第 38 卷第 12 期　　西 南 大 学 学 报（自然科学版）　　2016年12月
Vol. 38　No. 12　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Dec.　2016

DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2016.12.006

群的融合自由积的广义拟 Frattini 子群①

张志让，　岑吉桃

成都信息工程大学 应用数学学院，成都 610225

摘要：引入了一类与子群的正规性相关的广义拟 Frattini 子群：$_n$拟 Frattini 子群. 研究了任意多个子群的具有循环融合自由积的$_n$拟 Frattini 子群，并证明了相应的定理. 同时研究了$_n$拟 Frattini 子群的$_n$拟可裂性质，分别得到了下$_n$拟 Frattini 子群和上$_n$拟 Frattini 子群的$_n$拟可裂性质.

关　键　词：上$_n$拟 Frattini 子群；下$_n$拟 Frattini 子群；群的融合自由积；$_n$拟可裂性质

中图分类号：O152.1　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9868(2016)12-0042-05

1972 年，文献[1]研究了两个子群的具有循环融合自由积的 Frattini 子群，得到了如下令人感兴趣的定理：

定理 1[1]　设群 G 是两个子群 A 和 B 的具有融合子群 H 的自由积，即 $G=A*_HB$，其中 H 是任意循环群. 如果 N 是含于 H 的 G 的正规子群，那么：

$$\Phi(A)\cap N\leqslant\Phi(G)\qquad\Phi(B)\cap N\leqslant\Phi(G)$$

其中 $\Phi(A)$,$\Phi(B)$ 和 $\Phi(G)$ 分别是 A,B 和 G 的 Frattini 子群.

此后，文献[2-4]考虑了群的这种广义自由积的广义 Frattini 子群，得到了若干个推广的结果.

例如，文献[2]利用下拟 Frattini 子群是由所有非拟生成元构成的特征子群这一特性，将定理 1 推广到任意多个子群的具有循环融合自由积的下拟 Frattini 子群，并且提出了两个公开问题，其中第二个公开问题是关于这种类型的广义自由积的上拟 Frattini 子群的. 文献[3]考虑了自由因子都是 $\mathscr{E}'$-群的任意多个子群的具有循环融合自由积的上拟 Frattini 子群，从另一角度推广了定理 1，部分地回答了上述的第二个公开问题，其中应用了上拟 Frattini 子群的定义：群的上拟 Frattini 子群为它的所有拟极大子群的交[5].

文献[6]考虑了一类广义拟 Frattini 子群，引入了一类与子群的正规性相关的广义拟 Frattini 子群：$_n$拟 Frattini 子群、上$_n$拟 Frattini 子群和下$_n$拟 Frattini 子群，并且研究了它们的基本性质.

本文的第 2 节首先利用群 G 的下$_n$拟 Frattini 子群 $U_n(G)$ 等于 G 的所有非$_n$拟生成元组成的集合这一特性，讨论了任意多个子群的具有循环融合自由积的下$_n$拟 Frattini 子群，得到了与文献[2]的定理 6 类似的结论(参见定理 2)，然后利用群 G 的上$_n$拟 Frattini 子群 $V_n(G)$ 是 G 的所有$_n$拟极大子群的交这一特性，考虑了因子群都是$_n\mathscr{E}'$-群的任意多个子群的具有循环融合自由积的上$_n$拟 Frattini 子群，推广了文献[3]中定理 3.2 的结果(参见定理 3).

本文的第 3 节考虑了群的$_n$拟 Frattini 子群的$_n$拟可裂性质，分别得到了下$_n$拟 Frattini 子群和上$_n$拟 Frattini 子群的$_n$拟可裂性质(参见定理 4 和定理 5).

---

①　收稿日期：2016-03-09
基金项目：国家自然科学基金项目(11371335，11471055).
作者简介：张志让(1946-)，男，江苏宜兴人，教授，主要从事无限群类的研究.

1　基本概念

本节将给出文章需要使用的一些广义拟 Frattini 子群和群的具有融合子群的自由积的相关概念.

定义 1　设 x 是群 G 的元素. 如果存在 G 的某一子集 S，使得 $|G:S^G|$ 是无限的，但是 $|G:\langle x,S\rangle^G|$ 是有限的，那么称 x 是 G 的$_n$拟生成元. 于是，如果对任意满足 $|G:\langle x,S\rangle^G|$ 有限的子集 S，都有 $|G:S^G|$ 是有限的，那么称 x 是 G 的非$_n$拟生成元，其中 S^G 表示 S 在 G 中的正规闭.

很容易知道下面定义与此等价：

定义 2　设 x 是群 G 的元素. 如果存在 G 的某一正规子群 S，使得 $|G:S|$ 是无限的，但是 $|G:x^GS|$ 是有限的，那么称 x 是 G 的$_n$拟生成元. 于是，如果对于任意具有性质 $|G:x^GS|$ 是有限的 G 的正规子群 S，都有 $|G:S|$ 是有限的，那么称 x 是 G 的非$_n$拟生成元.

群 G 的下$_n$拟 Frattini 子群 $U_n(G)$ 等于 G 的所有非$_n$拟生成元构成的特征子群.

定义 3　设 G 是一个群，且 M 是群 G 的正规子群，如果 $|G:M|$ 是无限的，但对任意的 $M<N\lhd G$，都有 $|G:N|$ 是有限的，那么称 M 为 G 的$_n$拟极大子群.

群 G 的上$_n$拟 Frattini 子群 $V_n(G)$ 等于 G 的所有$_n$拟极大子群的交构成的特征子群，如果 G 的$_n$拟极大子群不存在，那么 G 的上$_n$拟 Frattini 子群定义为 $V_n(G)=G$.

定义 4　如果群 G 的每一个具有无限指数的子群包含在一个$_n$拟极大子群中，那么称 G 为$_n\mathscr{E}'$-群.

定义 5　设 H 是群 G 的正规子群，如果存在一个 G 的具有无限指数的正规子群 K，使得 $|G:HK|<\infty$ 且 $H\cap K=1$，则称 G 关于 H_n拟可裂.

下面我们回忆群的具有融合子群的自由积的定义，这里我们使用文献[7]中的定义，但是采用文献[8]中的自由积的记号.

定义 6　设 Γ 是一个指标集，其基数大于 1. S 是群 G 的生成元集. 令 $S=\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma}S_\gamma$ 是群 G 的某些子集 S_γ 的并，对每一指数 $\gamma\in\Gamma$，$G_\gamma=\langle S_\gamma\rangle$，$R_\gamma$ 为 G_γ 的定义关系集合. 如果 $R=\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma}R_\gamma$ 恰好为群 G 的定义关系集合，那么称 G 为诸子群 G_γ 的广义自由积. 因为没有假设 S_α 和 S_β 是不相交的，故可以假设

$$G_\alpha\cap G_\beta=H_{\alpha\beta}=H_{\beta\alpha}\neq 1$$

如果对所有 $\alpha\neq\beta$ 都满足 $H_{\alpha\beta}=1$，那么称 G 为诸子群 G_γ 的自由积. 如果假设对所有 $\alpha\neq\beta$ 都有 $H_{\alpha\beta}=H$，其中 H 为 G 的子群，那么称 G 为诸子群 G_γ 的具有融合子群 H 的自由积，且记为 $G=*_{\gamma\in\Gamma}(G_\gamma;H_\gamma)$，其中对任意 $\gamma\in\Gamma$，H_γ 都同构于 H.

2　群的融合自由积的广义拟 Frattini 子群

在本节中，我们考虑群的融合自由积的下$_n$拟 Frattini 子群和上$_n$拟 Frattini 子群的性质.

引理 1[2,9]　设 H 和 K 是群 G 的任意两个子群，则

$$|K:H\cap K|=|KH:H|$$

这里 $|KH:H|$ 可看为 H 在集合 KH 中左陪集的个数. 进而，如果 $|G:H|$ 是有限的，那么 $|K:H\cap K|$ 也是有限的，且有

$$|K:H\cap K|\leqslant|G:H|$$

当且仅当 $G=HK$ 时，其中的等号成立.

文献[2]给出了任意多个群的具有循环融合自由积的下拟 Frattini 子群的结果，下面我们利用群 G 的下$_n$拟 Frattini 子群是 G 的所有非$_n$拟生成元组成的特征子群这一事实，给出任意多个群的具有循环融合自由积的下$_n$拟 Frattini 的相应结果：

定理 2　设 $G=*_{\gamma\in\Gamma}(G_\gamma;H_\gamma)$ 是任意子群簇 $\{G_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 具有融合子群 H 的自由积，其中 H 是任意一个循环群. 如果 N 是含于 H 的 G 的任意正规子群，那么对任意指标 $\gamma\in\Gamma$，都有 $U_n(G_\gamma)\cap N\leqslant U_n(G)$.

证　为了证明 $U_n(G_\gamma)\cap N\leqslant U_n(G)$($\gamma\in\Gamma$ 是任意给定的一个指标)，只需证明 $U_n(G_\gamma)\cap N$ 的任

意元素都是 G 的非$_n$拟生成元. 设 $x \in U_n(G_\gamma) \cap N$，由于$\langle x \rangle$是循环子群 N 的特征子群且 $N \trianglelefteq G$，故$\langle x \rangle \triangleleft G$. 设 S 是 G 的任意满足性质

$$|G : x^G S| = |G : \langle x \rangle S| < \infty$$

的正规子群. 由引理 1，可以知道对群 G 的任意两个子群 H 和 K，如果

$$|G : H| < \infty$$

那么

$$|K : H \cap K| < \infty$$

由此结果，我们有

$$|G_\gamma : (\langle x \rangle S) \cap G_\gamma| = |G \cap G_\gamma : (\langle x \rangle S) \cap G_\gamma| < \infty$$

但是利用 Dedekind 模律[8] 就有

$$(\langle x \rangle S) \cap G_\gamma = \langle x \rangle (S \cap G_\gamma)$$

从而

$$|G_\gamma : \langle x \rangle (S \cap G_\gamma)| < \infty$$

由于 x 是 G_γ 的非$_n$拟生成元，故

$$|G_\gamma : S \cap G_\gamma| < \infty$$

用$\langle x \rangle$分别与 G_γ 和 $S \cap G_\gamma$ 相交，再次利用引理 1 即得

$$|\langle x \rangle S : S| = |\langle x \rangle : S \cap \langle x \rangle| < \infty$$

但是由文献[8] 的 1.3.5，有

$$|G : S| = |G : \langle x \rangle S| \times |\langle x \rangle S : S|$$

从而

$$|G : S| < \infty$$

即 x 是 G 的非$_n$拟生成元. 由 x 的任意性，得 $U_n(G_\gamma) \cap N \leqslant U_n(G)$. 证毕.

文献[3] 给出自由因子都是 $\mathscr{E}'$-群的任意群的具有循环融合子群的自由积的上拟 Frattini 子群的结果，下面我们利用群的上$_n$拟 Frattini 子群是所有$_n$拟极大子群的交构成的特征子群这一性质，给出自由因子都是$_n\mathscr{E}'$-群的任意群的具有循环融合子群的自由积的上$_n$拟 Frattini 子群的相应结果.

定理 3　设 $G = *_{\gamma \in \Gamma}(G_\gamma ; H_\gamma)$ 是任意$_n\mathscr{E}'$-子群簇$\{G_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$具有融合子群 H 的自由积，其中 H 是任意一个循环群. 如果 N 是含于 H 的 G 的任意正规子群，那么对任意指标 $\gamma \in \Gamma$，都有 $V_n(G_\gamma) \cap N \leqslant V_n(G)$.

证　设 $x \in V_n(G_\gamma) \cap N$（$\gamma \in \Gamma$ 是任意给定的一个指标），要证明 $x \in V_n(G)$，只需证明 x 是 G 的每个$_n$拟极大子群的元素. 与定理 2 证明过程类似，可得$\langle x \rangle \triangleleft G$. 设 M 是 G 的任意$_n$拟极大子群，则 $|G : M| = \infty$. 现在要证明 $x \in M$，只需证明

$$|G : \langle x, M \rangle^G| = |G : \langle x \rangle M| = \infty$$

假设该式不成立，则

$$|G : \langle x \rangle M| < \infty$$

用 G_γ 分别与 G 和$\langle x \rangle M$ 相交，即可得

$$|G_\gamma : G_\gamma \cap (\langle x \rangle M)| = |G_\gamma : \langle x \rangle (G_\gamma \cap M)| < \infty$$

假如 $|G_\gamma : G_\gamma \cap M| < \infty$. 由于$\langle x \rangle M \leqslant G_\gamma M$ 且 $|G_\gamma : M \cap G_\gamma| = |G_\gamma M : M|$（由引理 1 可得），从而 $|\langle x \rangle M : M| < \infty$. 即可得

$$|G : M| = |G : \langle x \rangle M| \times |\langle x \rangle M : M| < \infty$$

这矛盾于 M 是 G 的$_n$拟极大子群. 故

$$|G_\gamma : (G_\gamma \cap M)| = \infty$$

由于 G_γ 是$_n\mathscr{E}'$-群，所以存在 G_γ 的一个$_n$拟极大子群 S，使得

$$G_\gamma \cap M \leqslant S$$

又由于

$$x \in V_n(G_\gamma) \leqslant S$$

故有

$$|G_\gamma : S| = |G_\gamma : \langle x\rangle S| \leqslant |G_\gamma : \langle x\rangle(G_\gamma \cap M)| < \infty$$

这与 S 是 G_γ 的一个${}_n$拟极大子群相矛盾. 因此

$$|G : \langle x\rangle M| = \infty$$

从而 $x \in M$. 由 M 的任意性知 $x \in V_n(G)$，即得 $V_n(G_\gamma) \cap N \leqslant V_n(G)$. 证毕.

3　${}_n$拟 Frattini 子群的${}_n$拟可裂性质

文献[10]给出了拟 Frattini 子群的拟可裂性质，下面我们在此基础上研究${}_n$拟 Frattini 子群的${}_n$拟可裂性质. 本节中我们采用文献[10－12]的记号.

首先给出下${}_n$拟 Frattini 子群的${}_n$拟可裂性质.

定理 4　设 H 是群 G 的素数阶的正规子群，则 $U_n(G) \cap H = 1$ 当且仅当 G 关于 $H$${}_n$拟可裂.

证　假定 $U_n(G) \cap H = 1$，那么 H 中任意非平凡元素都是 G 的${}_n$拟生成元. 于是对于任意 $1 \neq x \in H$，存在 G 的一个具有无限指数的正规子群 S，使得

$$|G : Sx^G| < \infty$$

由于 H 是群 G 的具有素数阶的正规子群，则

$$x^G = H^G = H = \langle x\rangle$$

因此

$$|G : SH| = |G : S\langle x\rangle| = |G : S\langle x\rangle^G| < \infty$$

为了证明 G 关于 $H$${}_n$拟可裂，仅需证明 $H \cap S = 1$ 即可. 假定这种情况不成立，那么有 $H \leqslant S$，从而

$$|G : SH| = |G : S| = \infty$$

这与 $|G : SH| < \infty$ 矛盾. 所以 $H \cap S = 1$.

反之，假定 G 关于 $H$${}_n$拟可裂. 那么 G 中存在具有无限指数的正规子群 K，使得 $|G : HK| < \infty$. 对任意 $1 \neq x \in H$，有

$$|G : Kx^G| = |G : KH^G| = |G : KH| < \infty$$

由群的${}_n$拟生成元的定义可知 x 是 G 的${}_n$拟生成元，从而有 $x \notin U_n(G)$. 所以 $U_n(G) \cap H = 1$. 证毕.

最后，我们将定理4推广到上${}_n$拟 Frattini 子群的情形，建立如下定理，部分回答了文献[10]中提出的公开问题：

定理 5　设 H 是${}_n\mathscr{E}'$-群 G 的素数阶的正规子群，则 $V_n(G) \cap H = 1$ 当且仅当 G 关于 $H$${}_n$拟可裂.

证　假定 $V_n(G) \cap H = 1$，那么 H 中任意非平凡元素都不是 $V_n(G)$ 的元素. 于是对任意 $1 \neq x \in H$，存在 G 的一个${}_n$拟极大子群 M，使得 $x \notin M$. 由群的${}_n$拟极大子群的定义 $|G : Mx^G| < \infty$ 且

$$|G : M| = \infty$$

因此

$$|G : MH| = |G : Mx^G| < \infty$$

我们断言 $M \cap H = 1$. 否则，如果 $M \cap H \neq 1$，由于 H 是素数阶群，就有 $H \leqslant M$，从而

$$|G : MH| = |G : M| = \infty$$

这与 $|G : MH| < \infty$ 矛盾. 所以 $H \cap M = 1$.

反之，假定 G 关于 $H$${}_n$拟可裂，那么 G 中存在一个具有无限指数的正规子群 K，使得 $|G : HK| < \infty$. 由于 G 是${}_n\mathscr{E}'$-群，存在 G 的一个${}_n$拟极大子群 M，使得 $K \leqslant M$，从而

$$|G : HM| \leqslant |G : HK| < \infty$$

对于任意 $1 \neq x \in H$，一定有 $x \notin M$. 否则，如果 $x \in M$，那么 $H \leqslant M$，从而

$$|G : HM| = |G : M| = \infty$$

矛盾于 $|G : HM| < \infty$. 从而 $x \notin V_n(G)$，所以 $V_n(G) \cap H = 1$. 证毕.

参考文献：

[1] TANG C Y. On the Frattini Subgroups of Generalized Free Products with Cyclic Amalgamations [J]. J Canad Math Bull，1972，15(4)：569－573.

[2] AZARIAN M K. On the Lower Near Frattini Subgroups of Amalgamated Free Product of Groups I [J]. Missouri J Math Sci，1990(2)：105－144.

[3] 郭　钦，张志让，王　英，等. 群的融合自由积的几种广义 Frattini 子群 [J]. 数学年刊，2008，29A(1)：67－70.

[4] 张志让，邓理平，和佩佩. 群的融合自由积的 πn-Frattini 子群和 πc-Frattini 子群 [J]. 数学物理学报，2013，33A(1)：123－126.

[5] RILES J B. The Near Frattini Subgroups of Infinite Groups [J]. J Algebra，1969，12：155－171.

[6] LV Z Y，ZHANG Z R，ZHAO G W. The $_\pi$ Near Frattini Subgroups of Infinite Groups [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2009，31(4)：1－5.

[7] NEUMANN B H. An Essay on Free Products of Groups with Amalgamations [J]. Philos Trans Roy Soc London (Ser A)，1954，246：503－554.

[8] ROBINSON D J S. A Course in the Theory of Groups [M]. 2th ed. New York：Springer-Verlag，1996.

[9] DOERK K，HAWKES T. Finite Soluble Groups [M]. Berlin：Walter de Gruyter，1992.

[10] AZARIAN M K. On Lower Near Frattini Subgroups and Nearly Splitting Groups [J]. Missouri J Math Sci，1990，2(1)：18－25.

[11] 韩章家，陈　晨，张志让. 有限群的 WSC -子群与 p -幂零性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2014，39(2)：1－3.

[12] 郭继东，任永才，张志让. 关于“好群” [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2015，37(4)：17－22.

Generalized Near Frattini Subgroups of Amalgamated Free Products of Groups

ZHANG Zhi-rang，　CEN Ji-tao

School of Applied Mathematics，Chengdu University of Information Technology，Chengdu 610225，China

Abstract：By investigating generalized near Frattini subgroups of a free product of any set of subgroups with cyclic amalgamated subgroup，similar theorems are proved. Also，n-near splitting properties of the n-near Frattini subgroup are obtained.

Key words：upper n-near Frattini subgroup；lower n-near Frattini subgroup；amalgamated free products of groups；n-near splitting properties

责任编辑　廖　坤