(x)}{\left(\int_\Omega|x|^\alpha|u_\varepsilon|^{2^*(\alpha)}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2^*(\alpha)}}}\geqslant\frac{C_4\varepsilon^{\frac{N-2}{2(2+\alpha)}}}{(\varepsilon+|x|^{2+\alpha})^{\frac{N-2}{2+\alpha}}}\geqslant\frac{C_4\varepsilon^{\frac{N-2}{2(2+\alpha)}}}{(2\rho_0^{2+\alpha})^{\frac{N-2}{2+\alpha}}}\triangleq C_{\rho_0}\varepsilon^{\frac{N-2}{2(2+\alpha)}}$$

对给定的$x\in B_{\rho_0}(0)$，当$\varepsilon\to 0$时，

$$C_4\varepsilon^{\frac{N-2}{2(2+\alpha)}}(\varepsilon+|x|^{2+\alpha})^{-\frac{N-2}{2+\alpha}}\to 0$$

结合$v_\varepsilon(x)$的定义知对给定的$x\in B_{\rho_0}(0)$，当$\varepsilon\to 0$时，$v_\varepsilon(x)\to 0$. 又由(f_3)知

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{F(x,t)}{t^2}=+\infty$$

从而

$$\begin{aligned}\sup_{t\geqslant T_2}\varphi(t)&<\sup_{t\geqslant 0}\widehat{\varphi}(t)-\lambda\int_\Omega F(x,T_2v_\varepsilon)\mathrm{d}x\leqslant\\&\frac{2+\alpha}{2(N+\alpha)}S_\alpha^{\frac{N+\alpha}{2+\alpha}}+\varepsilon^{\frac{N-2}{2+\alpha}}\left(C-\lambda T_2^2\int_{B_{\rho 0}(0)}\frac{F(x,T_2v_\varepsilon)}{(T_2v_\varepsilon)^2}\cdot\frac{v_\varepsilon^2}{\varepsilon^{\frac{N-2}{2+\alpha}}}\mathrm{d}x\right)\leqslant\\&\frac{2+\alpha}{2(N+\alpha)}S_\alpha^{\frac{N+\alpha}{2+\alpha}}+\varepsilon^{\frac{N-2}{2+\alpha}}\left(C-\lambda T_2^2C_{\rho_0}^2\int_{B_{\rho 0}(0)}\frac{F(x,T_2v_\varepsilon)}{(T_2v_\varepsilon)^2}\mathrm{d}x\right)<\frac{2+\alpha}{2(N+\alpha)}S_\alpha^{\frac{N+\alpha}{2+\alpha}}\end{aligned}$$

因此，对足够小的ε满足

$$\sup_{t\geqslant 0}J_\lambda(tv_\varepsilon)=\sup_{t\geqslant 0}\varphi(t)<\frac{2+\alpha}{2(N+\alpha)}S_\alpha^{\frac{N+\alpha}{2+\alpha}}$$

即结论得证.

定理 1 的证明 由嵌入不等式知 $|u|_2 \leqslant C\|u\|$, $\int_\Omega |x|^\alpha |u|^{2^*(\alpha)} \mathrm{d}x \leqslant C\|u\|^{2^*(\alpha)}$. 由($\mathrm{f}_1$)-($\mathrm{f}_3$)及 Ω 的有界性知, 存在 $M_2 > 0$, 使得当 $(x, t) \in \overline{\Omega}\backslash\{0\} \times \mathbb{R}$ 时,

$$|F(x, t)| \leqslant M_2 + \frac{1}{\lambda} \frac{|x|^\alpha t^{2^*(\alpha)}}{2^*(\alpha)}$$

从而

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x - \frac{1}{2^*(\alpha)}\int_\Omega |x|^\alpha (u^+)^{2^*(\alpha)} \mathrm{d}x - \lambda\int_\Omega F(x, u^+)\mathrm{d}x \geqslant$$
$$\frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{2C}{2^*(\alpha)}\|u\|^{2^*(\alpha)} - \lambda M_2 |\Omega|$$

因此, 对足够小的 $\rho > 0$ 和 $\lambda > 0$, 存在 $\lambda_* > 0$, 使得当 $0 < \lambda < \lambda_*$, $\|u\| = \rho$ 时, $J_\lambda(u) > 0$; 当 $0 < \lambda < \lambda_*$, $\|u\| \leqslant \rho$ 时, $J_\lambda(u) \geqslant -C_*$, 其中

$$C_* = \frac{2C}{2^*(\alpha)}\rho^{2^*(\alpha)} + \lambda_* M_2 |\Omega|$$

取 $0 \neq u_1 \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $M_3 = \frac{\|u_1\|^2}{(\lambda |u_1^+|_2^2)}$, 由($f_3$)知, 存在 $\delta_2 > 0$, 使得当 $|t| < \delta_2$ 时 $|F(x, t)| \geqslant \frac{3}{4}M_3 |t|^2$. 因此, 当 $0 < \lambda < \lambda_*$, $|u_1| < \delta_2$, $0 < r < \min\left\{\rho, \frac{\delta_2}{|u_1^+|_\infty}\right\}$ 时

$$J_\lambda(ru_1) = \frac{1}{2}r^2\int_\Omega |\nabla u_1|^2 \mathrm{d}x - \frac{1}{2^*(\alpha)}r^{2^*(\alpha)}\int_\Omega |x|^\alpha |u_1^+|^{2^*(\alpha)} \mathrm{d}x - \lambda\int_\Omega F(x, ru_1^+)\mathrm{d}x \leqslant$$
$$\frac{1}{2}r^2\int_\Omega |\nabla u_1|^2 \mathrm{d}x - \frac{3}{4}\lambda M_3 r^2 |u_1^+|_2^2 = -\frac{1}{4}\int_\Omega |\nabla u_1|^2 \mathrm{d}x < 0$$

从而对足够小的 u, 有 $J_\lambda(u) < 0$,

$$\inf_{u \in \overline{B_\rho(0)}} J_\lambda(u) < 0 < \inf_{u \in \overline{\partial B_\rho(0)}} J_\lambda(u)$$

应用 Ekeland 变分原理[10] 知, 存在极小化序列 $\{u_m\} \subset \overline{B_\rho(0)}$ 使得

$$J_\lambda(u_m) \leqslant \inf_{u \in \overline{B_\rho(0)}} J_\lambda(u) + \frac{1}{m} \qquad J_\lambda(z) \geqslant J_\lambda(u_m) - \frac{1}{m}\|z - u_m\|, \ z \in \overline{B_\rho(0)}$$

因此, 当 $m \to \infty$ 时 $\|J'_\lambda(u_m)\| \to 0$, $J_\lambda(u_m) \to c_\lambda$. 其中 c_λ 是 $J_\lambda(u)$ 在 $\overline{B_\rho(0)}$ 的下确界, $\overline{B_\rho(0)}$ 是 $H_0^1(\Omega)$ 中的闭凸集. 因此, 存在 $u_\lambda \in \overline{B_\rho(0)} \subset H_0^1(\Omega)$ 和 $\{u_m\}$ 的子列仍记作 $\{u_m\}$, 对所有 $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, 有

$$\lim_{m \to \infty}\langle J'_\lambda(u_m), \varphi\rangle = \int_\Omega \nabla u_\lambda \cdot \nabla\varphi \mathrm{d}x - \int_\Omega |x|^\alpha (u_\lambda)^{2^*(\alpha)-1}\varphi \mathrm{d}x - \lambda\int_\Omega f(x, u_\lambda^+)\varphi \mathrm{d}x = 0$$

即 $\langle J'_\lambda(u_\lambda), \varphi\rangle = 0$, 对任意的 $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. 故 u_λ 是 $J_\lambda(u)$ 的临界点. 另一方面, 由 $\|u_\lambda^-\|^2 = -\langle J'_\lambda(u_\lambda), u_\lambda^-\rangle = 0$ 知, $u_\lambda^- = 0$. 由强极大值原理知 $u_\lambda > 0$, 定理 1 得证.

下证当 f 满足(f_1)-(f_4)时问题(1)正解的多重性.

定理 2 的证明 一方面, 对 ρ, λ 足够小, 存在 $a > 0$, 使得当 $0 < \lambda < \lambda_*$ 时,

$$\inf_{\|u\| = \rho} J_\lambda(u) \geqslant a > 0$$

另一方面, 由 $J_\lambda(tv_\varepsilon)$ 的定义知,

$$J_\lambda(0) = 0 \qquad \lim_{t \to +\infty} J_\lambda(tv_\varepsilon) = -\infty$$

从而存在 v_*, $\hat{t} > 0$ 满足 $\|\hat{t}v_*\| > \rho$, 取 $e = \hat{t}v_*$, 则有 $J_\lambda(e) < 0$. 从而由山路定理[10] 知, 定义

$$c_2 = \inf_{g \in \tau}\max_{t \in [0, 1]} J_\lambda(g(t)), \ \tau = \{g \in (C[0, 1], H) \mid g(0) = 0, g(1) = 1\}$$

则 $c_2 \geqslant a > 0$, $J_\lambda(u)$ 关于 c_2 有临界序列. 因此, 当 f 满足(f_1)-(f_4)时, 由引理 3 和定理 1 知, 存在 $\hat{\lambda} > 0$, $\hat{\lambda} = \min\{\lambda', \lambda_*\}$ 使得当 $0 < \lambda < \hat{\lambda}$ 时

$$c_2 < \frac{2+\alpha}{2(N+\alpha)} S_\alpha^{\frac{N+\alpha}{2+\alpha}}$$

因而问题(1)存在第二个正解 v_λ，并有 $J_\lambda(v_\lambda)=c_2>0$. 故此时，问题(1)至少有两个正解 u_λ 和 v_λ，并且 $J_\lambda(u_\lambda)<0<J_\lambda(v_\lambda)$.

参考文献：

[1] BARUTELLO V，SECCHI S，SERRA E. A Note on the Radial Solutions for the Supercritical Hénon Equation [J]. Journal of Mathematical Analysis & Applications，2008，341(1)：720－728.

[2] HENON M. Numerical Experiments on The Stability of Spherical Stellar Systems [J]. Astronomy & Astrophysics，1973，24(24)：259.

[3] NI Wei-ming. A Nonlinear Dirichlet Problem on the Unit Ball and Its Application [J]. Indiana Uniwersity Mathematics Journal，1982，31(6)：801－807.

[4] LI Shu-juan，PENG Shuang-jie. Asymptotic Behavior on the Hénon Equation with Supercritical Exponent [J]. Science in China Series A：Mathematics，2009，52(10)：2185－2194.

[5] SMETS D，WILLEM M，SU Jia-bao. Non-Radial Ground States for the Hénon Equation [J]. Communications in Contemporary Mathematics，2002，4(3)：467－480.

[6] GLADIALI F，GROSSI M，NEVES S L N. Nonradial Solutions for the Hénon Equation in RN [J]. Advances in Mathematics，2013，249(11)：1－36.

[7] BREZIS H，NIRENBERG L. Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Equations Involving Critical Sobolev Exponents [J]. Communications on Pure and Applied Mathematics，1983，36(4)：437－477.

[8] AMBROSETTI A，RABINOWITZ P H. Dual Variational Methods in Critical Point Theory and Applications [J]. Journal of Functional Analysis，1973，14(4)：349－381.

[9] RUIZ D，WILLEM M. Elliptic Problems with Critical Exponents and Hardy Potentials [J]. Journal of Differential Equations，2003，190(2)：524－538.

[10] WILLEM M. Minimax Theorems [M]. Berlin：Springer，1996.

Positive Solutions for Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems with Critical Hénon Exponent

WANG Qi-feng，　DENG Zhi-ying

School of Science，Chongqing University of Posts and Telecommunications，Chongqing 400065，China

Abstract：In this paper，we are concerned with a class of nonlinear elliptic boundary value problems with critical Hénon exponent. Apply the Ekeland variational principle and the strong maximum principle，we prove the existence of the positive solution for the above problem. Furthermore，by virtue of the mountain pass lemma we establish the multiplicity of the positive solutions under certain appropriate conditions.

Key words：positive solution；mountain pass lemma；critical Hénon exponent；Ekeland variational principle

责任编辑　张　构