DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2017.01.014

求解线性规划的宽邻域不可行内点算法[①]

杨喜美，　张因奎，　裴永刚

河南师范大学 数学与信息科学学院，河南 新乡 453007

摘要：提出了一个求解线性规划的不可行内点算法. 该算法的特点是：一方面使用了宽邻域，因此数值实验表明具有较好的计算效果；另一方面，通过分析获得它的多项式复杂度为 $O(n^{1.5}L)$，这是宽邻域不可行内点算法的最好复杂度.

关　键　词：线性规划；不可行内点算法；宽邻域；多项式复杂度

中图分类号：**O221.1**　　**文献标志码**：**A**　　**文章编号**：1673－9868(2017)01－0092－07

从 1984 年，Karmarkar[1] 提出内点算法以来，内点算法的研究一直是一个热门的课题. 随着研究的不断深入，研究者提出了许多不同类型的内点算法. 从初始点的选取不同可分为：可行内点算法和不可行内点算法. 不可行内点算法的优势是：不要求初始点严格可行，仅要求在非负象限的内部. 由于这种类型的点容易获得，故在实际计算中显得尤为重要.

Lustig[2] 首次提出了不可行内点算法，随后 Masakazu[3] 提出了原始-对偶不可行内点算法. 这些早期的著作均没有给出不可行内点算法的多项式复杂度，直到 Zhang[4] 给出了第一个具有多项式复杂度 $O(n^2L)$ 的不可行算法，然而，这个算法的复杂度较高. 为了降低复杂度，众多学者做了大量研究工作[5-10]. 目前，不可行内点算法的最低复杂度为 $O(nL)$，这一结果仅对窄邻域不可行内点算法成立，并且窄邻域不可行内点算法的一般复杂度为 $O(n^{1.5}L)$. 对宽邻域而言一般算法的复杂度为 $O(n^2L)$，目前最低复杂度为 $O(n^{1.5}L)$.

本文将给出一个复杂度为 $O(n^{1.5}L)$ 的宽邻域不可行内点算法，该算法迭代在 Ai[11] 等提出的宽邻域内. 最后，通过数值试验说明该算法是有效的.

本文中：$\boldsymbol{e}$ 表示分量全为 1 的列向量；$\|\cdot\|$ 表示向量的 2-范数. 对于向量 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{s}\in\mathbb{R}^n$，$\boldsymbol{xs}\in\mathbb{R}^n$ 表示对应分量的乘，$(\boldsymbol{xs})_{\min}$ 表示 $\boldsymbol{xs}\in\mathbb{R}^n$ 的最小分量；让 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{x}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{s}^{\frac{1}{2}}$，$\tilde{\boldsymbol{r}}=(\boldsymbol{xs})^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{r}$；另外，对于 $\boldsymbol{h}\in\mathbb{R}^n$，我们记：$\boldsymbol{h}^+=\max\{\boldsymbol{0},\boldsymbol{h}\}$ 和 $\boldsymbol{h}^-=\boldsymbol{h}-\boldsymbol{h}^+$.

1　预备知识

本文将研究标准形式的原始-对偶线性规划：

$$(\mathrm{P})\ \min\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x},\ \mathrm{s.\ t.}\ \boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}$$

$$(\mathrm{D})\ \max\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y},\ \mathrm{s.\ t.}\ \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{s}=\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{s}\geqslant\boldsymbol{0}$$

其中：$\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}$；$\boldsymbol{c},\boldsymbol{x},\boldsymbol{s}\in\mathbb{R}^n$；$\boldsymbol{b},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m$.

为获得(P)和(D)的近似解，一般将原始-对偶线性规划转化为扰动系统：

---

① 收稿日期：2015－08－28

基金项目：国家自然科学基金项目(61179040；11501180)；中国博士后基金项目(2016M590346)；河南师范大学博士启动基金项目(qd14150)；河南师范大学青年基金(2014QK03).

作者简介：杨喜美(1982－)，女，河南周口人，讲师，博士，主要从事最优化理论与算法的研究.

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{s}=\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{s}\geqslant\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{xs}=\boldsymbol{\mu e} \tag{1}$$

如果(P)和(D)的严格可行集

$$F^0=\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{s})\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n:\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{s}=\boldsymbol{c},\ (\boldsymbol{x},\boldsymbol{s})>\boldsymbol{0}\}\neq\phi$$

并且 $\boldsymbol{A}$ 行满秩,即 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})=m$,则(1)式存在唯一解.原始-对偶内点算法的基本思想是用Newton方法求解(1)式,逐渐减小 μ,并使得迭代点列包含在中心路径的某个邻域内,最终得到满足允许精度的最优解.本文假设 $F^0\neq\phi$ 且 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})=m$.

下面给出求解迭代方向$(\boldsymbol{\Delta x},\boldsymbol{\Delta y},\boldsymbol{\Delta s})$的方程如下:

$$\boldsymbol{A\Delta x}=\boldsymbol{r}_p,\ \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Delta y}+\boldsymbol{\Delta s}=\boldsymbol{r}_d,\ \boldsymbol{s\Delta x}+\boldsymbol{x\Delta s}=\boldsymbol{r}_c \tag{2}$$

其中:

$$\boldsymbol{r}_p=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{Ax},\ \boldsymbol{r}_d=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{s}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{r}_c=(\boldsymbol{\tau\mu e}-\boldsymbol{xs})^-+\sqrt{n}(\boldsymbol{\tau\mu e}-\boldsymbol{xs})^+,\ \boldsymbol{\mu}=\frac{1}{n}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}$$

设 α 表示沿方向$(\boldsymbol{\Delta x},\boldsymbol{\Delta y},\boldsymbol{\Delta s})$的步长,则新的迭代为:

$$(\boldsymbol{x}(\alpha),\boldsymbol{y}(\alpha),\boldsymbol{s}(\alpha)):=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{s})+\alpha(\boldsymbol{\Delta x},\boldsymbol{\Delta y},\boldsymbol{\Delta s})$$

直接计算,可得下列常用结果:

$$\boldsymbol{x}(\alpha)\boldsymbol{s}(\alpha)=\boldsymbol{xs}+\alpha[(\boldsymbol{\tau\mu e}-\boldsymbol{xs})^-+\sqrt{n}(\boldsymbol{\tau\mu e}-\boldsymbol{xs})^+]+\alpha^2\boldsymbol{\Delta x\Delta s} \tag{3}$$

$$\mu(\alpha)=\frac{1}{n}\boldsymbol{x}(\alpha)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}(\alpha)=\frac{1}{n}[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}+\alpha\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_c+\alpha^2(\boldsymbol{\Delta x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Delta s}]=$$

$$[1-(1-\tau)\alpha]\mu+\frac{\sqrt{n}-1}{n}\alpha\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\tau\mu e}-\boldsymbol{xs})^++\frac{1}{n}\alpha^2(\boldsymbol{\Delta x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Delta s} \tag{4}$$

本文将限制中心路径在宽邻域 $\mathcal{N}(\tau,\beta)$ 内,其中 $\beta\leqslant\frac{1}{2}$,$\tau\leqslant\frac{1}{4}$ 是邻域参数并且

$$\mathcal{N}(\tau,\beta):=\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s})>0:\ \|(\boldsymbol{\tau\mu e}-\boldsymbol{xs})^+\|\leqslant\beta\tau\mu\} \tag{5}$$

另外,由(5)式易知:

$$(\boldsymbol{xs})_{\min}\geqslant(1-\beta)\tau\mu$$

最后,本文通过下列方法计算最大步长 $\tilde{\alpha}$:

$$\alpha_f=\max\{\alpha:\boldsymbol{x}(\alpha)^{\mathrm{T}}s(\alpha)\geqslant(1-\alpha)\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}s,\ \forall\alpha\in[0,1]\} \tag{6}$$

$$\tilde{\alpha}=\max\{\alpha:(\boldsymbol{x}(\alpha),\boldsymbol{y}(\alpha),\boldsymbol{s}(\alpha))\in\mathcal{N}(\tau,\beta),\ \forall\alpha\in[0,\alpha_f]\} \tag{7}$$

2 算法框架

在前面准备工作的基础上,给出不可行内点算法的一般框架,如下:

初始化:$\beta\leqslant\frac{1}{2}$,$\tau\leqslant\frac{1}{4}$,$(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{y}^0,\boldsymbol{s}^0)\in\mathcal{N}(\tau,\beta)$,$\mu^0=\frac{1}{n}(\boldsymbol{x}^0)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}^0$.置 $k:=0$.

步骤1 如果$(\boldsymbol{x}^k)^{\mathrm{T}}s^k\leqslant\varepsilon(\boldsymbol{x}^0)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}^0$,终止.

步骤2 通过解方程组(2)获得方向$(\boldsymbol{\Delta x},\boldsymbol{\Delta y},\boldsymbol{\Delta s})$,并通过(7)式计算步长 $\tilde{\alpha}^k$.令

$$(\boldsymbol{x}^{k+1},\boldsymbol{y}^{k+1},\boldsymbol{s}^{k+1})=(\boldsymbol{x}(\tilde{\alpha}^k),\boldsymbol{y}(\tilde{\alpha}^k),\boldsymbol{s}(\tilde{\alpha}^k))$$

步骤3 计算 $\mu^{k+1}=\frac{1}{n}(\boldsymbol{x}^{k+1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}^{k+1}$,并置 $k:=k+1$,转到步骤1.

给出下面关于本文算法的两点说明对分析算法的复杂度至关重要.

注1 若$\{(\boldsymbol{x}^k,\boldsymbol{y}^k,\boldsymbol{s}^k)\}$是上述算法产生的迭代序列,则对于 $k\geqslant 0$,有

$$\boldsymbol{Ax}^{k+1}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{v}^{k+1}(\boldsymbol{Ax}^0-\boldsymbol{b})\ 和\ \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}^{k+1}+\boldsymbol{s}^{k+1}-\boldsymbol{c}=\boldsymbol{v}^{k+1}(\boldsymbol{y}^0+\boldsymbol{s}^0-\boldsymbol{c})$$

其中

$$\boldsymbol{v}^0=1\qquad \boldsymbol{v}^{k+1}=(1-\tilde{\alpha}^k)\boldsymbol{v}^k=\prod_{i=0}^{k}(1-\tilde{\alpha}^i)\in(0,1]$$

从注1易知:

$$\boldsymbol{v}^k=\frac{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^k-\boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^0-\boldsymbol{b}\|}=\frac{\|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}^k+\boldsymbol{s}^k-\boldsymbol{c}\|}{\|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}^0+\boldsymbol{s}^0-\boldsymbol{c}\|}$$

这蕴含着 $\boldsymbol{v}^k$ 可以控制在点$(\boldsymbol{x}^k,\boldsymbol{y}^k,\boldsymbol{s}^k)$处的不可行性.

另外，由式(6)可得：

$$(\boldsymbol{x}^k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}^k\geqslant(1-\tilde{\alpha}^k)(\boldsymbol{x}^{k-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}^{k-1}\geqslant\boldsymbol{v}^k(\boldsymbol{x}^0)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}^0$$

这能够保证$(\boldsymbol{x}^k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}^k$ 小于收敛精度时，不可行也可以小于相同的精度，等价于：当$\frac{(\boldsymbol{x}^k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}^k}{(\boldsymbol{x}^0)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}^0}\leqslant\varepsilon$ 时，必有

$$\boldsymbol{v}^k\leqslant\frac{(\boldsymbol{x}^k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}^k}{(\boldsymbol{x}^0)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}^0}\leqslant\varepsilon \tag{8}$$

注 2 本文将选取与文献[12]中相同的初始点.

3 复杂性分析

引理 1[11] 若$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{s})\in\mathcal{N}(\tau,\beta)$，则

$$\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\tau\mu e}-\boldsymbol{xs})^{+}\leqslant\sqrt{n}\,\beta\tau\mu$$

引理 2[13] 若$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{s})\in\mathcal{N}(\tau,\beta)$，则

$$\|\tilde{\boldsymbol{r}}_c\|^2\leqslant(1+\beta\tau)n\mu$$

其中

$$\tilde{\boldsymbol{r}}_c=(\boldsymbol{xs})^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{r}_c$$

由于本文使用了与文献[12]相同的初始点，故使用同样的证明方法可得下面引理.

引理 3[12] 若$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{s})\in\mathcal{N}(\tau,\beta)$，$\boldsymbol{p}=(\boldsymbol{x}^{-1}\boldsymbol{s})^{\frac{1}{2}}$，则

$$\|\boldsymbol{\Delta x\Delta s}\|_1\leqslant\frac{1}{2}[\|\boldsymbol{p\Delta x}\|^2+\|\boldsymbol{p}^{-1}\boldsymbol{\Delta s}\|^2]\leqslant\frac{1}{2}\omega^2n^2\mu.$$

引理 4 若$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{s})\in\mathcal{N}(\tau,\beta)$，$\boldsymbol{p}=(\boldsymbol{x}^{-1}\boldsymbol{s})^{\frac{1}{2}}$，则

$$(\boldsymbol{\Delta x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Delta s}\leqslant\frac{1}{4}(1+\beta\tau)\mu n$$

证 在方程(2)的第三个等式两边同时乘以$(\boldsymbol{xs})^{-\frac{1}{2}}$，可得：

$$\|\tilde{\boldsymbol{r}}_c\|^2=\|\boldsymbol{p\Delta x}+\boldsymbol{p}^{-1}\boldsymbol{\Delta s}\|^2=\|\boldsymbol{p\Delta x}\|^2+\|\boldsymbol{p}^{-1}\boldsymbol{\Delta s}\|^2+2(\boldsymbol{\Delta x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Delta s}=$$
$$\|\boldsymbol{p\Delta x}-\boldsymbol{p}^{-1}\boldsymbol{\Delta s}\|^2+4(\boldsymbol{\Delta x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Delta s}\geqslant4(\boldsymbol{\Delta x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Delta s}$$

进一步，可得：

$$(\boldsymbol{\Delta x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Delta s}\leqslant\frac{1}{4}\|\tilde{\boldsymbol{r}}_c\|^2\leqslant\frac{1}{4}(1+\beta\tau)\mu n$$

其中第二个不等式使用了引理 2.

另外，使用引理 1 和引理 4 容易获得下面的引理.

引理 5 若$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{s})\in\mathcal{N}(\tau,\beta)$，则 $\mu(\alpha)$ 在区间[0，1]上是单调递减的.

证 对(4)式两边关于 α 求导可得：

$$\mu'(\alpha)=(\tau-1)\mu+\frac{\sqrt{n}-1}{n}e^{\mathrm{T}}(\tau\mu\boldsymbol{e}-\boldsymbol{xs})^{+}+\frac{2}{n}\alpha(\boldsymbol{\Delta x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Delta s}\leqslant$$
$$(\tau-1)\mu+\frac{\sqrt{n}-1}{n}\beta\tau\mu\sqrt{n}+\frac{2}{n}\alpha\ \frac{1}{4}(1+\beta\tau)\mu n\leqslant$$
$$(\tau-1)\mu+\beta\tau\mu+\frac{1}{2}(1+\beta\tau)\mu\leqslant$$
$$\left(\tau+\frac{3}{2}\beta\tau-\frac{1}{2}\right)\mu<0$$

这蕴含着 $\mu(\alpha)$ 在区间[0，1]上是单调递减的.

引理6 若$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{s})\in\mathcal{N}(\tau,\beta)$，则

$$\gamma_1\mu\leqslant\mu(\alpha)\leqslant\gamma_2\mu$$

其中

$$\gamma_1:=1-(1-\tau)\alpha-\frac{1}{2}\alpha^2\omega^2 n\qquad\gamma_2:=1-(1-\tau-\beta\tau)\alpha+\frac{1}{2}\alpha^2\omega^2 n$$

证 使用(4)式及引理3，可得：

$$\begin{aligned}\mu(\alpha)=&[1-(1-\tau)\alpha]\mu+\frac{\sqrt{n}-1}{n}\alpha\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(\tau\mu\boldsymbol{e}-\boldsymbol{xs})^{+}\frac{1}{n}\alpha^2\boldsymbol{\Delta x\Delta s}\geqslant\\&[1-(1-\tau)\alpha]\mu+\frac{1}{n}\alpha^2\boldsymbol{\Delta x\Delta s}\geqslant\\&[1-(1-\tau)\alpha]\mu-\frac{1}{n}\alpha^2\|\boldsymbol{\Delta x\Delta s}\|\geqslant\\&\left[1-(1-\tau)\alpha-\frac{1}{2}\alpha^2\omega^2 n\right]\mu=\gamma_1\mu\end{aligned}$$

另外，使用(4)式及引理1、引理3可得：

$$\begin{aligned}\mu(\alpha)=&[1-(1-\tau)\alpha]\mu+\frac{\sqrt{n}-1}{n}\alpha\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(\tau\mu\boldsymbol{e}-\boldsymbol{xs})^{+}+\frac{1}{n}\alpha^2\boldsymbol{\Delta x\Delta s}\leqslant\\&[1-(1-\tau)\alpha]\mu+\frac{\sqrt{n}-1}{n}\alpha\sqrt{n}\beta\tau\mu+\frac{1}{n}\alpha^2\boldsymbol{\Delta x\Delta s}\leqslant\\&[1-(1-\tau)\alpha]\mu+\alpha\beta\tau\mu+\frac{1}{n}\alpha^2|\boldsymbol{\Delta x\Delta s}|_1\leqslant\\&\left[1-(1-\tau-\beta\tau)\alpha+\frac{1}{2}\alpha^2\omega^2 n\right]\mu:=\gamma_2\mu\end{aligned}$$

证毕.

下面，将寻找满足条件(6)的 α_f 的下界.

引理7 若$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{s})\in\mathcal{N}(\tau,\beta)$，$\alpha_f$ 满足条件(6)，则

$$\alpha_f\geqslant\frac{\beta\tau}{\omega^2 n^{1.5}}:=\tilde{\alpha}^0$$

证 要证明该引理，只需要证明在区间$[0,\tilde{\alpha}^0]$上，$\boldsymbol{x}(\alpha)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}(\alpha)\geqslant(1-\alpha)\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}$ 成立. 为此，首先证明

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\alpha)\boldsymbol{s}(\alpha)=&[1-(1-\tau)\alpha]\mu n+(\sqrt{n}-1)\alpha\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(\tau\mu\boldsymbol{e}-\boldsymbol{xs})^{+}+\alpha^2(\boldsymbol{\Delta x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Delta s}\geqslant\\&[1-(1-\tau)\alpha]\mu n+\alpha^2(\boldsymbol{\Delta x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Delta s}\geqslant\\&[1-(1-\tau)\alpha]\mu n-\alpha^2\|\boldsymbol{\Delta x\Delta s}\|_1\geqslant\\&[1-(1-\tau)\alpha]\mu n-\frac{1}{2}\omega^2\alpha^2\mu n^2\end{aligned}$$

其中最后一个不等式使用了引理3.

使用上面的不等式，可得：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\alpha)\boldsymbol{s}(\alpha)-(1-\alpha)\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}\geqslant&[1-(1-\tau)\alpha]\mu n-\frac{1}{2}\omega^2\alpha^2\mu n^2-(1-\alpha)\mu n=\\&\alpha\mu n\left[\tau-\frac{1}{2}\omega^2\alpha n\right]\geqslant\alpha\mu n\left[\tau-\frac{1}{2}\frac{\beta\tau}{\omega^2 n^{1.5}}\omega^2 n\right]\geqslant\\&\alpha\tau\mu n\left[1-\frac{1}{2n^{0.5}}\beta\right]\geqslant 0\end{aligned}$$

证毕.

为了找到最大迭代步长 $\tilde{\alpha}$ 的下界，首先需要给出下列引理.

引理 8[13]　若$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{s})\in\mathcal{N}(\tau,\beta)$，则：

如果 $\alpha\geqslant\dfrac{1}{\sqrt{n}}$，则

$$\|(\tau\mu(\alpha)\boldsymbol{e}-\boldsymbol{xs}-\alpha\boldsymbol{r}_c)^+\|=0$$

如果 $\alpha<\dfrac{1}{\sqrt{n}}$，则

$$\|(\tau\mu(\alpha)\boldsymbol{e}-\boldsymbol{xs}-\alpha\boldsymbol{r}_c)^+\|\leqslant(1-\alpha\sqrt{n})\beta\tau\mu(\alpha)$$

引理 9　若$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{s})\in\mathcal{N}(\tau,\beta)$，$\tilde{\alpha}$ 满足条件(7)，则 $\tilde{\alpha}\geqslant\tilde{\alpha}^0$.

证　为了证明 $\|(\tau\mu(\alpha)\boldsymbol{e}-\boldsymbol{x}(\alpha)\boldsymbol{s}(\alpha))^+\|\leqslant\beta\tau\mu(\alpha)$，首先，需要对不等式的左边进行放大，可得：

$$\begin{aligned}\|(\tau\mu(\alpha)\boldsymbol{e}-\boldsymbol{x}(\alpha)\boldsymbol{s}(\alpha))^+\|&=\|(\tau\mu(\alpha)\boldsymbol{e}-\boldsymbol{xs}-\alpha\boldsymbol{r}_c-\alpha^2\boldsymbol{\Delta x\Delta s})^+\|\leqslant\\&\|(\tau\mu(\alpha)\boldsymbol{e}-\boldsymbol{xs}-\alpha\boldsymbol{r}_c)^+\|+\alpha^2\|\boldsymbol{\Delta x\Delta s}\|\leqslant\\&(1-\alpha\sqrt{n})\beta\tau\mu(\alpha)+\alpha^2\|\boldsymbol{\Delta x\Delta s}\|_1\leqslant\\&(1-\alpha\sqrt{n})\beta\tau\mu(\alpha)+\frac{1}{2}\alpha^2\omega^2n^2\mu\end{aligned}$$

其中第一个不等式使用了文献[11]的注解 3.1，第二、第三个不等式分别使用了引理 8、引理 3.

构造一个函数 $f(\alpha)$，将该引理的证明转化为证明 $f(\alpha)\leqslant0$ 即可，其中

$$\begin{aligned}f(\alpha)&=(1-\alpha\sqrt{n})\beta\tau\mu(\alpha)+\frac{1}{2}\alpha^2\omega^2n^2\mu-\beta\tau\mu(\alpha)=\\&\frac{1}{2}\alpha^2\omega^2n^2\mu-\alpha\sqrt{n}\beta\tau\mu(\alpha)\end{aligned}$$

使用引理 6 以及 $\beta\leqslant\dfrac{1}{2}$，$\tau\leqslant\dfrac{1}{4}$，$\omega\geqslant6$，可得：

$$\begin{aligned}f(\alpha)&\leqslant\frac{1}{2}\alpha^2\omega^2n^2\mu-\alpha\sqrt{n}\beta\tau\left[1-(1-\tau)\alpha-\frac{1}{2}\alpha^2\omega^2n\right]\mu\leqslant\\&\frac{1}{2}\alpha\mu\sqrt{n}\,[\alpha\omega^2n^{1.5}+\beta\tau(2(1-\tau)\alpha+\alpha^2\omega^2n-2)]\leqslant\\&\frac{1}{2}\alpha\mu\sqrt{n}\left[\beta\tau+\beta\tau\left(\frac{2(1-\tau)\beta\tau}{\omega^2n^{1.5}}+\frac{\beta^2\tau^2}{\omega^2n^2}-2\right)\right]\leqslant\\&\frac{1}{2}\beta\tau\alpha\mu\sqrt{n}\left[1+\frac{2(1-\tau)\beta\tau}{\omega^2n^{1.5}}+\frac{\beta^2\tau^2}{\omega^2n^2}-2\right]\leqslant\\&\frac{1}{2}\beta\tau\alpha\mu\sqrt{n}\left(1+\frac{1}{12^2}+\frac{1}{48^2}-2\right)\leqslant0\end{aligned}$$

引理证毕.

下面给出算法的多项式复杂度.

定理 1　让$(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{y}^0,\boldsymbol{s}^0)\in\mathcal{N}(\tau,\beta)$，$\tau\leqslant\dfrac{1}{4}$，$\beta\leqslant\dfrac{1}{2}$，则本文的算法至多需要 $O(n^{1.5}L)$ 次迭代停止，其中

$$L=\frac{\log\left(\dfrac{(\boldsymbol{x}^0)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}^0}{\varepsilon}\right)}{\eta}$$

证　由算法的终止条件步骤 1 及引理 6，可得：

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x}^k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}^k\leqslant\gamma_2{}^kn\mu_0&\leqslant\left[1-(1-\tau-\beta\tau)\alpha+\frac{1}{2}\alpha^2\omega^2n\right]^kn\mu_0\leqslant\\&\left[1-(1-\tau-\beta\tau)\tilde{\alpha}^0+\frac{1}{2}(\tilde{\alpha}^0)^2\omega^2n\right]^kn\mu_0\leqslant\end{aligned}$$

$$\left[1-\left(1-\tau-\frac{3}{2}\beta\tau\right)\frac{\beta\tau}{\omega^{2}n^{1.5}}\right]^{k}n\mu_{0}\leqslant$$
$$(1-\xi)^{k}n\mu_{0}\leqslant\varepsilon$$

其中第三个不等式使用了引理 5,

$$\xi:=\frac{\eta}{n^{1.5}}\qquad\eta:=\left(1-\tau-\frac{3}{2}\beta\tau\right)\frac{\beta\tau}{\omega^{2}}$$

又由于 $n\mu_{0}=(\boldsymbol{x}^{0})^{\mathrm{T}}s^{0}$, $\log(1-\alpha)\leqslant-\alpha$,容易证明

$$k\geqslant\frac{1}{\xi}\log\left(\frac{(\boldsymbol{x}^{0})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}^{0}}{\varepsilon}\right)=\frac{n^{1.5}}{\eta}\log\left(\frac{(\boldsymbol{x}^{0})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}^{0}}{\varepsilon}\right)$$

另外,当 $k\geqslant\frac{n^{1.5}}{\eta}\log\left(\frac{(\boldsymbol{x}^{0})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}^{0}}{\varepsilon}\right)$ 时,使用(8)式可得:

$$\nu^{k}=\frac{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{k}-\boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{0}-\boldsymbol{b}\|}=\frac{\|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}^{k}+\boldsymbol{s}^{k}-\boldsymbol{c}\|}{\|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}^{0}+\boldsymbol{s}^{0}-\boldsymbol{c}\|}\leqslant\frac{(\boldsymbol{x}^{k})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}^{k}}{(\boldsymbol{x}^{0})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}^{0}}\leqslant\varepsilon$$

所以,算法至多需要 $O(n^{1.5}L)$ 次迭代停止.

4 数值试验

用本文算法(算法 1)和文献[6](算法 2)对文献[14]中给出的线性规划进行测试. 用 MATLAB R2011b 编程并在 Intel Core i3 PC (3.00GHz),2GB 内存下运行. 最终的测试结果见表 1. 从表 1 中容易发现:本文提出的算法在迭代次数和时间上均要优于文献[6]中提出的算法,尤其是对于大规模问题,这种优势更明显.

表 1 线性规划

问题	m	n	算法 1			算法 2		
			时间/s	次数/次	对偶间隙	时间/s	次数/次	对偶间隙
adlittle	56	138	0.031 2	25	7.734 7e-006	0.124 8	35	3.277 8e-008
blend	74	114	0.015 6	23	1.653 6e-010	0.046 8	30	4.108 7e-008
bandm	305	472	0.218 4	39	1.095 7e-008	1.201 2	50	2.992 7e-007
beaconfd	173	295	0.218 4	23	1.095 7e-008	1.201 2	40	2.992 7e-007
e226	223	472	0.156 0	43	6.038 6e-010	0.421 2	61	4.904 0e-007
fitlp	627	1 677	1.934 4	38	8.709 9e-008	7.644 0	60	1.140 3e-008
scsd6	147	1 350	0.031 2	22	1.128 0e-009	0.265 2	42	1.203 2e-007
scsd8	397	2 750	0.468 0	21	4.243 4e-009	0.499 2	43	2.145 5e-007
sc105	105	163	0.015 6	22	1.061 1e-007	0.046 8	32	5.491 5e-007
scfxm3	990	1 800	0.546 0	56	4.411 1e-006	1.809 6	76	1.211 2e-008
share2b	96	162	0.015 6	23	6.898 2e-009	0.062 4	33	3.839 3e-010
woodw	1 098	8 418	2.745 6	57	2.432 6e-012	9.750 1	93	6.508 2e-011

参考文献:

[1] KARMARKAR N. A New Polynomial-Time Algorithm for Linear Programming [J]. Combinatorica, 1984, 4(2): 302-311.

[2] LUSTIG I J. Feasibility Issues in a Primal-Dual Interior-Method for Linear Programming [J]. Math Program, 1991, 49(1-3): 145-162.

[3] MASAKAZU K, NIMROD M, SHINJI M. A Primal-Dual Infeasible-Interior-Point Algorithm for Linear Programming [J]. Math Program, 1993, 61(1-3): 263-280.

[4] ZHANG Y. On the Convergence of a Class of Infeasible Interior-Point Method for the Horizontal Linear Complementarity Problem [J]. SIAM J Optim, 1994, 4(1): 208-227.

[5] MIZUNO S. Polynomiality of Infeasible-Interior-Point Algorithms for Linear Programming [J]. Math Program, 1994,

67(1−3)：109−119.

[6] POTRA F A. An Infeasible-Interior-Point Predictor-Corrector Algorithm for Linear Programming [J]. SIAM J Optim，1996，6(1)：19−32.

[7] POTRA F A. A Quadratically Convergent Predictor-Corrector Method for Solving Linear Programs from Infeasible Starting Points [J]. Math Program，1994，67(1−3)：383−406.

[8] KOJIMA M，NOMA T S，YOSHISE A. Global Convergence in Infeasible-Interior-Point Algorithms [J]. Math Program，1994，65(1−3)：43−72.

[9] WRIGHT S J. Primal-Dual Interior-Point Methods [M]. Philsdephia：SIAM Publications，1997.

[10] YE Y. Interior Point Algorithms：Theory and Analysis [M]. Hoboken：John Wiley & Sons，2011.

[11] AI W，ZHANG S. An $O(\sqrt{n}L)$-Iteration Primal-Dual Path-Following Method，Based on Wide Neighborhoods and Large Updates，for Monotone LCP [J]. SIAM J Optim，2005，16(2)：400−417.

[12] YANG X，ZHANG Y，LIU H. A Wide Neighborhood Infeasible-Interior-Point Method with Arc-Search for Linear Programming [J]. J App Math Comput，2016，51(1−2)：209−225.

[13] 杨喜美，刘红卫，张因奎. 带有新的迭代格式的内点算法 [J]. 应用数学与力学，2014，35(9)：1063−1070.

[14] BROWNE S，DONGARRA J，GROSSE E，et al. The Netlib Mathematical Software Repository [CP/OL]. (1995−09−15) [2015−06−10]. http：//www.dlib.org/dlib/september95/netlib/09browne.html.

A Wide Neighborhood Infeasible-Interior-Point Method for Linear Programming

YAN Xi-mei，　ZHANG Yin-kui，　PEI Yong-gang

Henan Normal University College of Mathematics and Information Science，Xinxiang Henan 453007，China

Abstract：In this paper，we propose a wide neighborhood infeasible-interior-point method for linear programming. The characteristics of the proposed algorithm are as follows：on the one hand，the proposed algorithm is based on a wide neighborhood and has a good calculation results，which is showed by the experiments. On the other hand，by analyzing，we achieve the iteration complexity $O(n^{1.5}L)$ for the proposed algorithm，which is the best complexity result for a wide neighborhood infeasible-interior-point method.

Key words：linear programming；infeasible-interior-point method；wide neighborhood；polynomial complexity

责任编辑　张　枸