

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2017.01.013

具有隐藏吸引子的三维 Jerk 系统的动力学分析与周期解^①

王震¹, 蔺小林²

1. 西京学院 应用理学系, 西安 710123; 2. 陕西科技大学 理学院, 西安 710021

摘要: 数值分析了一类具隐藏吸引子的三维 Jerk 系统在不同参数条件下的周期 1、周期 2、混沌吸引子、Lyapunov 指数谱、分叉等, 并运用 Poincare 紧致化理论对系统的无穷远动力学进行了分析, 通过零倾线给出了系统在无穷远点处的局部动力学行为. 同时, 运用平均化方法和等时系统扰动理论, 定性分析并计算了系统的解析周期解. 最后通过数值实验, 对平均化方法所得解析周期解与 Rong-Kutta 方法所得数值解进行了仿真, 验证了文中理论分析的正确性.

关键词: Jerk 系统; 隐藏吸引子; 周期解

中图分类号: O175.12; O193

文献标志码: A

文章编号: 1673-9868(2017)01-0083-09

自 1963 年 Lorenz^[1] 提出第一个三维自治混沌系统以来, 大量三维混沌系统被构造^[2-5], 这些系统的研究也激发了人们对 Lorenz 类系统的探讨. 由于平面自治系统不可能产生混沌, 而在自治系统中出现混沌至少是三维, 因此, 在对混沌机理讨论过程中, 三维二次自治系统的研究对揭示混沌的产生机理具有特别重要的意义. 对于 Lorenz 类的系统, 其混沌判定的定性准则主要是通过 Shilnikov 定理^[6-7] 来进行, 且要求至少具有一个不稳定的双曲平衡点(鞍焦型), 然而 Shilnikov 定理只是混沌产生的充分条件, 而非必要条件, 这样对于具有稳定平衡点甚至是没有平衡点或者有无穷多平衡点的系统, 在远离平衡点处是否会产生混沌就成为一个新的课题, 同时其系统的全局动力学行为等相关问题也会成为数学工作者和工程技术人员面临的一个重要挑战, 而且, 这些研究无论是对混沌理论或者是混沌应用都至关重要. 近几年新的混沌系统不断被提出^[5-15], 然而这些系统几乎都是通过计算机数值仿真对系统的 Lyapunov 指数、分岔图、平衡点稳定性等进行分析, 其全局动力学行为以及系统的各类分岔行为、周期行为等并没有得到深入的理论分析. 为了定性研究此类系统的内部结构以及动力学行为, 本文在给出一类具有隐藏吸引子的三维 Jerk 混沌系统

$$\dot{x} = y, \dot{y} = z, \dot{z} = -ax - by - cz + ez^2 - fxy - gxz - hzy \quad (1)$$

的基础上, 首先通过数值仿真对其基本动力学进行分析, 进而运用 Poincare 紧致化理论对系统(1)的无穷远动力学进行分析, 同时运用平均方法, 采用扰动理论对系统(1)的周期解进行定性分析, 并运用数值仿真进行了验证.

1 隐藏吸引子

1.1 平衡点与稳定性

令 $\dot{x} = 0, \dot{y} = 0, \dot{z} = 0$, 系统(1)仅有一个平衡点 $O(0, 0, 0)$, 且在 O 处的 Jacobian 矩阵的特征多项式为 $f(\lambda) = \lambda^3 + c\lambda^2 + b\lambda + a$, 根据 Routh-Hurwitz 准则可知当 $c > 0, a > 0$ 且 $bc - a > 0$ 时, 特征方程有 3 个负实部根, 因此系统零平衡点为稳定结点或者为稳定结焦点; 当 $c > 0, a > 0$ 且 $bc - a < 0$ 时, 零平衡点为鞍焦点.

1.2 混沌与复杂性

为了能够研究系统(1)的复杂动力学行为, 运用数值方法对系统在不同参数条件下的动力学行为进行了分析(表 1), 相应得到了单周期吸引子、双周期吸引子和混沌吸引子(图 1), 同时给出了各参数条件下的

① 收稿日期: 2015-09-16

基金项目: 国家自然科学基金项目(NSFC61473237); 陕西省自然科学基金研究计划项目(2016JM1024); 陕西省教育厅科研计划项目(15JK2181); 西京学院科研基金项目(XJ160142).

作者简介: 王震(1981-), 男, 陕西合阳人, 副教授, 主要从事常微分方程与动力系统的研究.

Lyapunov 指数谱图及相应的最大 Lyapunov 指数图(图 2、图 3)。图 4 给出了在参数 $b=0.6, c=2, e=1, f=0.4, g=h=0$ 下, 系统(1) 关于参数 a 的分叉图。

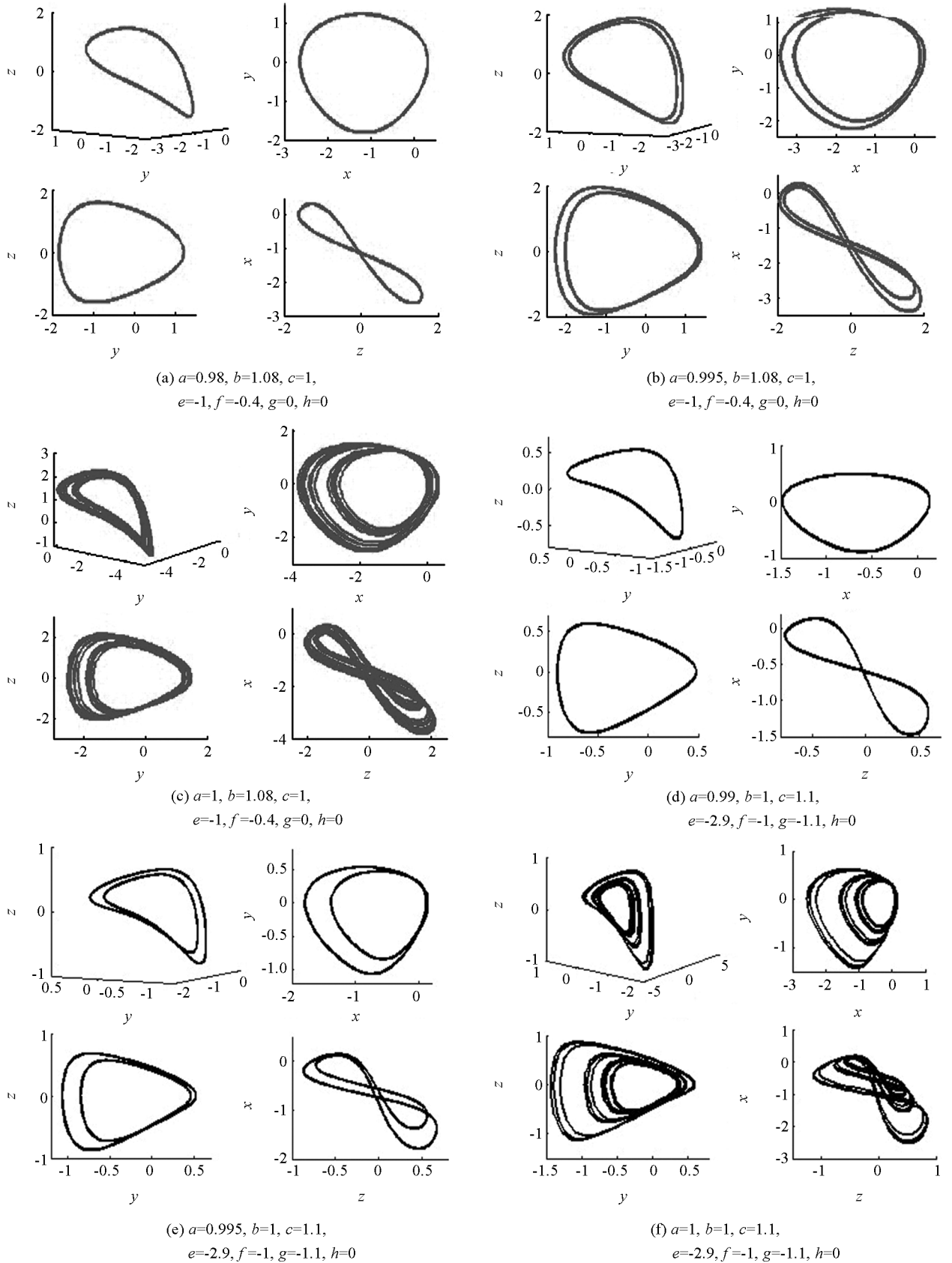
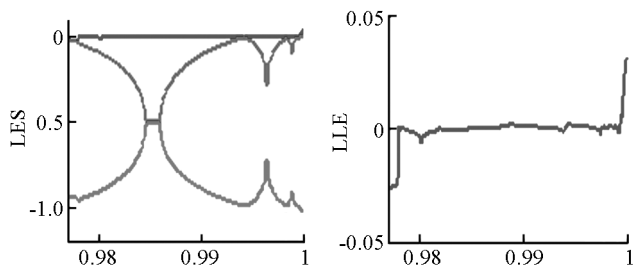


图 1 系统 (1) 在不同参数下的相图

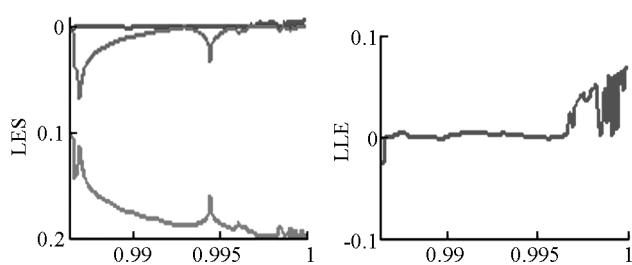
表 1 不同参数条件下系统(1) 的动力学行为

参 数 值	吸引子	Lyapunov 指数	相图
$a = 0.98, b = 1.08, c = 1, e = -1, f = -0.4, g = 0, h = 0$	周期 1	$[0, -0.09, -0.91]$	图 1(a)
$a = 0.995, b = 1.08, c = 1, e = -1, f = -0.4, g = 0, h = 0$	周期 2	$[0, -0.03, -0.98]$	图 1(b)
$a = 1, b = 1.08, c = 1, e = -1, f = -0.4, g = 0, h = 0$	混沌	$[0.03, 0, -1.03]$	图 1(c)
$a = 0.99, b = 1, c = 1.1, e = -2.9, f = -1, g = -1.1, h = 0$	周期 1	$[0, -0.09, -1.76]$	图 1(d)
$a = 0.995, b = 1, c = 1.1, e = -2.9, f = -1, g = -1.1, h = 0$	周期 2	$[0, -0.06, -1.86]$	图 1(e)
$a = 1, b = 1, c = 1.1, e = -2.9, f = -1, g = -1.1, h = 0$	混沌	$[0.07, 0, -1.98]$	图 1(f)



(a) Lyapunov 指数谱图 (b) 最大 Lyapunov 指数

图 2 $b = 1.08, c = 1, e = -1, f = -0.4, g = 0, h = 0$ 时系统(1) 的 Lyapunov 指数谱图及最大 Lyapunov 指数



(a) Lyapunov 指数谱图 (b) 最大 Lyapunov 指数

图 3 $b = 1, c = 1.1, e = -2.9, f = -1, g = -1.1, h = 0$ 时系统(1) 的 Lyapunov 指数谱图及最大 Lyapunov 指数

2 无穷远动力学

为了能够了解系统(1) 的全局结构, 运用三维空间 Poincare 紧致化理论^[16] 来研究系统(1) 的无穷远动力学行为. 在 \mathbb{R}^4 中取单位 Poincare 球

$$S^3 = \{r = (r_1, r_2, r_3, r_4) \in \mathbb{R}^4 \mid \|r\| = 1\}$$

且令

$$S_+ = \{r \in S^3, r_4 > 0\}$$

和

$$S_- = \{r \in S^3, r_4 < 0\}$$

分别为北半球和南半球, 定义在点 $(\pm 1, 0, 0, 0), (0, \pm 1, 0, 0), (0, 0, \pm 1, 0), (0, 0, 0, \pm 1)$ 处的正切超平面为 U_i, V_i , 其中

$$U_i = \{r \in S^3, r_i > 0\}$$

$$V_i = \{r \in S^3, r_i < 0\} \quad i = 1, 2, 3, 4$$

为了得到在 x, y, z 无穷远处的动力学行为, 我们仅需要考虑在超平面 $U_i, V_i (i = 1, 2, 3)$ 上的动力学即可.

2.1 超平面 U_1 和 V_1 上的动力学

令

$$(x, y, z) = (\omega^{-1}, u\omega^{-1}, v\omega^{-1})$$

且 $t = \omega\tau$, 则系统(1) 变为

$$\frac{du}{d\tau} = -u^2\omega + \omega v$$

$$\frac{dv}{d\tau} = -uv\omega - a\omega - b\omega u - c\omega v + e v^2 - fu - gv - hu v, \quad \frac{d\omega}{d\tau} = -\omega^2 u \quad (2)$$

如果 $\omega = 0$, 则系统(2) 化为

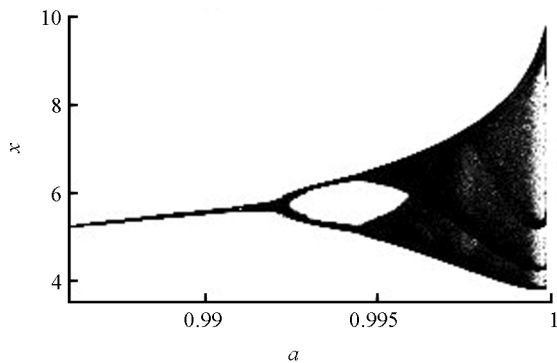


图 4 系统(1) 关于参数 a 的分叉图

$$\frac{du}{d\tau} = 0$$

$$\frac{dv}{d\tau} = ev^2 - fu - gv - huv \quad (3)$$

可以计算系统(3)过初值 $(u, v) = (u(0), v(0))$ 的解为

$$u = u(0), v = -\frac{1}{2e} \left(\tanh\left(\frac{P}{2}\tau - \operatorname{arctanh} \frac{2ev(0) - hu(0) - g}{P}\right) P - hu(0) - h \right)$$

其中

$$P = \sqrt{h^2 u(0)^2 + 4efu(0) + 2ghu(0) + g^2}$$

在平面 V_1 上的动力学行为和 U_1 上的动力学行为相同,方向反向.

2.2 超平面 U_2 和 V_2 上的动力学

令

$$(x, y, z) = (uw^{-1}, w^{-1}, vw^{-1})$$

且 $t = w\tau$,则系统(1)变为

$$\frac{du}{d\tau} = -uvw + w$$

$$\frac{dv}{d\tau} = -v^2w - awu - bw - cwv + ev^2 - fu - guv - hv$$

$$\frac{dw}{d\tau} = -w^2v \quad (4)$$

如果 $w = 0$,则系统(3)化为

$$\frac{du}{d\tau} = 0, \frac{dv}{d\tau} = ev^2 - fu - guv - hv \quad (5)$$

可以计算系统(5)过初值 $(u, v) = (u(0), v(0))$ 的解为

$$u = u(0)$$

$$v = -\frac{1}{2e} \left(\tanh\left(\frac{Q}{2}\tau - \operatorname{arctanh} \frac{2ev(0) - gu(0) - h}{Q}\right) Q - gu(0) - h \right)$$

其中

$$Q = \sqrt{g^2 u(0)^2 + 4efu(0) + 2ghu(0) + h^2}$$

在平面 V_2 上的动力学行为和 U_2 上的动力学行为相同,方向反向.

2.3 超平面 U_3 和 V_3 上的动力学

令

$$(x, y, z) = (uw^{-1}, vw^{-1}, w^{-1})$$

且 $t = w\tau$,则系统(1)变为

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = au^2w + buvw + cuw - eu + fu^2v + gu^2 + huv + w \\ \frac{dv}{d\tau} = avrw + bv^2w + cvw - ev + fuv^2 + guv + hv^2 + w \\ \frac{dw}{d\tau} = auw^2 + bv^2w + cw^2 - ew + fuvw + guw + hvw \end{cases} \quad (6)$$

如果 $w = 0$,则系统(6)化为

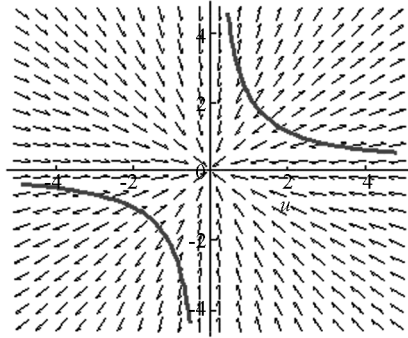
$$\frac{du}{d\tau} = -eu + fu^2v + gu^2 + huv, \frac{dv}{d\tau} = -ev + fuv^2 + guv + hv^2 \quad (7)$$

显然,当 $e > 0$ 时,平衡点 $O(0, 0)$ 为稳定结点,当 $e < 0$ 时, $O(0, 0)$ 为不稳定结点.同时取不同参数 e, f, g, h ,运用零倾线分析方法^[17],其动力学行为见表2及图10-13.在平面 V_3 上的动力学行为和 U_3 上

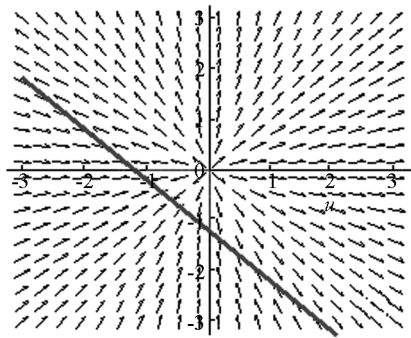
的动力学行为相同, 方向反向.

表 2 不同参数条件下系统(7) 的动力学行为

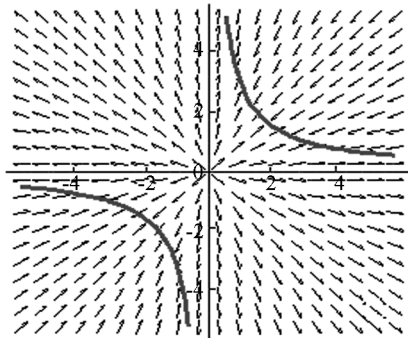
参 数 值	平衡点	奇线	相图
$e = 1, f = 0.4, g = 0, h = 0$	$(0, 0)$	$2uv = 5$	图 5(a)
$e = -1.2, f = 0, g = 1, h = 1$	$(0, 0)$	$5(u + v) + 6 = 0$	图 5(b)
$e = -1, f = -0.4, g = 0, h = 0$	$(0, 0)$	$2uv = 5$	图 5(c)
$e = -2.9, f = -1, g = -1.1, h = 0$	$(0, 0)$	$10uv + 11u - 29 = 0$	图 5(d)



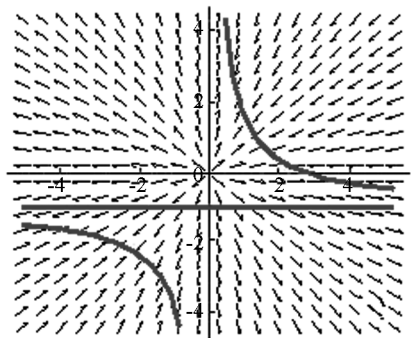
(a) $e=1, f=0.4, g=0, h=0$



(b) $e=-1.2, f=0, g=1, h=1$



(c) $e=-1, f=-0.4, g=0, h=0$



(d) $e=-2.9, f=-1, g=-1.1, h=0$

图 5 系统(7) 的局部相图

3 周期解

从图 3 可以看到, 当参数 a 变换时, 系统(1) 会产生周期轨道, 同时从特征方程可以看到, 当参数 $a = c = 0, b > 0$ 时, 系统会出现零特征及纯虚特征根, 即系统(1) 会发生 Zero-Hopf 分叉, 且为了定性分析极限环的出现, 本节拟采用平均化方法^[18] 进行周期轨道分析, 并定性分析出周期解的表达式, 为此首先介绍等时系统扰动理论^[19].

引理 1^[19] 考虑微分方程

$$\dot{x} = F_0(t, x) + \epsilon F_1(t, x) + \epsilon^2 F_2(t, x) \tag{8}$$

其中: $(t, x, \epsilon) \in \mathbb{R} \times \Omega \times (-\epsilon_0, \epsilon_0), \Omega$ 是 \mathbb{R}^n 中的一个开集; F_0, F_1, F_2 是 C^2 光滑且关于时间 t 的周期为 T 的函数. 令 $x(t, z)$ 是(8) 式的解, 且当 $\epsilon = 0$ 时, 有 $x(0, z) = z$. 记 $M_z(t)$ 是变分方程 $\dot{y} = D_x F_0(t, x(t, z))y$ 的基解矩阵, 且 $M_z(0)$ 是单位矩阵. 假设存在一个有界开子集 V 及其闭包 $\text{cl}(V) \subset \Omega$, 对于任意 $z \in \text{cl}(V)$, 解 $x(t, z)$ 是 T 周期的. 如果 $a \in V$ 是映射 $F: \text{cl}(V) \rightarrow \mathbb{R}^n$ 的简单零点, 即 $F(a) = 0, \det(D_x F(a)) \neq 0$, 其中

$$F(z) = \int_0^T M_z^{-1}(t) F_1(t, x(t, z)) dt$$

则对于充分小 $|\epsilon| > 0$, 系统(8) 有 T 周期解 $\varphi(t, \epsilon)$ 满足 $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \varphi(0, \epsilon) = a$.

定理 1 当参数 $a = c = 0, b > 0$ 时, 系统(1) 在零平衡点处发生 Zero-Hopf 分叉, 且对于充分小的 $a > 0, c > 0$, 系统(1) 分支出的周期解可解析表示为

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{a - bc}{bg} - \frac{\sqrt{2}}{b} \sqrt{\frac{a(a - bc)}{g(g + be)}} \cos t \\y(t) &= \sqrt{2} \sqrt{\frac{a(a - bc)}{bg(g + be)}} \sin t \\z(t) &= \sqrt{2} \sqrt{\frac{a(a - bc)}{bg(g + be)}} \cos t\end{aligned}$$

证 对于任意 $\varepsilon \neq 0$, 做变量变换 $x = \varepsilon \tilde{x}, y = \varepsilon \tilde{y}, z = \varepsilon \sqrt{b} \tilde{z}, a = \varepsilon \tilde{a}, c = \varepsilon \tilde{c}$, 则系统(1) 可变为

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= \tilde{y} \\ \dot{\tilde{y}} &= \sqrt{b} \tilde{z}, \quad \dot{\tilde{z}} = -\frac{\varepsilon \tilde{a}}{\sqrt{b}} \tilde{x} - \sqrt{b} \tilde{y} - \varepsilon \tilde{c} \tilde{z} + \varepsilon e \sqrt{b} \tilde{z}^2 - \frac{\varepsilon f}{\sqrt{b}} \tilde{x} \tilde{y} - \varepsilon g \tilde{x} \tilde{z} - \varepsilon h \tilde{y} \tilde{z}\end{aligned}\quad (9)$$

令 $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \rightarrow (\tilde{x}, r \sin \theta, r \cos \theta)$, 则系统(9) 可化为

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= r \sin \theta & \dot{r} &= C_1 \varepsilon & \dot{\theta} &= \sqrt{b} + C_2 \varepsilon\end{aligned}\quad (10)$$

其中

$$\begin{aligned}C_1 &= -\frac{\tilde{a}}{\sqrt{b}} \tilde{x} \cos \theta - \tilde{c} r \cos^2 \theta + e \sqrt{b} r^2 \cos^3 \theta - \frac{f}{\sqrt{b}} \tilde{x} r \sin \theta \cos \theta - g \tilde{x} r \cos^2 \theta - h r^2 \sin \theta \cos^2 \theta \\ C_2 &= \frac{\tilde{a}}{\sqrt{b}} \frac{\tilde{x}}{r} \sin \theta + \tilde{c} \cos \theta \sin \theta - e r \sqrt{b} \sin \theta \cos^2 \theta + \frac{f}{\sqrt{b}} \tilde{x} \sin^2 \theta + g \tilde{x} \sin \theta \cos \theta + h r \sin^2 \theta \cos \theta\end{aligned}$$

进而可以转化为二维系统

$$\frac{d\tilde{x}}{d\theta} = \frac{r}{\sqrt{b}} \sin \theta - \varepsilon C_2 \frac{r}{b} \sin \theta + \varepsilon^2 f_1, \quad \frac{dr}{d\theta} = \varepsilon C_1 \frac{1}{\sqrt{b}} + \varepsilon^2 f_2\quad (11)$$

其中 f_1, f_2 是两个解析函数.

对于任意初值 \tilde{x}_0, r_0 , 系统(11) $_{\varepsilon=0}$ 有周期为 2π 的周期解

$$\tilde{x}(\theta) = \frac{r_0}{\sqrt{b}} + \tilde{x}_0 - \frac{r_0}{\sqrt{b}} \cos \theta \quad r = r_0\quad (12)$$

显然系统(11) $_{\varepsilon=0}$ 沿着解(12) 的变分方程为

$$\begin{pmatrix} \frac{dy_1}{d\theta} \\ \frac{dy_2}{d\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{b}} \sin \theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\quad (13)$$

时变系统(13) 有基解矩阵

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{b}} \cos \theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

根据引理 1 有

$$F(\tilde{x}_0, r_0) = \int_0^{2\pi} \mathbf{M}^{-1} \begin{pmatrix} -C_2 \frac{r}{b} \sin \theta \\ C_1 \frac{1}{\sqrt{b}} \end{pmatrix} \Big|_{(12)} d\theta = \begin{pmatrix} g_1(\tilde{x}_0, r_0) \\ g_2(\tilde{x}_0, r_0) \end{pmatrix}$$

其中

$$g_1(\tilde{x}_0, r_0) = \frac{\pi}{b}(gr_0\tilde{x}_0 + \frac{2}{\sqrt{b}}gr_0^2 + cr_0 + e\sqrt{b}r_0^2 - \frac{3}{b}ar_0 - \frac{2}{\sqrt{b}}a\tilde{x}_0)$$

$$g_2(\tilde{x}_0, r_0) = \frac{\pi}{b}r_0(\frac{a}{\sqrt{b}} - c\sqrt{b} - g\sqrt{b}\tilde{x}_0 - gr_0)$$

令

$$F(\tilde{x}_0, r_0) = 0$$

有

$$\tilde{x}_0 = \frac{a}{bg} - \frac{c}{g} - \frac{\sqrt{2}}{b} \sqrt{\frac{a(a-bc)}{g(g+be)}}$$

$$r_0 = \sqrt{2} \sqrt{\frac{a(a-bc)}{bg(g+be)}} \quad (14)$$

由于

$$DF(\tilde{x}_0, r_0) |_{(14)} \neq 0$$

则由引理 1 知, 对于充分小的 $|\varepsilon| > 0$, 系统(11) 有周期为 2π 的周期解 $(\tilde{x}(\theta), r(\theta))$, 且当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时,

$$(\tilde{x}(0), r(0)) \rightarrow (\tilde{x}_0, r_0)$$

故系统(1) 有近似周期解为

$$x(t) = \frac{a-bc}{bg} - \frac{\sqrt{2}}{b} \sqrt{\frac{a(a-bc)}{g(g+be)}} \cos t$$

$$y(t) = \sqrt{2} \sqrt{\frac{a(a-bc)}{bg(g+be)}} \sin t$$

$$z(t) = \sqrt{2} \sqrt{\frac{a(a-bc)}{bg(g+be)}} \cos t \quad (15)$$

证毕.

4 数值仿真

为了验证本文所给出周期解的定性表示, 令 $a = 0.05$, $b = 1$, $c = 0.05001$, $e = -1.2$, $f = 0$, $g = 1$, $h = 1$, 则根据式(15) 有系统(1) 的周期解为

$$x(t) = -2.2461 \times 10^{-3} \cos t$$

$$y(t) = 2.2361 \times 10^{-3} \sin t$$

$$z(t) = 2.2361 \times 10^{-3} \cos t \quad (16)$$

取初值 $(x_0, y_0, z_0) = (-2.2461 \times 10^{-3}, 0, 2.2361 \times 10^{-3})$, 则运用 Rong-Kutta 方法和平均化方法, 即式(16), 计算的周期解见图 6, 其误差曲线见图 7, 且平均相对误差为 0.022357%.

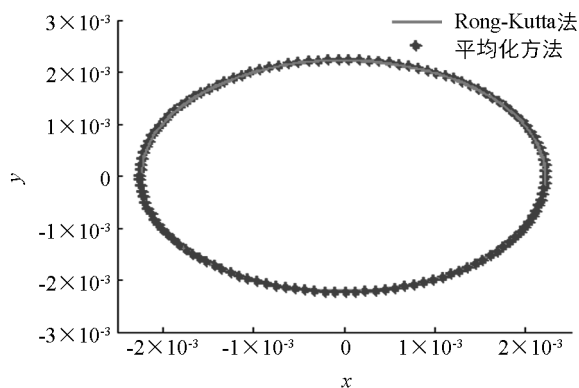


图 6 系统(1) 在 Rong-Kutta 方法和平均化方法下的周期解

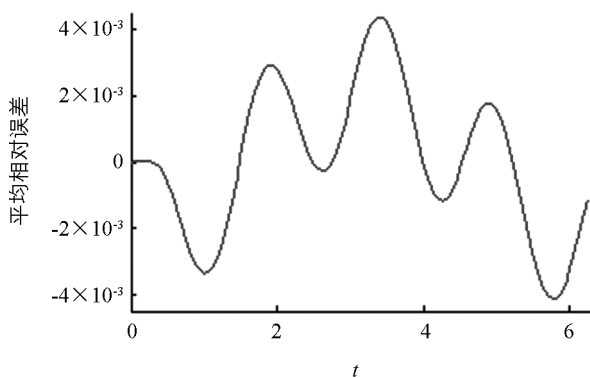


图 7 Rong-Kutta 方法和平均化方法下的周期解的误差曲线

5 结 论

本文首先通过数值理论, 计算并分析了一类具有隐藏吸引子的三维 Jerk 系统的基本动力学行为, 包括周期 1 吸引子, 周期 2 吸引子, 混沌吸引子, Lyapunov 指数谱和系统关于参数 a 的分叉等, 进而运用三维空间多项式向量场 Poincare 紧致化理论, 定性分析了三维 Jerk 系统的无穷远点动力学行为, 同时为了研究系统在参数 a, c 扰动下的周期解, 运用平均化方法和等时系统扰动理论, 定性计算了系统(1)的周期解, 并通过数值仿真进行了实验, 验证了理论分析的正确性. 根据数值仿真, 可以看到运用平均化方法所得解析周期解与 Rong-Kutta 方法所得数值解基本一致. 当然还可以继续分析该系统的分叉动力学行为等, 虽然本文也已经提及 Zero-Hopf 分叉, 然限于篇幅, 对系统的分叉规范型等的深入讨论此处从略.

参考文献:

- [1] LORENZ E N. Deterministic Nonperiodic Flow [J]. Journal of The Atmospheric Sciences, 1963, 20(2): 130–141.
- [2] Chen G R, Ueta T. Yet Another Chaotic Attractor [J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 1999, 9(7): 1465–1466.
- [3] LÜ J H, CHEN GR. A New Chaotic Attractor Coined, International Journal of Bifurcation and Chaos, 2002, 12(3): 659–661.
- [4] TIGAN G. Analysis of A Dynamical System Derived From the Lorenz System [J]. Scientific Bulletin of the Politehnica University of Timisoara, 2005, 50(64): 61–72.
- [5] YANG Q G, CHEN G R. A Chaotic System with One Saddle and Two Stable Node-Foci [J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2008, 18(5): 1393–1414.
- [6] SHIL'NIKOV L P. A Case of the Existence of a Countable Number of Periodic Motions [J]. Soviet Mathematics, 1965, 6: 163–166.
- [7] SHIL'NIKOV L P. A Contribution to the Problem of the Structure of an Extended Neighborhood of a Rough Equilibrium State of Saddle-Focus Type [J]. Mathematics, 1970, 10(1): 91–102.
- [8] YANG Q G, WEI Z C, CHEN G R. An Unusual 3d Autonomous Quadratic Chaotic System with Two Stable Node-Foci [J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2010, 20(4): 1061–1083.
- [9] LEONOV G A, KUZNETSOV N V, VAGAITSEV V I. Localization of Hidden Chua's Attractors [J]. Physics Letters A, 2011, 375 (23): 2230–2233.
- [10] LEONOV G A, KUZNETSOV N V, VAGAITSE V I. Hidden Attractor in Smooth Chua Systems [J]. Physica D, 2012, 241(18): 1482–1486.
- [11] LEONOV G A, KUZNETSOV N V. Prediction of Hidden Oscillations Existence in Nonlinear Dynamical Systems: Analytics and Simulation [J]. Advances in Intelligent Systems and Computing, 2013, 210: 5–13.
- [12] WANG X, CHEN, G R. A Chaotic System with Only One Stable Equilibrium [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2012, 17(3): 1264–1272.
- [13] WANG X, CHEN G R. Constructing a Chaotic System with Any Number of Equilibria [J]. Nonlinear Dynamics, 2013, 71(3): 429–436.
- [14] JAFARI S, SPOTT J C. Simple Chaotic Flows with a Line Equilibrium [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2013, 57(12): 79–84.
- [15] JAFARI S, SPOTT J C, Golpayegani S. Elementary Quadratic Chaotic Flows with No Equilibria [J]. Physics Letters A, 2013, 377(9): 699–702.
- [16] DUMORTIER F, LLIBRE J, ARTES J C. Qualitative Theory of Planar Differential Systems [M]. Berlin: Springer, 2006: 149–164.

- [17] ROBINSON R C. An Introduction to Dynamical Systems: Continuous and Discrete [M]. New York: American Mathematical Society, 2012: 99–146.
- [18] GUCKENHEIMER J, HOLMES P. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields [M]. Berlin: Springer, 2002.
- [19] BUIC A, FRANCOISE J P, LLIBRE J. Periodic Solutions of Nonlinear Periodic Differential Systems with a Small Parameter [J]. Communications on Pure and Applied Analysis, 2007, 6(1): 103–111.

Dynamics Analysis and Periodic Solution of a 3D Jerk System with Hidden Attractor

WANG Zhen¹, LIN Xiao-lin²

1. Department of Applied Science, Xijing University, Xi'an 710123, China;

2. College of Science, Shaanxi University of Science and Technology, Xi'an 710021, China

Abstract: Basic dynamics such as period one attractor, period two attractor, chaotic attractor, Lyapunov exponent spectrum and bifurcation for a 3D Jerk system with hidden attractor were studied in this paper by using numerical methods. Also, by using the Poincare compactification of polynomial vector field in \mathbb{R}^3 , the dynamics near infinite singularities were obtained. Furthermore, the local phase portraits of the infinite singularities were obtained by using acclinic line. Moreover, in accordance with the theory of average and perturbation of isochronous system, the analytic periodic solution of this system were analyzed and obtained. The simulation results demonstrate the correctness of the dynamics analysis and periodic solution computation and verified by Rong-Kutta method.

Key words: Jerk system; hidden attractor; periodic solution

责任编辑 张 桢

