第 39 卷第 2 期　西南大学学报（自然科学版）　2017 年 2 月
Vol. 39　No. 2　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　Feb.　2017

DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2017.02.008

Cartan Eilenberg -(余)真分解①

冯博雅，　杨晓燕

西北师范大学 数学与统计学院，兰州 730070

摘要：设 $\mathscr{A}$ 是一个 Abelian 范畴. 定义了 Cartan Eilenberg(余)真分解(简称为 CE-(余)真分解)，给出了短正合列中 CE-(余)真分解的构造及与函子 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-,-)$ 的关系.

关　键　词：CE-(余)真分解；正合；CE-正合列

中图分类号：O154.2　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9868(2017)02-0045-05

文献[1]的第 XVII 章引入了复形的投射和内射分解的概念，该分解现在被定义为Cartan-Eilenberg分解，简记为 CE-分解. 文献[2]引入了 CE-内射分解与 CE-投射分解的概念，并考虑了复形的 CE-内射分解和CE-投射分解的存在性. 文献[3]讨论了CE-投射、CE-内射和平坦复形及其CE-分解的存在性，并证明了每个复形有 CE-内射包络和CE-平坦覆盖. 设 $\mathscr{A}$ 是一个 Abelian 范畴，$\mathscr{C}$ 是 $\mathscr{A}$ 的一个加法满子范畴. 文献[4]提供了如何由短正合列中两项(余)真 $\mathscr{C}$-分解的存在性得到第三项(余)真 $\mathscr{C}$-分解的存在性的方法. 受以上工作的启发，本文研究了关于满子范畴 $\mathscr{C}$ 的 CE-(余)真分解的存在性及构造.

本文中，$\mathscr{A}$ 是一个 Abelian 范畴，并且 $\mathscr{C}$ 是 $\mathscr{A}$ 的加法满子范畴. 其它未定义的术语参见文献[5].

定义 1[3]　如果以下序列是正合的：

(i) $0 \longrightarrow C_0 \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_2 \longrightarrow 0$；

(ii) $0 \longrightarrow Z(C_0) \longrightarrow Z(C_1) \longrightarrow Z(C_2) \longrightarrow 0$；

(iii) $0 \longrightarrow B(C_0) \longrightarrow B(C_1) \longrightarrow B(C_2) \longrightarrow 0$；

(iv) $0 \longrightarrow C_0/Z(C_0) \longrightarrow C_1/Z(C_1) \longrightarrow C_2/Z(C_2) \longrightarrow 0$；

(v) $0 \longrightarrow C_0/B(C_0) \longrightarrow C_1/B(C_1) \longrightarrow C_2/B(C_2) \longrightarrow 0$；

(vi) $0 \longrightarrow H(C_0) \longrightarrow H(C_1) \longrightarrow H(C_2) \longrightarrow 0$.

则称复形序列 $0 \longrightarrow C_0 \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_2 \longrightarrow 0$ 是 CE-正合的.

注 1　由文献[3]可知，在定义 1 的序列中，若 (i) 与 (ii) 或 (i) 与 (v) 正合，则 (i)—(vi) 都正合.

定义 2　设 $M \in \mathscr{A}$，称 CE-正合列(长度有限或无限)：

$$\cdots \xrightarrow{f_{i+1}} C_i \xrightarrow{f_i} \cdots \xrightarrow{f_2} C_1 \xrightarrow{f_1} C_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

为 M 的 CE-$\mathscr{C}$-分解，其中 $C_i \in \mathscr{C}$.

定义 3　如果定义 2 中的CE-正合列是 M 的 $\mathscr{C}$-分解，且为 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{C},-)$-正合的，则称该正合列为 M 的真 CE-$\mathscr{C}$-分解.

对偶地有 M 的 CE-$\mathscr{C}$-余分解与 M 的余真 CE-$\mathscr{C}$-余分解的定义.

定理 1　设

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow X^0 \longrightarrow X^1 \longrightarrow 0 \tag{1}$$

① 收稿日期：2016-04-27
基金项目：国家自然科学基金项目(11361051).
作者简介：冯博雅(1992-)，女，陕西渭南人，硕士研究生，主要从事同调代数的研究.

是 $\mathscr{A}$ 中的 CE-正合列. 令

$$\cdots \longrightarrow C_i^0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1^0 \longrightarrow C_0^0 \longrightarrow X^0 \longrightarrow 0 \tag{2}$$

是 X^0 的一个 CE-$\mathscr{C}$-分解，且

$$\cdots \longrightarrow C_i^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1^1 \longrightarrow C_0^1 \longrightarrow X^1 \longrightarrow 0 \tag{3}$$

是 X^1 的一个真 CE-$\mathscr{C}$-分解. 则：

(i) 有以下两个 CE-正合列：

$$\cdots \longrightarrow C_{i+1}^1 \oplus C_i^0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_2^1 \oplus C_1^0 \longrightarrow C \longrightarrow X \longrightarrow 0 \tag{4}$$

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow C_1^1 \oplus C_0^0 \longrightarrow C_0^1 \longrightarrow 0 \tag{5}$$

(ii) 如果 CE-正合列(2)与(3)是 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-, \mathscr{C})$-正合的，则序列(4)是 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-, \mathscr{C})$-正合的；

(iii) 如果 CE-正合列(2)是 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{C}, -)$-正合的，则序列(4)是 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{C}, -)$-正合的；

(iv) 如果 CE-正合列(1)是 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-, \mathscr{C})$-正合($\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{C}, -)$-正合)的，则序列(5)是 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-, \mathscr{C})$-正合($\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{C}, -)$-正合)的.

证 (i) 对 $i \geqslant 1$，令：

$$K_i^0 = \mathrm{Im}(C_i^0 \longrightarrow C_{i-1}^0)$$

$$K_i^1 = \mathrm{Im}(C_i^1 \longrightarrow C_{i-1}^1)$$

考虑拉回图 1.

图 1 的第三列是 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{C}, -)$-正合的，所以由文献[4]的引理 2.4(1)知，第二列是 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{C}, -)$-正合的. 根据图 1 可得交换图 2.

$$\begin{tikzcd}
& & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
& & K_1^1 \arrow[r, equal] \arrow[d] & K_1^1 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, equal] & M \arrow[r] \arrow[d] & C_0^1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] & X^0 \arrow[r] \arrow[d] & X^1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

图 1 $X^0 \longrightarrow X^1$ 和 $C_0^1 \longrightarrow X^1$ 的拉回

$$\begin{tikzcd}
& & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
& & K_1^1/B(K_1^1) \arrow[r, equal] \arrow[d] & K_1^1/B(K_1^1) \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & X/B(X) \arrow[r] \arrow[d, equal] & M/B(M) \arrow[r] \arrow[d] & C_0^1/B(C_0^1) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & X/B(X) \arrow[r] & X^0/B(X^0) \arrow[r] \arrow[d] & X^1/B(X^1) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

图 2 关于图 1 的 $-/B(-)$ 函子

因为图 1 中的第三行及第三列是 CE-正合的，所以图 2 的第三行与第三列是正合的. 因为 $-/B(-)$ 是右正合-函子，所以第二行与第二列是左正合的. 因此图 1 的第二行与第二列是 CE-正合的. 再由文献[4]的 3.1(1)，我们有行与列正合的交换图 3. 其中

$$W_1 = \mathrm{Ker}(C_1^1 \oplus C_0^0 \longrightarrow M)$$

因为图 3 中第二行与第三行是 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{C}, -)$-正合的，所以第一行是 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{C}, -)$-正合的. 根据图 3，我们可以得交换图 4.

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K_2^1 \arrow[r] \arrow[d] & W_1 \arrow[r] \arrow[d] & K_1^0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_1^1 \arrow[r] \arrow[d] & C_1^1 \oplus C_0^0 \arrow[r] \arrow[d] & C_0^0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_1^1 \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & X^0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

图 3 有关 $C_1^1 \oplus C_0^0$ 的交换图

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & Z(K_2^1) \arrow[r] \arrow[d] & Z(W_1) \arrow[r] \arrow[d] & Z(K_1^0) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z(C_1^1) \arrow[r] \arrow[d] & Z(C_1^1 \oplus C_0^0) \arrow[r] \arrow[d] & Z(C_0^0) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z(K_1^1) \arrow[r] \arrow[d] & Z(M) \arrow[r] \arrow[d] & Z(X^0) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

图 4 关于图 3 的循环的函子

因为图 4 的第一列与第三列是正合的，根据蛇引理可得第一行与第二列是正合的. 因此图 3 的第一行与第二列是 CE-正合的. 我们有拉回图 5，则可得交换图 6.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & W_1 \arrow[r, equal] \arrow[d] & W_1 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & C \arrow[r] \arrow[d] & C_1^1 \oplus C_0^0 \arrow[r] \arrow[d] & C_0^1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & C_0^1 \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

图 5　$X \longrightarrow M$ 和 $C_1^1 \oplus C_0^0 \longrightarrow M$ 的拉回

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & Z(W_1) \arrow[r, equal] \arrow[d] & Z(W_1) \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & Z(C) \arrow[r] \arrow[d] & Z(C_1^1 \oplus C_0^0) \arrow[r] \arrow[d] & Z(C_0^1) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z(X) \arrow[r] \arrow[d] & Z(M) \arrow[r] \arrow[d] & Z(C_0^1) \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

图 6　关于图 5 的循环的函子

因为交换图 6 的第二行是正合的，由蛇引理可知第一列是正合的，因此图 5 的第二行与第一列是 CE -正合的. 再由文献[4] 的 3.1(1)，我们有以下行与列正合的交换图 7，其中 $W_2 = \mathrm{Ker}(C_2^1 \oplus C_1^0 \longrightarrow W_1)$，且图 7 中第一行是 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{C}, -)$ -正合的. 根据以上证明可得图 7 的第一行与第二列是 CE -正合的. 重复以上过程可得序列(4) 与(5) 是 CE -正合的.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K_3^1 \arrow[r] \arrow[d] & W_2 \arrow[r] \arrow[d] & K_2^0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_2^1 \arrow[r] \arrow[d] & C_2^1 \oplus C_1^0 \arrow[r] \arrow[d] & C_1^0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_2^1 \arrow[r] \arrow[d] & W_1 \arrow[r] \arrow[d] & K_1^0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

图 7　有关 $C_2^1 \oplus C_1^0$ 的交换图

(ii) 因为 CE -正合列(2) 与(3) 是 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-, \mathscr{C})$ -正合的，所以在图 3 中第一列与第三列是 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-, \mathscr{C})$ -正合的，由文献[4] 的 2.5(1) 知，第二列是 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-, \mathscr{C})$ -正合的. 因此图 5 的第一列是 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-, \mathscr{C})$ -正合的，且图 7 的第二列是 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-, \mathscr{C})$ -正合的. 故序列(4) 是 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-, \mathscr{C})$ -正合的.

(iii) 因为 CE -正合列(2) 与(3) 是 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{C}, -)$ -正合的，所以在图 3 中第一列与第三列是 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{C}, -)$ -正合的. 由 (ii) 的证明可得到 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{C}, -)$ -正合列：

$$\cdots \longrightarrow C_{i+1}^1 \oplus C_i^0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_2^1 \oplus C_1^0 \longrightarrow W_1 \longrightarrow 0$$

因此可得序列(4) 是 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{C}, -)$ -正合的.

(iv) 如果 CE -正合列(1) 是 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-, \mathscr{C})$ -正合的，则图 1 中第二行是 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-, \mathscr{C})$ -正合的，且图 5 中第二行是 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-, \mathscr{C})$ -正合的. 故序列(5) 是 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-, \mathscr{C})$ -正合的. 如果 CE -正合列(1) 是 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{C}, -)$ -正合的，由文献[4] 的引理 2.4(1) 知，图 1 中第二行是 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{C}, -)$ -正合的，且图 5 中第二行是 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{C}, -)$ -正合的. 故序列(5) 是 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{C}, -)$ -正合的.

对偶于定理 1，我们有如下定理：

定理 2　设

$$0 \longrightarrow Y_1 \longrightarrow Y_0 \longrightarrow Y \longrightarrow 0 \tag{6}$$

是 $\mathscr{A}$ 中的 CE -正合列. 令

$$0 \longrightarrow Y_0 \longrightarrow C_0^0 \longrightarrow C_0^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_0^i \longrightarrow \cdots \tag{7}$$

是 Y_0 的一个 CE - $\mathscr{C}$ -余分解，且

$$0 \longrightarrow Y_1 \longrightarrow C_1^0 \longrightarrow C_1^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1^i \longrightarrow \cdots \tag{8}$$

是 Y_1 的一个余真 CE - $\mathscr{C}$ -余分解. 则：

(i) 有以下两个 CE -正合列：

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow C \longrightarrow C_0^1 \oplus C_1^2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_0^i \oplus C_1^{i+1} \longrightarrow \cdots \tag{9}$$

$$0 \longrightarrow C_1^0 \longrightarrow C_0^0 \oplus C_1^1 \longrightarrow C \longrightarrow 0 \tag{10}$$

(ii) 如果 CE -正合列(7) 与(8) 是 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{C}, -)$ -正合的，则序列(9) 是 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{C}, -)$ -正合的；

(iii) 如果 CE -正合列(7) 是 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-, \mathscr{C})$ -正合的，则序列(9) 是 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-, \mathscr{C})$ -正合的；

(iv) 如果 CE-正合列(6)是 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{C}, -)$-正合($\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-, \mathscr{C})$-正合)的，则序列(10)是 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{C}, -)$-正合($\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-, \mathscr{C})$-正合)的.

定理 3　设

$$0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_0 \longrightarrow X \longrightarrow 0 \tag{11}$$

是 $\mathscr{A}$ 中的 CE-正合列. 令

$$C_0^n \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_0^1 \longrightarrow C_0^0 \longrightarrow X_0 \longrightarrow 0 \tag{12}$$

是 X_0 的一个真 CE-$\mathscr{C}$-分解，且

$$C_1^{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1^1 \longrightarrow C_1^0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow 0 \tag{13}$$

是 X_1 的一个 CE-$\mathscr{C}$-分解. 则：

(i) 有 CE-正合列

$$C_0^n \oplus C_1^{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_0^2 \oplus C_1^1 \longrightarrow C_0^1 \oplus C_1^0 \longrightarrow C_0^0 \longrightarrow X \longrightarrow 0 \tag{14}$$

(ii) 如果 CE-正合列(11)—(13)是 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-, \mathscr{C})$-正合的，则序列(14)是 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-, \mathscr{C})$-正合的；

(iii) 如果 CE-正合列(11)与(13)是 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{C}, -)$-正合的，则序列(14)是 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{C}, -)$-正合的.

证　(i) 对 $1 \leqslant i \leqslant n-j\ (j=0,1)$，令 $K_j^i = \mathrm{Im}(C_j^i \longrightarrow C_j^{i-1})$. 考虑拉回图 8.

因为图 8 中第二列是 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{C}, -)$-正合的，所以由文献[4]的引理 2.4(1)知，第一列是 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{C}, -)$-正合的. 我们有交换图 9.

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
& K_0^1 \arrow[r, equal] \arrow[d] & K_0^1 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & W_1 \arrow[r] \arrow[d] & C_0^0 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & X_1 \arrow[r] \arrow[d] & X_0 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] & 0 \\
& 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

图 8　$X_1 \longrightarrow X_0$ 和 $C_0^0 \longrightarrow X_0$ 的拉回

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
& Z(K_0^1) \arrow[r, equal] \arrow[d] & Z(K_0^1) \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & Z(W_1) \arrow[r] \arrow[d] & Z(C_0^0) \arrow[r] \arrow[d] & Z(X) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z(X_1) \arrow[r] \arrow[d] & Z(X_0) \arrow[r] \arrow[d] & Z(X) \arrow[r] & 0 \\
& 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

图 9　关于图 8 的循环函子

因为图 8 中的第三行与第二列是 CE-正合的，所以图 9 的第三行与第二列是正合的. 因为交换图 9 的第二行是正合的，再由蛇引理可得第一列是正合的. 则图 8 的第二行与第一列是 CE-正合的. 由文献[4]的引理 3.1(1)知，有如下行与列正合的交换图 10，其中 $W_2 = \mathrm{Ker}(C_0^1 \oplus C_1^0 \longrightarrow W_1)$. 因为图 10 的第二行与第三行是 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{C}, -)$-正合的，所以由文献[4]的引理 3.1(1)得第一行是 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{C}, -)$-正合的，其中：

$$W_i = \mathrm{Im}(C_0^i \oplus C_1^{i-1} \longrightarrow C_0^{i-1} \oplus C_1^{i-2}) \qquad 2 \leqslant i \leqslant n$$

$$W_1 = \mathrm{Im}(C_0^1 \oplus C_1^0 \longrightarrow C_0^0)$$

根据图 10，可以得到以下交换图 11.

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K_0^2 \arrow[r] \arrow[d] & W_2 \arrow[r] \arrow[d] & K_1^1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_0^1 \arrow[r] \arrow[d] & C_0^1 \oplus C_1^0 \arrow[r] \arrow[d] & C_1^0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_0^1 \arrow[r] \arrow[d] & W_1 \arrow[r] \arrow[d] & X_1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

图 10　有关 $C_0^1 \oplus C_1^0$ 的交换图

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & Z(K_0^2) \arrow[r] \arrow[d] & Z(W_2) \arrow[r] \arrow[d] & Z(K_1^1) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z(C_0^1) \arrow[r] \arrow[d] & Z(C_0^1 \oplus C_1^0) \arrow[r] \arrow[d] & Z(C_1^0) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z(K_0^1) \arrow[r] \arrow[d] & Z(W_1) \arrow[r] \arrow[d] & Z(X_1) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

图 11　有关图 10 的循环函子

由蛇引理可得图 11 中第一行与第二列是 CE-正合的. 因此序列(14)是 CE-正合的.

(ii) 因为图 8 的第三行与第二列是 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-, \mathscr{C})$-正合的，由文献[4]的 2.5(1)知，图 8 的第二行是 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-, \mathscr{C})$-正合的. 再由图 10 的第一列与第三列是 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-, \mathscr{C})$-正合的，可证图 10 的第二列是 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-, \mathscr{C})$-正合的. 因此序列(14)是 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-, \mathscr{C})$-正合的.

(iii) 因为图 8 的第三行与图 10 的第三列是 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{C}, -)$ -正合的，所以由文献[4]的引理 2.5(2) 可证图 8 中第二行与图 10 中第二列是 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{C}, -)$ -正合的. 因此序列(14) 是 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{C}, -)$ -正合的.

对偶于定理 3，我们有如下定理：

定理 4　设

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow Y^0 \longrightarrow Y^1 \longrightarrow 0 \tag{15}$$

是 $\mathscr{A}$ 中的 CE -正合列. 令

$$0 \longrightarrow Y^0 \longrightarrow C_0^0 \longrightarrow C_1^0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_n^0 \tag{16}$$

是 Y^0 的一个余真 CE - $\mathscr{C}$ -余分解，且

$$0 \longrightarrow Y^1 \longrightarrow C_0^1 \longrightarrow C_1^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_{n-1}^1 \tag{17}$$

是 Y^1 的一个 CE - $\mathscr{C}$ -余分解. 则：

(i) 有 CE -正合列

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow C_0^0 \longrightarrow C_0^1 \oplus C_1^0 \longrightarrow C_1^1 \oplus C_2^0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_{n-1}^1 \oplus C_n^0 \tag{18}$$

(ii) 如果 CE -正合列(15)—(17) 是 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{C}, -)$ -正合的，则序列(18) 是 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{C}, -)$ -正合的；

(iii) 如果 CE -正合列(15) 与(17) 是 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-, \mathscr{C})$ -正合的，则序列(18) 是 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-, \mathscr{C})$ -正合的.

参考文献：

[1] CARTAN H，EILENBERG S. Homological Algebra [M]. State of New Jersey：Princeton University Press，1956：362－376.

[2] VERDIER J L. Des Catégories Dérivées Des Catégories Abéliennes [J]. Astérisque，1996，239：227－229.

[3] ENOCHS E E. Cartan-Eilenberg Complexes and Resolution [J]. J Algebra，2011，342(1)：16－39.

[4] HUANG Z Y. Proper Resolutions and Gorenstein Categories [J]. J Algebra，2012，393(11)：142－169.

[5] 陈文静，杨晓燕. 强和强泛 Gorenstein FP -内射模 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2014，36(8)：75－78.

Cartan Eilenberg-(Co) Proper Resolutions

FENG Bo-ya，　YANG Xiao-yan

College of Mathematics and Statistics，Northwest Normal University，Lanzhou 730070，China

Abstract：Let $\mathscr{A}$ be an Abelian category. This paper defines the Cartan Eilenberg-(co) proper resolution (referred to as CE-(co) proper resolution)，provides a method to construct a CE-(co) proper resolution in a short exact sequence, and gives some relationship between it and the functor $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-,-)$.

Key words：CE-(co) proper resolution；exact；CE-exact sequence

责任编辑　廖　坤