第 38 卷第 12 期　　西 南 大 学 学 报 (自然科学版)　　2016年12月
Vol. 38　No. 12　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Dec.　2016

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2016.12.009

具有极大正规化子的有限群[①]

蹇　祥，　吕　恒

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：设群 G 是有限群，若 G 的任意循环子群 A 都存在素数 p，使得 $|G:N_G(A)|\bigm| p$，则称 G 为 NP-群. 证明了有限 NP-群 G 具有 Sylow 塔且导长至多是 5.

关　键　词：可解群；p-群；Sylow 塔；正规化子

中图分类号：O152.1　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9868(2016)12-0056-05

本文考虑的群都是有限群. 对群 G 的所有交换子群 A，显然都有

$$I\leqslant A\leqslant C_G(A)\leqslant N_G(A)\leqslant G$$

对于这个子群链，一些群论专家就特殊情况做出了一些比较有意义的研究结果. 如文献[1]证明了：群 G 是交换群的充分必要条件是 G 的任意交换子群 A 有 $N_G(A)=C_G(A)$. 文献[2]证明了：若 $N_G(A)/C_G(A)\cong \mathrm{Aut}(A)$ 对任意交换子群 A 成立，则 G 可解. 对于交换子群的情况，文献[3]证明了：如果有限群 G 的交换 Sylow p-群 P 满足 $N_G(P)=C_G(P)$，则 G 是 p-幂零群. 文献[4]研究了一类有限群，其任意交换子群 A 满足 $N_G(A)=C_G(A)$ 或者 $C_G(A)=A$. 文献[5]研究了 Sylow 子群在其正规化子的覆盖. 文献[6]研究了任意交换子群 A 都满足 $C_G(A)=A$ 或者 $N_G(A)=G$ 的群.

本文将研究一类有限群 G，其任意循环群 A 都存在一个素数 p，使得

$$|G:N_G(A)|\bigm| p$$

为了方便，本文称这类群是 NP-群. 本文证明了非幂零的 NP-群 G 是可解群，并且群 G 具有 Sylow 塔. 对于非幂零的 NP-群 G，其结构可以写成

$$G=G_{p_1}\times\cdots\times G_{p_{m-1}}\times G_{p_m}[(G_{p_{m+1}}\times\cdots\times G_{p_{k-1}}\times G_{p_{k+1}}\times\cdots\times G_{p_s})*G_{p_k}]$$

其中最多只有 1 个素因子，其 Sylow 子群不是 Dedekind 群，且 NP-群的导长最多是 5. 本文中 $G=[H]K$ 表示子群 H 与子群 K 的半直积，其中 H 是 G 的正规子群.

沿用文献[7]中的符号 NCM-群，其中 NCM-群是非正规循环子群的正规化子皆极大的有限群. 本文给出了比文献[7]更好的关于 NP-群的结构刻画.

引理 1　NP-群的子群和商群遗传.

证　先证明 NP-群的商群遗传. 对任意 $N\trianglelefteq G$，设

$$M/N=\langle aN\rangle=\langle a\rangle N/N$$

是 G/N 的循环子群，易得

$$N_{G/N}(M/N)\geqslant N_G(\langle a\rangle)N/N$$

---

① 收稿日期：2016-03-30

基金项目：国家自然科学基金项目(11471266)；中央高校基本业务费专项资金项目(XDJK2015B033).

作者简介：蹇　祥(1993-)，男，重庆人，硕士研究生，主要从事群论的研究.

通信作者：吕　恒，教授.

即

$$|G/N : N_{G/N}(M/N)| \,\Big|\, |G : N_G(\langle a\rangle)N|$$

由此表明

$$|G/N : N_{G/N}(M/N)| = 1, p$$

其中 p 为素数.

下面证明NP-群的子群遗传.对子群 B 的任意循环群 A，$A \leqslant B \leqslant G$，可得

$$|B : N_B(A)| = |B : N_G(A) \cap B| = |BN_G(A) : N_G(A)|$$

若 $B \leqslant N_G(A)$，则

$$|B : N_B(A)| = 1$$

若 $B \not\leqslant N_G(A)$，则

$$|B : N_B(A)| = |G : N_G(A)| = p, 1$$

故NP-群的子群遗传.

引理2　若群 G 是非幂零NP-群，则群 G 不是单群.

证　设 G_{p_s} 是 G 的Sylow p_s-子群，其中 p_s 是整除 $|G|$ 的最大素数.任意取

$$1 \neq a \in Z(G_{p_s})$$

若

$$|G : N_G(\langle a\rangle)| = 1$$

则 G 非单.若

$$|G : N_G(\langle a\rangle)| = p$$

显然 $p \neq p_s$，则

$$G/(N_G(\langle a\rangle))_G \lesssim S_p$$

则

$$|G/(N_G(\langle a\rangle))_G| \,\Big|\, p!$$

且

$$p_s \nmid |G/(N_G(\langle a\rangle))_G|$$

故

$$G_{p_s} \leqslant (N_G(\langle a\rangle))_G \neq 1$$

则 G 非单.则群 G 不是单群.

运用引理1及引理2，我们得到下面结论：

推论1　若群 G 是非幂零NP-群，则群 G 可解.

证　若群 G 是满足条件极小的非可解群，取 $1 \neq N \lhd G$.由引理1，G/N 和 N 都是NP-群，且：

$$|G/N| < G \qquad |N| < |G|$$

从而 G/N 和 N 都可解，则 G 是可解群.

由文献[7]的引理3.2.1可知，当 G 幂零时，最多有一个Sylow-子群不是Dedekind群.在后面的证明中，我们将研究非幂零NP-群的结构特征.

定理1　若群 G 是NP-群，则群 G 具有Sylow塔.

证　设 $|G| = p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s}(p_1 < \cdots < p_s)$，设 G_{p_s} 是群 G 的Sylow p_s-子群，p_s 是最大素因子.

若存在 $y \in G_{p_s}$ 使得 $\langle y\rangle \trianglelefteq G$，可以考虑 $G/\langle y\rangle$.由引理1可得，$G/\langle y\rangle$ 也是NP-群，且阶比 $|G|$ 小.对 G 的阶进行归纳可知 $G/\langle y\rangle$ 具有Sylow塔.从而易得 G 具有Sylow塔.

若对任意 $y \in G_{p_s}$，都有 $\langle y\rangle \ntrianglelefteq G$，取

$$1 \neq x \in Z(G_{p_s})$$

则

$$|G:N_G(\langle x\rangle)|=p\neq p_s$$

由引理 2 的证明可知

$$G_{p_s}\leqslant (N_G(\langle x\rangle))_G$$

对 G 进行归纳知，$(N_G(\langle x\rangle))_G$ 具有 Sylow 塔，G_{p_s} 是$(N_G(\langle x\rangle))_G$ 的特征不变子群，因此正规于 G. 由归纳法可得，G/G_{p_s} 具有 Sylow 塔，从而群 G 具有 Sylow 塔.

推论 2　设群 G 是非幂零 NP -群，最多只有一个素因子 p，其 Sylow p -子群不是 Dedekind 群，且

$$G=G_{p_1}\times\cdots\times G_{p_{m-1}}\times G_{p_m}[(G_{p_{m+1}}\times\cdots\times G_{p_{k-1}}\times G_{p_{k+1}}\times\cdots\times G_{p_s})*G_{p_k}]$$

特别地，若 G_{p_m} 不是 Dedekind 群，则

$$G=G_{p_1}\times\cdots\times G_{p_{m-1}}\times G_{p_m}[(G_{p_{m+1}}\times\cdots\times G_{p_s})]$$

若 G_{p_m} 是 Dedekind 群. 最多只有 G_{p_k} 不是 Dedekind 群.

证　设 $|G|=p_1^{\alpha_1}\cdots p_s^{\alpha_s}$，$G_{p_i}$ 为 G 的 Sylow p_i -子群(其中 $p_1<\cdots<p_s$). 从 G_{p_1} 到 G_{p_s}，G_{p_m} 是第一个不正规于 G 的子群. 则小于 p_m 的 Sylow 子群全部是 Dedekind 群. 否则，设 G_{p_r} 不是 Dedekind 群，且 $p_r<p_m$. 取 $x\in G_{p_m}$，$y\in G_{p_r}$，显然有

$$|G:N_G(\langle x\rangle)|=p_k$$

由于群 G 具有 Sylow 塔，因此 $p_k\geqslant p_m$. 而

$$|G:N_G(\langle y\rangle)|=p_r$$

由于$\langle x\rangle$,$\langle y\rangle$ 是$\langle xy\rangle$ 的特征不变子群，因此：

$$N_G(\langle x\rangle)\geqslant N_G(\langle xy\rangle)\qquad N_G(\langle y\rangle)\geqslant N_G(\langle xy\rangle)$$

得 $p_kp_r\,\big|\,|G:N_G(\langle xy\rangle)|$，与 $N_G(\langle xy\rangle)$ 的极大性矛盾.

情况 1　若 G_{p_m} 不是 Dedekind 群，则存在 $x\in G_{p_m}$，使得

$$|G:N_G(\langle x\rangle)|=p_m$$

由文献[7] 的定理 3.2.1 得

$$N_{G_\pi}(\langle x\rangle)=[T_x]A$$

其中 $\pi=\{p_m,\cdots,p_s\}$，A 是 $N_{G_\pi}(\langle x\rangle)$ 的 Sylow p_m -子群，T_x 是 $N_{G_\pi}(\langle x\rangle)$ 的交换 Hall p_m' -子群. 易得 G 只有 Sylow p_m -子群 G_{p_m} 不是 Dedekind 群. 由于 G 具有 Sylow 塔，因此 $T_x\trianglelefteq G$. 得

$$G=G_{p_1}\times\cdots\times G_{p_{m-1}}\times G_{p_m}[(G_{p_{m+1}}\times\cdots\times G_{p_s})]$$

情况 2　若 G_{p_m} 是 Dedekind 群，则存在 $x\in G_{p_m}$，使得

$$|G:N_G(\langle x\rangle)|=p_k$$

由文献[7] 的定理 3.2.1 得

$$N_G(\langle x\rangle)=[T_x]B$$

其中 T_x 是群 $N_{G_\pi}(\langle x\rangle)$ 的交换 Hall p_k' -子群，且 $B=G_{p_m}$. 易得 G 最多只有 Sylow p_k -子群 G_{p_k} 不是 Dedekind 群. 由于群 G 具有 Sylow 塔，因此

$$G=G_{p_1}\times\cdots\times G_{p_{m-1}}\times G_{p_m}[(G_{p_{m+1}}\times\cdots\times G_{p_{k-1}}\times G_{p_{k+1}}\times\cdots\times G_{p_s})*G_{p_k}]$$

情况 1 的结构可以归结为情况 2 的结构，故结论成立.

定理 2　NP -群的导长最多为 5. 特别地，若 NP -群 G 是 p -群，则 G 的幂零类至多是 3，即 G 是亚交换群.

证　情况1　若 NP -群是 p -群，则 G 是亚交换群. 由此可知幂零 NP -群的导长最多为 2. 对任意 $x\in G$，若$\langle x\rangle\ntrianglelefteq G$，则

$$|G:N_G(\langle x\rangle)|=p$$

又由于

$$N_G(\langle x\rangle)\trianglelefteq G$$

因此

$$G' \leqslant N_G(\langle x \rangle))$$

于是可得

$$G' \leqslant \bigcap_{x \in G}(N_G(\langle x \rangle)))$$

由文献[8]的推论140.8，$G' \leqslant Z_2(G)$. 可得G的幂零类至多是3. 故G是亚交换群.

情况2　从G_{p_1}到G_{p_s}，G_{p_m}是第一个不正规于G的子群，若G_{p_m}不是Dedekind群，由推论2可知

$$G = G_{p_1} \times \cdots \times G_{p_{m-1}} \times G_{p_m}[(G_{p_{m+1}} \times \cdots \times G_{p_s})]$$

由情况1可得，群G的导长不大于3.

情况3　从G_{p_1}到G_{p_s}，G_{p_m}是第一个不正规于G的子群，若G_{p_m}是Dedekind群，则导长最多为5.

对任意$x, y \in G_{p_m}$，满足$\langle x \rangle \ntrianglelefteq G$，$\langle y \rangle \ntrianglelefteq G$，由文献[7]的定理3.2.1知：

$$N_{G_\pi}(\langle x \rangle) = [T_x]G_{p_m} \qquad N_{G_\pi}(\langle y \rangle) = [T_y]G_{p_m} \qquad \pi = \{p_m, \cdots, p_s\}$$

若存在$T_x \neq T_y$，则有

$$T_x T_y = G_{\pi_1} \trianglelefteq G \qquad \pi_1 = \{p_{m+1}, \cdots, p_s\}$$

由于T_x, T_y为交换子群，因此G_{π_1}为亚交换子群. 由于

$$G = G_{p_1} \times \cdots \times G_{p_{m-1}} \times G_{p_m}[G_{\pi_1}]$$

因此G的导长最多为4.

若不存在$T_x \neq T_y$，隐含有$G_{p_m} \trianglelefteq N_{G_\pi}(\langle x \rangle)$，则可以设

$$N_{G_\pi}(\langle x \rangle) = G_{p_m} \times \cdots \times G_{p_{k-1}} \times A \times G_{p_{k+1}} \times \cdots \times G_{p_s}$$

且$N_{G_\pi}(\langle x \rangle)$在$G_\pi$中极大. 对任意$G_{p_i}$(其中$i = m+1, \cdots, k-1, k+1, \cdots, s$)，显然有

$$C_{G_\pi}(G_{p_i}) \geqslant N_{G_\pi}(\langle x \rangle)$$

若

$$G_{p_i} \trianglelefteq G_\pi$$

则

$$C_{G_\pi}(G_{p_i}) \trianglelefteq G_\pi$$

如果

$$C_{G_\pi}(G_{p_i}) = N_{G_\pi}(\langle x \rangle)$$

那么G_{p_m}是$N_{G_\pi}(\langle x \rangle)$的特征不变子群，且

$$N_{G_\pi}(\langle x \rangle) \trianglelefteq G_\pi$$

易得$G_{p_m} \trianglelefteq G$，矛盾. 于是

$$C_{G_\pi}(G_{p_i}) = G_\pi$$

易得

$$G_{p_i} \leqslant Z(G)$$

若$G_{p_i} \ntrianglelefteq G_\pi$，必有

$$G_\pi \neq N_{G_\pi}(G_{p_i}) \geqslant C_{G_\pi}(G_{p_i}) \geqslant N_{G_\pi}(\langle x \rangle)$$

由$N_{G_\pi}(\langle x \rangle)$的极大性，可得$G_\pi$是$p_i$-幂零群. 综上，

$$G_{p_i} \leqslant Z(G)$$

或者G_π是p_i-幂零群，其中$i = m+1, \cdots, k-1, k+1, \cdots, s$. 设$M$为群$G_\pi$的所有正规$p_i$-补的交. 则

$$M \cap G_{\pi_1} = N \times G_{p_k} \trianglelefteq G_\pi \qquad N \leqslant Z(G)$$

可得

$$G_{p_k} \trianglelefteq G$$

于是

$$G = G_{p_1} \times \cdots \times G_{p_{m-1}} \times G_{p_m}[(G_{p_{m+1}} \times \cdots \times G_{p_{k-1}})(G_{p_k} \times \cdots \times G_{p_s})]$$

则G的导长最多是5.

综上所述，G的导长最多是5.

参考文献：

[1] ZASSENHUAS H A. A Group-Theoretic Proof of a Theorem of Maclagan-Wedderdum [J]. Proc Clasgow Math Assoc，1952(1)：53－63.

[2] MIYAMATO M. Solvability of Some Groups [J]. Hokkaido Math，1982，11：106－110.

[3] 徐明耀. 有限群导引 [M]. 2 版. 北京：科学出版社，2001.

[4] 赵　冲，吕　恒. 非循环子群的共轭类个数为 7 的有限幂零群 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2015，37(10)：89－92.

[5] 王丽丽，陈贵云，王爱法. 某些子群的覆盖——远离性质有限群结构的影响 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2008，30(10)：1－6.

[6] 李　璇，郭秀云. 非极大交换子群皆正规的有限群 [J]. 应用数学与计算数学学报，2012，26(1)：121－126.

[7] 曹建基. 非正规循环子群的正规化子皆极大的有限群 [D]. 上海：上海大学，2014.

[8] BERKOVICH Y，JANKO Z. Groups of Prime Power Order [M]. Berlin：Walter de Gruyter，2011.

[9] 韩章家，陈　晨，张志让. 有限群的 WSC -子群与 p -幂零性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2014，39(2)：1－3.

Finite Groups with Maximal Normalizers

JIAN　Xiang，　LV　Heng

School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：A finite group G is called a NP-group if there is a prime number p such that $|G:N_G(A)|\,\big|\,p$ for every non-normal cyclic subgroup A of G. It proved that a finite NP-group has a Sylow Tower and its derived length is at most 5.

Key words：soluble groups；p-groups；Sylow Tower；normalizer

责任编辑　廖　坤