第 39 卷第 1 期　西南大学学报(自然科学版)　2017 年 1 月
Vol. 39 No. 1　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　Jan. 2017

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2017.01.017

一类约束多目标优化问题弱有效解的一个择一定理①

欧小庆[1]，李金富[2]，刘佳[2]，王祖艳[2]，陈加伟[2]

1. 重庆人文科技学院 管理学院，重庆 401524；2. 西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要： 利用像空间分析理论研究一类锥约束多目标优化问题的最优性条件，通过定向距离函数引入一类正则弱分离函数，建立了一个择一定理. 最后，通过择一定理在不涉及函数凸性的条件下得到了锥约束多目标优化问题弱有效解的充分和必要最优性条件.

关 键 词： 多目标优化；像空间分析；最优性条件；分离函数

中图分类号： O177.91　**文献标志码：** A　**文章编号：** 1673-9868(2017)01-0109-05

弱有效解是经济、决策理论、多目标优化理论以及最优控制与博弈论中的重要概念之一. 对于多目标优化问题弱有效解的研究常常涉及目标函数与约束函数的凸性[1-3]. 众所周知，择一定理在研究多目标优化问题的最优性条件与对偶性中起着至关重要的作用. 文献[4]提出像空间分析理论对约束优化问题进行统一研究. 这类优化问题常常可等价地表示成一个参数系统的不可行性以及约束优化问题像空间中两个集合的分离性. 随后，许多学者用像空间分析理论研究了向量优化问题、向量变分不等式等约束优化问题的最优性条件、对偶性、误差界、间隙函数以及非线性分离性等[5-11]. 在 Banach 空间中，Hiriart-Urruty[12]用定向距离函数(oriented distance function)Δ 刻画非光滑优化问题的几何性质，从而得到了非凸优化问题的最优性必要条件. 定向距离函数 Δ 也被称为一类非线性标量化函数[8-11]，正是其显著的几何特征而被广泛应用于研究各类优化问题的最优性条件. 后来，Zaffaroni[13]进一步研究了定向距离函数 Δ 的性质.

本文利用像空间分析理论研究一类锥约束多目标优化问题的最优性条件. 首先，通过定向距离函数 Δ 引入一类不同于文献[11]的正则弱分离函数；然后借助该类正则弱分离函数建立了一个择一定理；最后，通过择一定理在不涉及函数凸性的条件下得到了锥约束多目标优化问题弱有效解的充分和必要最优性条件.

1 预备知识

无特别说明，本文总假设 $\mathbb{R}$ 为实数集，$\mathbb{R}^n$ 为 n 维欧氏空间，$X \subseteq \mathbb{R}^n$ 为非空闭凸子集，C, D 分别为 $\mathbb{R}^m$ 与 $\mathbb{R}^l$ 的闭凸点锥且具有非空内部 $\mathrm{int}C \neq \emptyset$，$\mathrm{int}D \neq \emptyset$，映像 $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$，$g: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^l$ 为向量值映射. 设 M 为 $\mathbb{R}^m$ 的任意非空凸锥，则 M 的对偶锥定义为

$$M^* = \{\zeta \in \mathbb{R}^m: \zeta^\top y \geqslant 0, \ \forall\, y \in M\}$$

对于函数 $\psi: X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$，$\alpha \in \mathbb{R}$，集合

① 收稿日期：2014-12-05
基金项目：国家自然科学基金项目(11401487)；中央高校基本科研业务费专项资助项目(SWU113037，XDJK2014C073).
作者简介：欧小庆(1983-)，女，硕士，湖北荆州人，助教，主要从事企业管理与决策、人力资源管理与薪酬激励机制研究.
通信作者：陈加伟，副教授.

$$\mathrm{lev}_{\geqslant \alpha}\psi := \{x \in X : \psi(x) \geqslant \alpha\} \qquad \mathrm{lev}_{>\alpha}\psi := \{x \in X : \psi(x) > \alpha\}$$

分别称为 ψ 的非负水平集与正水平集.

考虑如下约束多目标优化问题(简记为 MOP)

$$\min \quad f(x) \text{ s.t. } g(x) \in D,\ x \in X$$

记 MOP 的可行域为 $\mathscr{F} = \{x \in X : g(x) \in D\}$.

下面介绍 MOP 的像及相关符号:设 $\bar{x} \in X$. 定义映像 $\mathscr{A}_{\bar{x}} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l$ 为

$$\mathscr{A}_{\bar{x}}(x) := (f(\bar{x}) - f(x),\ g(x))$$

定义集合:

$$\mathscr{K}_{\bar{x}} := \{(u, v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l : (u, v) = \mathscr{A}_{\bar{x}}(x),\ x \in X\}$$

$$\mathscr{H} := \{(u, v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l : u \in \mathrm{int}C,\ v \in D\}$$

称集合 $\mathscr{K}_{\bar{x}}$ 为 MOP 在点 $\bar{x}$ 的像,如果空间 $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l$ 为 MOP 的像空间.

定义 1 $\bar{x} \in \mathscr{F}$ 称为 MOP 的弱有效解,如果

$$f(x) - f(\bar{x}) \notin -\mathrm{int}C \qquad \forall x \in \mathscr{F}$$

记 MOP 的弱有效解集为 $\mathscr{F}^w$.

定义 2[5] 若函数 $\omega : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l \times \prod \longrightarrow \mathbb{R}$ 满足:

$$\bigcap_{\pi \in \prod} \mathrm{lev}_{>0}\,\omega(\cdot, \cdot; \pi) = \mathscr{H}$$

则称 ω 为正则弱分离函数,其中 $\prod$ 为参数集合. 记所有正则弱分离函数的集合为 $\mathscr{W}_{\mathscr{R}}(\prod)$.

定义 3[12] 设 $\mathscr{M} \subseteq Y$. 函数 $\Delta_{\mathscr{M}} : Y \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$,

$$\Delta_{\mathscr{M}}(y) := d_{\mathscr{M}}(y) - d_{Y \setminus \mathscr{M}}(y) \qquad y \in Y$$

称为定向距离函数,其中 $d_{\mathscr{M}}(y) = \inf\limits_{m \in \mathscr{M}} \| y - m \|$ 为 $y \in Y$ 到 $\mathscr{M}$ 的距离.

引理 1[13] 设 $\mathscr{M}$ 为 Y 的非空子集且 $\mathscr{M} \neq Y$,则有:

(i) $\Delta_{\mathscr{M}}$ 为 1-李普希兹实值函数,即对任意 $y_1, y_2 \in Y$, $|\Delta_{\mathscr{M}}(y_1) - \Delta_{\mathscr{M}}(y_2)| \leqslant \| y_1 - y_2 \|$;

(ii) 对任意 $y \in \mathrm{int}\mathscr{M}$, $\Delta_{\mathscr{M}}(y) < 0$;

(iii) 对任意 $y \in \partial\mathscr{M}$, $\Delta_{\mathscr{M}}(y) = 0$,其中 $\partial\mathscr{M}$ 为 $\mathscr{M}$ 的边界;

(iv) 对任意 $y \in \mathrm{int}(Y \setminus \mathscr{M})$, $\Delta_{\mathscr{M}}(y) > 0$;

(v) $\mathscr{M} = \{y : \Delta_{\mathscr{M}}(y) \leqslant 0\}$ 当 $\mathscr{M}$ 为闭集;

(vi) $\Delta_{\mathscr{M}}$ 为凸的,若 $\mathscr{M}$ 为凸集;

(vii) $\Delta_{\mathscr{M}}$ 为正齐次的,若 $\mathscr{M}$ 为锥;

(viii) 如果 $\mathscr{M}$ 为闭凸锥,则对任意 $y_1, y_2 \in Y$, $y_1 - y_2 \in \mathscr{M} \Rightarrow \Delta_{\mathscr{M}}(y_1) \leqslant \Delta_{\mathscr{M}}(y_2)$;

特别地,若 $\mathrm{int}\mathscr{M} \neq \varnothing$, $y_1 - y_2 \in \mathrm{int}\mathscr{M} \Rightarrow \Delta_{\mathscr{M}}(y_1) < \Delta_{\mathscr{M}}(y_2)$.

引理 2[14] 设 $C \subseteq Y$ 为闭凸点锥,且 $\mathrm{int}C \neq \varnothing$. 则有:

(i) $y \in C \Leftrightarrow y^*(y) \geqslant 0,\ \forall y^* \in C^*$;

(ii) $y \in \mathrm{int}C \Leftrightarrow y^*(y) > 0,\ \forall y^* \in C^* \setminus \{0\}$.

由 MOP 弱有效解及其像的定义,我们有如下结论:

引理 3 $\bar{x} \in \mathscr{F}^w$ 当且仅当 $\mathscr{K}_{\bar{x}} \cap \mathscr{H} = \varnothing$,即不存在 $x \in X$ 满足 $\mathscr{A}_{\bar{x}}(x) \in \mathscr{H}$.

2 主要结果

在本节中,我们用定向距离函数 Δ 引入一类不同于文献[11]的正则弱分离函数,借助该类正则弱分离函数建立了一个择一定理. 最后,通过择一定理在不涉及函数凸性的条件下得到了锥约束多目标优化问题弱有效解的充分和必要最优性条件. 首先,定义如下非线性函数:

$$\omega(u, v; \lambda) = -\Delta_C(u) + \lambda^\top v,\ \forall (u, v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l,\ \lambda \in D^*$$

下面引理说明函数 $\omega(u, v; \lambda)$ 为一类正则弱分离函数.

引理 4　$\omega \in \mathscr{W}_{\mathscr{R}}(\prod)$，其中 $\prod = D^*$.

证　对任意 $(u, v) \in \mathscr{H}$ 与 $\lambda \in D^*$，$u \in \mathrm{int}C$，$v \in D$，进而，由引理 1 与引理 2，可得

$$\Delta_C(u) < 0, \lambda^\top v \geqslant 0$$

故

$$\omega(u, v; \lambda) = -\Delta_C(u) + \lambda^\top v > 0$$

于是有

$$\mathscr{H} \subseteq \bigcap_{\lambda \in \prod = D^*} \mathrm{lev}_{>0}\omega(\cdot, \cdot; \lambda)$$

反之，假设存在 $(\hat{u}, \hat{v}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l \backslash \mathscr{H}$，使得

$$\omega(\hat{u}, \hat{v}; \lambda) = -\Delta_C(\hat{u}) + \lambda^\top \hat{v} > 0 \qquad \forall \lambda \in D^* \tag{1}$$

由于 $(\hat{u}, \hat{v}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l \backslash \mathscr{H}$，则 $\hat{u} \notin \mathrm{int}C$ 或 $\hat{v} \notin D$.

若 $\hat{u} \notin \mathrm{int}C$，由引理 1(iii),(iv) 可得 $-\Delta_C(\hat{u}) \leqslant 0$. 取 $\lambda = 0_{Z^*}$，从而

$$\omega(\hat{u}, \hat{v}; 0) = -\Delta_C(\hat{u}) \leqslant 0$$

与(1) 式矛盾!

若 $\hat{v} \notin D$，则存在 $\hat{\lambda} \in D^*$ 且 $\hat{\lambda} \neq 0$ 使得 $\hat{\lambda}^\top \hat{v} < 0$. 因为 D^* 为锥，则对任意 $c > 0$，$c\hat{\lambda} \in D^*$，进而

$$\lim_{c \to +\infty} \omega(\hat{u}, \hat{v}; c\hat{\lambda}) = \lim_{c \to +\infty} -\Delta_C(\hat{u}) + c\hat{\lambda}^\top \hat{v} = -\infty$$

与(1) 式矛盾!

综上所述，

$$\bigcap_{\lambda \in D^*} \mathrm{lev}_{>0}\omega(\cdot, \cdot; \lambda) \subseteq \mathscr{H}$$

从而

$$\bigcap_{\lambda \in D^*} \mathrm{lev}_{>0}\omega(\cdot, \cdot; \lambda) = \mathscr{H}$$

由定义 2 知，$\omega \in \mathscr{W}_{\mathscr{R}}(\prod)$，其中 $\prod = D^*$.

引理 5　系统 $\mathscr{A}_x(x) \in \mathscr{H}$，$x \in X$ 与系统：

$$\exists \hat{\mu} \in D^* \text{ 满足 } -\Delta_C(f(\bar{x}) - f(x)) + \hat{\mu}^\top g(x) \leqslant 0 \qquad \forall x \in X \tag{2}$$

不可能同时成立.

证　若系统 $\mathscr{A}_x(x) \in \mathscr{H}$，$x \in X$ 成立，则存在 $\hat{x} \in X$ 使得 $g(\hat{x}) \in D$ 且

$$f(\bar{x}) - f(\hat{x}) \in \mathrm{int}C$$

由引理 1 与引理 2，对任意 $\mu \in D^*$，有

$$\mu^\top g(\hat{x})) \geqslant 0, -\Delta_C(f(\bar{x}) - f(\hat{x})) > 0$$

于是有

$$-\Delta_C(f(\bar{x}) - f(\hat{x})) + \hat{\mu}^\top g(\hat{x}) > 0$$

故系统(2) 不成立.

反之，若系统(2) 成立. 由引理 4，有

$$\mathscr{A}_x(x) = (f(\bar{x}) - f(x), g(x)) \notin \mathscr{H} \qquad \forall x \in X$$

故系统 $\mathscr{A}_x(x) \in \mathscr{H}$，$x \in X$ 不成立.

下面我们通过引理 5 研究约束多目标优化问题 MOP 弱有效解的充分和必要条件.

定理 1　设 $\bar{x} \in X$. 若存在 $\hat{\mu} \in D^*$，使得

$$-\Delta_C(f(\bar{x}) - f(x)) + \hat{\mu}^\top g(x) \leqslant 0 \qquad \forall x \in X \tag{3}$$

则有 $\bar{x} \in \mathscr{F}^w$.

证 由命题3可得结论.

定理2 设 $\bar{x} \in X$. 则 $\bar{x} \in \mathscr{F}^w$ 的充要条件为

$$\sup_{x \in X} \inf_{\mu \in D^*} -\Delta_C(f(\bar{x}) - f(x)) + \mu^\top g(x) = 0 \tag{4}$$

证 充分性 若(4)式成立. 于是有

$$0 \leqslant \inf_{\mu \in D^*} \mu^\top g(\bar{x}) \leqslant \inf_{\mu \in D^*} -\Delta_C(f(\bar{x}) - f(x)) + \mu^\top g(x) \leqslant 0 \qquad \forall x \in X \tag{5}$$

假设 $\bar{x} \notin \mathscr{F}^w$, 则存在 $\tilde{x} \in \mathscr{F}$, 使得

$$f(\tilde{x}) - f(\bar{x}) \in -\mathrm{int}C$$

由引理1(ii), 有

$$\inf_{\mu \in D^*} -\Delta_C(f(\bar{x}) - f(\tilde{x})) + \mu^\top g(\tilde{x}) \geqslant -\Delta_C(f(\bar{x}) - f(\tilde{x})) > 0 \qquad \forall \mu \in D^*$$

与(5)式矛盾! 故 $\bar{x} \in \mathscr{F}^w$.

必要性 若 $\bar{x} \in \mathscr{F}^w$, 则

$$f(x) - f(\bar{x}) \notin -\mathrm{int}C \qquad \forall x \in \mathscr{F} \tag{6}$$

由于

$$\inf_{\mu \in D^*} -\Delta_C(f(\bar{x}) - f(\bar{x})) + \mu^\top g(\bar{x}) = \inf_{\mu \in D^*} \mu^\top g(\bar{x}) \geqslant 0$$

所以

$$\sup_{x \in X} \inf_{\mu \in D^*} -\Delta_C(f(\bar{x}) - f(x)) + \mu^\top g(x) \geqslant \inf_{\mu \in D^*} -\Delta_C(f(\bar{x}) - f(\bar{x})) + \mu^\top g(\bar{x}) \geqslant 0 \tag{7}$$

易知(6)式等价于

$$f(\bar{x}) - f(x) \notin \mathrm{int}C, \ g(x) \in D, \ x \in X$$

故系统 $\mathscr{A}_{\bar{x}}(x) = (f(\bar{x}) - f(x), g(x)) \in \mathscr{H}$, $x \in X$ 不成立. 由命题3, $\mathscr{K}_{\bar{x}} \cap \mathscr{H} = \varnothing$. 联合引理4, 对每一 $x \in X$, 存在 $\mu \in D^*$, 使得

$$\omega(f(\bar{x}) - f(x), g(x); \mu) = -\Delta_C(f(\bar{x}) - f(x)) + \mu^\top g(x) \leqslant 0$$

于是有

$$\sup_{x \in X} \inf_{\mu \in D^*} -\Delta_C(f(\bar{x}) - f(x)) + \mu^\top g(x) \leqslant 0 \tag{8}$$

故由(7),(8)式, 有

$$\sup_{x \in X} \inf_{\mu \in D^*} -\Delta_C(f(\bar{x}) - f(x)) + \mu^\top g(x) = 0$$

成立.

参考文献:

[1] CHEN J W, CHO Y J, KIM J, et al. Multiobjective Optimization Problems with Modified Objective Functions and Cone Constraints and Applications [J]. J Glob Optim, 2011, 49(1): 137-147.

[2] 陈加伟, 李 军, 王金南. 锥约束非光滑多目标优化问题的对偶及最优性条件 [J]. 数学物理学报, 2012, 32(1): 1-12.

[3] 周志昂. 强 G-预不变凸向量优化问题的最优性条件 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2013, 35(1): 1-7.

[4] GIANNESSI F. Constrained Optimization and Image Space Analysis [M]. London: Springer, 2005.

[5] GIANNESSI F, MASTROENI G, PELLEGRINI L. On the Theory of Vector Optimization and Variational Inequalities. Image Space Analysis and Seperation [M] //GIANNESSI F. Vector Variational Inequalities and Vector Equilibria. London: Kluwer Academic, 2000: 153-215.

[6] LI J, HUANG N J. Image Space Analysis for Vector Variational Inequalites with Matrix Inequality Constraints and Applications [J]. J Optim Theory Appl, 2010, 145(3): 459-477.

[7] LI J, HUANG N J. Image Space Analysis for Variational Inequalites with Cone Constraints and Applications to Traffic

Equilibria [J]. Sci China Math，2012，55(4)：851－868.

[8] LI S J，XU Y D，ZHU S K. Nonlinear Seperation Approach to Constrained Extremum Problems [J]. J Optim Theory Appl，2012，154(3)：842－856.

[9] XU Y D，LI S J. Nonlinear Seperation Functions and Constrained Extremum Problems [J]. Optim Lett，2014，8(3)：1149－1160.

[10] XU Y D，LI S J. Gap Functions and Error Bounds for Weak Vector Variational Inequalities [J]. Optim，2014，63(9)：1339－1352.

[11] 罗　彬，王莲明，张　谋. 约束向量优化问题的像空间分析 [J]. 吉林大学学报(理学版)，2013，51(6)：1068－1072.

[12] HIRIART-URRUTY J B. Tangent Cones，Generalized Gradients and Mathematical Programming in Banach Spaces [J]. Math Oper Res，1979，4(1)：79－97.

[13] ZAFFARONI A. Degrees of Efficiency and Degrees of Minimality [J]. SIAM J Control Optim，2003，42(3)：1071－1086.

[14] JEYAKUMAR V，OETTLI W，NATIVIDAD M. A Solvability Theorem for a Class of Quasiconvex Mappings with Applications to Optimization [J]. J Math Anal Appl，1993，179(2)：537－546.

An Alternative Theorem for a Class of Cone Constrained Multiobjective Optimization Problems

OU Xiao-qing[1]，　LI Jin-fu[2]，　LIU　Jia[2]，
WANG Zu-yan[2]，　CHEN Jia-wei[2]

1. *College of Management，Chongqing College of Humanities，Science & Technology，Chongqing 401524，China*；
2. *School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China*

Abstract：Multiobjective optimization is a common problem in economic management and game theory. However，a great number of practical economic management problems are subject to the constraints of external and internal conditions. That is why constrained multiobjective optimization problems have aroused wide concern. Optimality conditions of multiobjective optimization problems are one of the important contents in the optimization theory. This paper is devoted to the study of the optimality conditions of a class of cone constrained multiobjective optimization problems by image space analysis. A class of regular weak separation functions is introduced by the oriented distance function，and an alternative theorem is established. Finally，some sufficient and necessary optimality conditions for cone constrained multiobjective optimization problems are obtained by the alternative theorem，without the convexity of the involved mappings.

Key words：multiobjective optimization；image space analysis；optimality condition；separation function

责任编辑　张　枸