第 39 卷第 2 期　　西南大学学报(自然科学版)　　2017 年 2 月
Vol. 39 No. 2　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Feb. 2017

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2017.02.007

某些 K_3-单群的交换子群覆盖①

伍 涛， 曹洪平

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：K_3-单群 A_5，PSL(2，7)，A_6 能被其所有的交换子群覆盖. 研究其极大交换子群，给出了所需交换子群的最少个数，即 $\theta(A_5)$，$\theta(\mathrm{PSL}(2,7))$，$\theta(A_6)$ 的值.

关 键 词：交换子群；覆盖；K_3-单群

中图分类号：O152.1　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9868(2017)02-0040-05

关于有限群被其真子群覆盖的问题，国内外学者已有相当多的研究，并给出了丰富的结论. 文献[1]定义 $\sigma(G)$ 为有限群 G 被其真子群覆盖所需真子群的最少个数，给出了 $\sigma(G)$ 分别为 4,5,6 时的充要条件，还得到了结论：

$$\sigma(A_5)=10 \qquad \sigma(S_5)=16$$

文献[2]定义 $\eta(G)$ 为有限群 G 被其真正规子群覆盖所需真正规子群的最少个数，得到了一个有趣的等式：

$$\sigma(D_4)=\eta(D_4)=\xi(D_4)$$

其中 $\xi(G)$ 表示 G 被 n 个真子群的共轭类覆盖的最小的 n. 关于有限群被其交换子群覆盖的问题的研究比较少.

设 G 为有限群，$H_1,H_2,\cdots,H_m$ 为 G 的真交换子群，若

$$H_1 \cup \cdots \cup H_m = G$$

则称 $\{H_1, H_2, \cdots, H_m\}$ 为 G 的一个交换子群覆盖. 若 $\{H_1, H_2, \cdots, H_m\}$ 为 G 的一个交换子群覆盖，且 m 最小，则记 m 为 $\theta(G)$. 显然，若 $\{H_1, H_2, \cdots, H_m\}$ 为 G 的一个交换子群覆盖，我们将 H_i 换成包含 H_i 的极大交换子群 $K_i(i=1,\cdots,m)$，则 $\{K_1, K_2, \cdots, K_m\}$ 仍为 G 的一个交换子群覆盖. 因此，为了得到 $\theta(G)$，只需讨论 G 的由极大交换子群组成的覆盖即可.

在本文中，我们讨论了 K_3-单群 A_5，PSL(2，7)，A_6 的交换子群覆盖. 得到了 $\theta(A_5)$，$\theta(\mathrm{PSL}(2,7))$，$\theta(A_6)$ 的值. 本文中总假定 G 为有限群，$\pi_e(G)$ 表示 G 的元素的阶的集合，n_p 表示 G 的 p-Sylow 子群的个数. 其它所用符号都是标准的，可参见文献[3].

定理 1　$\theta(A_5)=21$.

证　证明分为如下 3 步：

步骤 1　A_5 的极大交换子群恰为 A_5 的所有 Sylow 子群.

设 K 为 A_5 的一个极大交换子群，由文献[4]知 $\pi_e(A_5)=\{1, 2, 3, 5\}$，所以 K 的阶只能是素数的

---

① 收稿日期：2016-04-28
基金项目：国家自然科学基金项目(11471266，11271301)；中央高校基本业务费专项资金项目(XDJK2015B033).
作者简介：伍 涛(1991-)，男，四川眉山人，硕士研究生，主要从事群论的研究.

方幂. 又因

$$|A_5|=2^2\times 3\times 5$$

而 A_5 的 2 阶子群必包含于 4 阶交换子群中，所以 $|K|=2^2,3,5$，从而 K 为 A_5 的 Sylow 子群. 反之，由：

$$\pi_e(A_5)=\{1,2,3,5\} \qquad |A_5|=2^2\times 3\times 5$$

知，A_5 的所有 Sylow 子群均为极大交换子群.

步骤 2　A_5 共有 21 个极大交换子群.

由步骤 1，只需找出 A_5 的所有 Sylow 子群即可.

由

$$n_5=5k+1 \qquad n_5>1,\ n_5\mid 2^2\times 3$$

知 $n_5=6$，故 A_5 有 6 个 5-Sylow 子群.

由

$$n_3=3k+1 \qquad n_3>1,\ n_3\mid 2^2\times 5$$

知 $n_3=4,10$. 若 $n_3=4$，则 A_5 只有 8 个 3 阶元，这与 A_5 有 20 个 3 阶元矛盾，故 $n_3=10$，即 A_5 有 10 个 3-Sylow 子群.

由计算知，A_5 的 4 阶子群共有 5 个，即如下 5 个 4 阶子群：

$$\{(1),(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$$
$$\{(1),(12)(35),(13)(25),(15)(23)\}$$
$$\{(1),(12)(45),(14)(25),(15)(24)\}$$
$$\{(1),(13)(45),(14)(35),(15)(34)\}$$
$$\{(1),(23)(45),(24)(35),(25)(34)\}$$

所以 A_5 共有 5 个 2-Sylow 子群.

综上所述，A_5 共有 21 个极大交换子群.

步骤 3　$\theta(A_5)=21$.

由文献[4]知，A_5 的 1 阶元有 1 个，2 阶元有 15 个，3 阶元有 20 个，5 阶元有 24 个. 由于 A_5 的 p 阶元必包含在 A_5 的 p-Sylow 子群中($p=2,3,5$)，所以 A_5 的所有 Sylow 子群，即 A_5 的所有极大交换子群，可构成 A_5 的一个交换子群覆盖，从而 $\theta(A_5)\leqslant 21$.

设$\{H_1,H_2,\cdots,H_m\}$为 A_5 的任一交换子群覆盖，可不妨设 H_i 均为极大交换子群. 若 $m<21$，则$\{H_1,H_2,\cdots,H_m\}$中至少缺少 1 个 A_5 的 Sylow 子群，不妨设$\{H_1,H_2,\cdots,H_m\}$中缺少一个 5-Sylow 子群. 则$\{H_1,H_2,\cdots,H_m\}$中至多有 5 个 5-Sylow 子群，从而 $H_1\cup\cdots\cup H_m$ 至多含 A_5 的 20 个 5 阶元，这与 A_5 有 24 个 5 阶元矛盾. 同理，$\{H_1,H_2,\cdots,H_m\}$中不能缺少 A_5 的 2-Sylow 子群、3-Sylow 子群. 所以$\{H_1,H_2,\cdots,H_m\}$中必包含 A_5 的所有 Sylow 子群，故 $m\geqslant 21$. 又因 $\theta(A_5)\leqslant 21$，所以 $\theta(A_5)=21$.

定理 2　$\theta(\mathrm{PSL}(2,7))=57$.

证　证明分为如下 3 步：

步骤 1　PSL(2，7)的极大交换子群恰为 PSL(2，7)的所有 3-Sylow 子群、7-Sylow 子群及 4 阶交换子群.

设 H 为 PSL(2，7)的一个极大交换子群，由文献[4]知

$$\pi_e(\mathrm{PSL}(2,7))=\{1,2,3,4,7\}$$

所以 H 的阶只能是素数的方幂. 又因

$$|\mathrm{PSL}(2,7)|=2^3\times 3\times 7$$

而PSL(2，7)有一个极大子群同构于 S_4，S_4 的 2-Sylow 子群同构于 D_8，故 PSL(2，7)的 2-Sylow 子群同构于 D_8. 但 D_8 不交换，所以 $|H|=2^2,3,7$，从而 H 为 PSL(2，7)的 3-Sylow 子群、7-Sylow 子群或 4 阶

子群. 反之，由：

$$\pi_e(\mathrm{PSL}(2,7))=\{1,2,3,4,7\}$$
$$|\mathrm{PSL}(2,7)|=2^3\times 3\times 7$$

PSL(2，7) 的 2-Sylow 子群不交换，知其所有 3-Sylow 子群、7-Sylow 子群、4 阶子群均为极大交换子群.

步骤 2　PSL(2，7) 至多有 99 个极大交换子群.

由步骤 1，只需找出 PSL(2，7) 的所有 3-Sylow 子群、7-Sylow 子群、4 阶子群即可.

由

$$n_3=3k+1 \qquad n_3>1,\ n_3 \mid 2^3\times 7$$

知 $n_3=4,7,28$. 若 $n_3=4,7$，则 PSL(2，7) 只有 8 个或 14 个 3 阶元，这与 PSL(2，7) 有 56 个 3 阶元矛盾. 故 $n_3=28$，即 PSL(2，7) 有 28 个 3-Sylow 子群.

由

$$n_7=7k+1 \qquad n_7>1,\ n_7 \mid 2^3\times 3$$

知 $n_7=8$，故 PSL(2，7) 有 8 个 7-Sylow 子群.

由

$$n_2=2k+1 \qquad n_2>1,\ n_2 \mid 3\times 7$$

知 $n_2=3,7,21$. 而 PSL(2，7) 的 2-Sylow 子群同构于 D_8，D_8 中有 2 个 4 阶元，若 $n_2=3,7$，则 PSL(2，7) 至多有 6 个或 14 个 4 阶元，这与 PSL(2，7) 有 42 个 4 阶元矛盾，故 $n_2=21$. 又因为 D_8 中有 3 个 4 阶子群，故 PSL(2，7) 至多有 63 个 4 阶子群. 所以 PSL(2，7) 至多有 99 个极大交换子群.

步骤 3　$\theta(\mathrm{PSL}(2,7))=57$.

由文献[4] 知 PSL(2，7) 的 1 阶元有 1 个，2 阶元有 21 个，3 阶元有 56 个，4 阶元有 42 个，7 阶元有 48 个. 由于 PSL(2，7) 的 3 阶元、7 阶元必分别包含在 PSL(2，7) 的 3-Sylow 子群和 7-Sylow 子群中；2 阶元、4 阶元必包含在 PSL(2，7) 的 4 阶子群中. 所以 PSL(2，7) 的所有 3-Sylow 子群、7-Sylow 子群和 4 阶子群，即 PSL(2，7) 的所有极大交换子群，可构成 PSL(2，7) 的一个交换子群覆盖，从而

$$\theta(\mathrm{PSL}(2,7))\leqslant 99$$

设 x 为 PSL(2，7) 的任一 2 阶元，由文献[4] 知 $|C_{\mathrm{PSL}(2,7)}(x)|=8$，则 $C_{\mathrm{PSL}(2,7)}(x)$ 为 PSL(2，7) 的 2-Sylow 子群. 故 x 属于 $C_{\mathrm{PSL}(2,7)}(x)$ 的中心，从而 x 属于 $C_{\mathrm{PSL}(2,7)}(x)$ 的 4 阶循环子群中，这说明 PSL(2，7) 所有的 2 阶元必包含在 PSL(2，7) 的 4 阶循环子群中. 同时 4 阶元也都包含在其中. 所以 PSL(2，7) 的所有 3-Sylow 子群、7-Sylow 子群和 4 阶循环子群可构成 PSL(2，7) 的一个交换子群覆盖，从而

$$\theta(\mathrm{PSL}(2,7))\leqslant 57$$

设 $\{H_1,H_2,\cdots,H_m\}$ 为 PSL(2，7) 的任一交换子群覆盖，不妨设 H_i 均为极大交换子群. 若 $m<57$，则 $\{H_1,H_2,\cdots,H_m\}$ 中至少缺少 1 个 PSL(2，7) 的 3-Sylow 子群(或 7-Sylow 子群，或 4 阶循环群).

若 $\{H_1,H_2,\cdots,H_m\}$ 中缺少一个 3-Sylow 子群，则 $\{H_1,H_2,\cdots,H_m\}$ 中至多有 27 个 3-Sylow 子群，从而 $H_1\cup\cdots\cup H_m$ 至多含 PSL(2，7) 的 54 个 3 阶元，这与 PSL(2，7) 有 56 个 3 阶元矛盾.

同理，$\{H_1,H_2,\cdots,H_m\}$ 中不能缺少 PSL(2，7) 的 7-Sylow 子群.

若 $\{H_1,H_2,\cdots,H_m\}$ 中缺少一个 4 阶循环子群，则 $\{H_1,H_2,\cdots,H_m\}$ 中至多有 20 个 4 阶循环子群，从而 $H_1\cup\cdots\cup H_m$ 至多含 PSL(2，7) 的 40 个 4 阶元，这与 PSL(2，7) 有 42 个 4 阶元矛盾.

综上所述，$\theta(\mathrm{PSL}(2,7))=57$.

定理 3　$\theta(A_6)=91$.

证　证明分为如下 3 步：

步骤 1　A_6 的极大交换子群恰为 A_6 的所有 3-Sylow 子群、5-Sylow 子群及 4 阶子群.

设 H 为 A_6 的一个极大交换子群，由文献[4] 知，$\pi_e(A_6)=\{1,2,3,4,5\}$，所以 H 的阶只能是素数

的方幂. 又因

$$|A_6| = 2^3 \times 3^2 \times 5$$

而 S_4 是 A_6 的一个极大子群，S_4 的 2-Sylow 子群同构于 D_8，故 A_6 的 2-Sylow 子群同构于 D_8. 由于 D_8 不交换，所以 $|H| = 2^2, 3^2, 5$，从而 H 为 A_6 的 3-Sylow 子群(或 5-Sylow 子群，或 4 阶子群). 反之，由：

$$\pi_e(A_6) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$|A_6| = 2^3 \times 3^2 \times 5$$

及 A_6 的 2-Sylow 子群不交换，知其 3-Sylow 子群、7-Sylow 子群、4 阶子群为极大交换子群.

步骤 2 A_6 至多有 181 个极大交换子群.

由步骤 1，只需找出 A_6 的所有 3-Sylow 子群、5-Sylow 子群、4 阶子群即可.

由

$$n_3 = 3k + 1 \qquad n_3 > 1,\ n_3 \mid 2^3 \times 5$$

知 $n_3 = 4, 10, 40$. 若 $n_3 = 4$，则 A_6 至多有 32 个 3 阶元，这与 A_6 有 80 个 3 阶元矛盾. 故 $n_3 \neq 4$. 由文献[4]知，A_6 有 36 阶极大子群 K，K 为 36 阶 Frobenius 群，其核为 9 阶，从而 $N_{A_6}(P_3) > P_3$，其中 P_3 为 A_6 的 3-Sylow 子群，于是

$$n_3 = \frac{|A_6|}{|N_{A_6}(P_3)|} < 40$$

所以 $n_3 = 10$. 即 A_6 有 10 个 3-Sylow 子群.

由

$$n_5 = 5k + 1 \qquad n_5 > 1,\ n_5 \mid 2^3 \times 3^2$$

知 $n_5 = 6, 36$. 若 $n_5 = 6$，则 A_6 只有 24 个 5 阶元，这与 A_6 有 144 个 5 阶元矛盾. 故 $n_5 = 36$，即 A_6 有 36 个 5-Sylow 子群.

由

$$n_2 = 2k + 1 \qquad n_2 > 1,\ n_2 \mid 3^2 \times 5$$

知 $n_2 = 3, 5, 9, 15, 45$. 而 A_6 的 2-Sylow 子群同构于 D_8，D_8 有 2 个 4 阶元，若 $n_2 = 3, 5, 9, 15$，则 A_6 至多有 6 个、10 个、18 个或 30 个 4 阶元，这与 A_6 有 90 个 4 阶元矛盾，故 $n_2 = 45$. 又因为 D_8 中有 3 个 4 阶子群，故 A_6 至多有 135 个 4 阶子群.

所以 A_6 至多有 181 个极大交换子群.

步骤 3 $\theta(A_6) = 91$.

由文献[4]知 A_6 的 1 阶元有 1 个，2 阶元有 45 个，3 阶元有 80 个，4 阶元有 90 个，5 阶元有 144 个. 由于 A_6 的 3 阶元、5 阶元必分别包含在 A_6 的 3-Sylow 子群、5-Sylow 子群中；2 阶元、4 阶元必包含在 A_6 的 4 阶子群中. 所以 A_6 的所有 3-Sylow 子群、5-Sylow 子群和 4 阶子群，即 A_6 的所有极大交换子群，可构成 A_6 的一个交换子群覆盖，从而 $\theta(A_6) \leqslant 181$.

设 x 为 A_6 的任一 2 阶元，由文献[4]知 $|C_{A_6}(x)| = 8$，则 $C_{A_6}(x)$ 为 A_6 的 2-Sylow 子群. 故 x 属于 $C_{A_6}(x)$ 的中心，从而 x 属于 $C_{A_6}(x)$ 的 4 阶循环子群，这说明 A_6 所有的 2 阶元必包含在 A_6 的 4 阶循环子群中，同时 4 阶元也都包含在其中. 所以 A_6 的所有 3-Sylow 子群、5-Sylow 子群和 4 阶循环子群可构成 A_6 的一个交换子群覆盖，而其 4 阶循环子群有 45 个，从而 $\theta(A_6) \leqslant 91$.

设 $\{H_1, H_2, \cdots, H_m\}$ 为 A_6 的任一交换子群覆盖，不妨设 H_i 均为极大交换子群. 若 $m < 91$，则 $\{H_1, H_2, \cdots, H_m\}$ 中至少缺少 1 个 A_6 的 3-Sylow 子群(或 5-Sylow 子群，或 4 阶循环群).

若 $\{H_1, H_2, \cdots, H_m\}$ 中缺少一个 3-Sylow 子群，则 $\{H_1, H_2, \cdots, H_m\}$ 中至多有 9 个 3-Sylow 子群，从而 $H_1 \cup \cdots \cup H_m$ 至多含 A_6 的 72 个 3 阶元，这与 A_6 有 80 个 3 阶元矛盾.

同理 $\{H_1, H_2, \cdots, H_m\}$ 中不能缺少 A_6 的 5-Sylow 子群.

若$\{H_1, H_2, \cdots, H_m\}$中缺少一个4阶循环子群，则$\{H_1, H_2, \cdots, H_m\}$中至多有44个4阶循环子群，从而$H_1 \cup \cdots \cup H_m$至多含$A_6$的88个4阶元，这与$A_6$有90个4阶元矛盾.

综上所述，$\theta(A_6)=91$.

参考文献：

[1] COHN J H E. On n-Sum Groups [J]. Math Scand，1994，75：44－58.

[2] BHARGAVA M. Groups as Unions of Proper Subgroups [J]. American Mathematical Monthly，2009，116：413－422.

[3] 徐明耀. 有限群导引 [M]. 北京：科学出版社，2001.

[4] CONWAY J H，CURTIS R T，PARKER R A，et al. Atlas of Finite Groups：Maximal Subgroups and Ordinary Characters for Simple Groups [M]. New York：Oxford University Press，1985.

[5] 施武杰. A_5 的一个特征性质 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，1986，27(3)：633－636.

[6] 李　月，曹洪平. 交错群 A_5，A_6，A_7 的新刻画 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2016，38(2)：47－50.

ON K_3-Simple Groups Covered by Their Abelian Subgroups

WU　Tao，　CAO Hong-ping

School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：K_3-groups A_5，PSL(2，7)，A_6 can be covered by all their abelian subgroups. By researching their maximum abelian groups，we can compute the minimal number of abelian groups needed，namely，$\theta(A_5)$，$\theta(A_6)$，$\theta(\mathrm{PSL}(2,7))$.

Key words：abelian subgroup；covering；K_3-simple group

责任编辑　廖　坤