DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2017.02.009

# Diophantine 方程 $x^3+8=py^2$ 有本原正整数解的必要条件①

呼家源[1]，　李小雪[2]

1. 河套学院 理学系，内蒙古 巴彦淖尔 015000；2. 西北大学 数学学院，西安 710127

**摘要：** 设 $p$ 是奇素数. 运用 Pell 方程的性质证明了：如果方程 $x^3+8=py^2$ 有适合 $\gcd(x,y)=1$ 的正整数解 $(x,y)$，则必有 $p\equiv 1,7 \pmod{24}$.

**关　键　词：** 三次 Diophantine 方程；本原正整数解；必要条件

**中图分类号：** O156.7　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1673-9868(2017)02-0050-05

设 $\mathbb{N}_+$ 是全体正整数的集合. 对于无平方因子的正奇数 $D$，方程

$$x^3+8=Dy^2 \qquad x,y\in\mathbb{N}_+,\ \gcd(x,y)=1 \tag{1}$$

是一类基本而又重要的三次 Diophantine 方程，人们曾对此有过很多研究. 例如，文献[1] 曾证明了：当 $D$ 不能被 3 或 $6k+1$ 之形的奇素数整除时，方程(1) 至多有 1 组解 $(x,y)$. 文献[2] 在文献[1] 的条件下进一步证明了：如果 $D\equiv 3 \pmod 4$，则方程(1) 无解.

设 $p$ 是奇素数. 本文将讨论方程(1) 在 $D=p$ 时的求解问题. 此时，方程(1) 可表示成

$$x^3+8=py^2 \qquad x,y\in\mathbb{N}_+,\ \gcd(x,y)=1 \tag{2}$$

根据文献[2] 的结果可知：如果 $p\equiv 11 \pmod{12}$，则方程(2) 无解. 本文将运用 Pell 方程的性质完整地解决方程(2) 在 $p\equiv 2 \pmod 3$ 时的求解问题，即证明了：

**定理 1**　如果 $p\equiv 5 \pmod{12}$，则方程(2) 仅当 $p=5$ 时有解 $(x,y)=(13,21)$.

显然，从定理 1 和文献[2] 的结果直接可知：如果 $p\equiv 2 \pmod 3$，则方程(2) 当 $p=5$ 时仅有解 $(x,y)=(13,21)$. 当 $p\equiv 1 \pmod 3$ 时，方程(2) 的求解是一个十分困难的问题，目前已知方程(2) 在 $p$ 满足下列条件时无解：

($P_1$)[3] $p=7$；

($P_2$)[4] $p=37$；

($P_3$)[5-6] $p=43,61$；

($P_4$)[7] $p=73$；

($P_5$)[8] $p=79$；

($P_6$)[9] $p=103$；

($P_7$)[10] $p=109$；

---

① 收稿日期：2015-10-07
基金项目：国家自然科学基金项目(11371291)；陕西省教育厅科研计划项目(15JK1744)；河套学院自然科学青年项目(HYZQ201412).
作者简介：呼家源(1986-)，女，内蒙古巴彦淖尔人，讲师，主要从事数论及其应用的研究.
通信作者：李小雪，博士.

$(P_8)$[11-12] $p=3(8n+2)(8n+3)+1$，其中 $n$ 是正整数；

$(P_9)$[13] $p\equiv 19 \pmod{24}$；

$(P_{10})$[14] $p=3(8n+3)(8n+4)+1$，其中 $n$ 是正整数.

本文运用 Pell 方程的性质找出了另一类可使方程(2) 无解的奇素数 $p$，即证明了：

**定理 2** 如果 $p\equiv 13 \pmod{24}$，则方程(2) 无解.

显然，文献[4,6,10,14] 的结果都是定理 2 的特例. 同时，综合上述结果可知：如果方程(2) 有解$(x,y)$，则必有 $p\equiv 1,7 \pmod{24}$.

对于正整数 $r$，设：

$$\begin{cases} u_r=\dfrac{1}{2}(\alpha^r+\overline{\alpha}^r) \\ v_r=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}(\alpha^r-\overline{\alpha}^r) \end{cases} \tag{3}$$

其中：

$$\begin{cases} \alpha=2+\sqrt{3} \\ \overline{\alpha}=2-\sqrt{3} \end{cases} \tag{4}$$

对于非负整数 $s$，设：

$$\begin{cases} U_{2s+1}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\beta^{2s+1}+\overline{\beta}^{2s+1}) \\ V_{2s+1}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}(\beta^{2s+1}-\overline{\beta}^{2s+1}) \end{cases} \tag{5}$$

其中：

$$\begin{cases} \beta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{3}) \\ \overline{\beta}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1-\sqrt{3}) \end{cases} \tag{6}$$

**引理 1** (i) $(u,v)=(u_r,v_r)(r=1,2,\cdots)$ 是方程

$$u^2-3v^2=1 \qquad u,v\in \mathbb{N}_+ \tag{7}$$

的全部解.

(ii) $(U,V)=(U_{2s+1},V_{2s+1})(s=0,1,\cdots)$ 是方程

$$U^2-3V^2=-2 \qquad U,V\in \mathbb{N}_+ \tag{8}$$

的全部解.

(iii) 当 $r$ 是偶数时，$u_r$ 是奇数；当 $r$ 是奇数时，$u_r$ 是偶数.

(iv) 对于任何正整数 $n$，都有 $\gcd(U_{2n+1},V_{2n-1})=1$.

**证** 根据 Pell 方程的性质(参见文献[15] 的第 5.2 节) 直接可得引理 1 的结论 (i) 和 (ii). 从(3) 式和(4) 式可知 $u_r$ 满足结论 (iii).

现在来证明引理 1 的结论 (iv). 从(5) 式和(6) 式可知数列$\{U_{2s+1}\}_{s=0}^{\infty}$ 满足递推关系：

$$U_1=1 \qquad U_3=5 \qquad U_{2s+5}=4U_{2s+3}-U_{2s+1} \qquad s\geqslant 0 \tag{9}$$

从(9) 式可知 $U_{2s+1}(s=0,1,\cdots)$ 都是正奇数，而且

$$\gcd(U_{2s+5},U_{2s+3})=\gcd(U_{2s+3},U_{2s+1})=\cdots=\gcd(U_3,U_1)=\gcd(5,1)=1 \tag{10}$$

设

$$d=\gcd(U_{2n+1},V_{2n-1})$$

从(5) 式和(6) 式可知 $\beta\overline{\beta}=-1$ 以及

$$U_{2n+1}=6V_{2n-1}+U_{2n-3} \tag{11}$$

其中

$$U_{-1}=\frac{\beta^{-1}+\bar{\beta}^{-1}}{\sqrt{2}}=\frac{\beta+\bar{\beta}}{\beta\bar{\beta}\sqrt{2}}=-1$$

故有 $d\mid U_{2r-3}$. 又因 $d\mid U_{2r+1}$ 且 $d\mid U_{2r-3}$，其中 $d$ 是正奇数，所以从(9) 式可得 $d\mid U_{2r-1}$. 因此，$d$ 适合

$$d\mid \gcd(U_{2r+1},U_{2r-1}) \tag{12}$$

于是，从(10) 式和(12) 式可得 $d=1$. 引理 1 证毕.

根据文献[15] 的第 6.2 节提到的结果直接可得以下两个引理：

**引理 2**　方程

$$X^4-3Y^2=-2 \qquad X,Y\in\mathbb{N}_+ \tag{13}$$

仅有解$(X,Y)=(1,1)$.

**引理 3**　方程

$$X^2-3Y^4=-2 \qquad X,Y\in\mathbb{N}_+ \tag{14}$$

仅有解$(X,Y)=(1,1)$.

**定理 1 的证明**

设$(x,y)$ 是方程(2) 的一组解. 因为

$$\gcd(x,y)=1$$

所以 $x$ 和 $y$ 都是正奇数. 又因：

$$x^3+8=(x+2)(x^2-2x+4)$$
$$\gcd(x+2,x^2-2x+4)=1,3$$

而且当

$$\gcd(x+2,x^2-2x+4)=3$$

时必有 $3\parallel x^2-2x+4$，故从方程(2) 仅可能得出以下 4 种情况：

$$\begin{cases}x+2=pa^2\\x^2-2x+4=b^2\\y=ab\end{cases}\qquad a,b\in\mathbb{N}_+ \tag{15}$$

$$\begin{cases}x+2=a^2\\x^2-2x+4=pb^2\\y=ab\end{cases}\qquad a,b\in\mathbb{N}_+ \tag{16}$$

$$\begin{cases}x+2=3pa^2\\x^2-2x+4=3b^2\\y=3ab\end{cases}\qquad a,b\in\mathbb{N}_+ \tag{17}$$

或

$$\begin{cases}x+2=3a^2\\x^2-2x+4=3pb^2\\y=3ab\end{cases}\qquad a,b\in\mathbb{N}_+ \tag{18}$$

若(15) 式成立，因为 $x$ 和 $y$ 都是正奇数，所以 $b$ 也是正奇数，故从

$$x^2-2x+4=b^2$$

可得

$$1\equiv b^2\equiv x^2-2x+4\equiv 1-2+4\equiv 3 \pmod 4) \tag{19}$$

矛盾. 因此，情况(15) 是不可能出现的.

由于 $x^2-2x+4$ 的素因数 $q$ 都满足 $q=3$ 或者 $q\equiv 1 \pmod 3$，所以当 $p\equiv 5 \pmod{12}$ 时，因为

$$p \equiv 2 \not\equiv 1 \pmod 3$$

情况(16)和(18)都不可能出现，因此此时仅需考虑情况(17).

当(17)式成立时，在其中前两个等式中消去 $x$，可得

$$b^2 - 3(pa^2 - 1)^2 = 1 \tag{20}$$

从(20)式可知方程(7)有解

$$(u, v) = (b, pa^2 - 1)$$

又因 $b$ 是正奇数，故从引理 1 的结论(i)和(iii)可知：

$$\begin{cases} b = u_{2n} \\ pa^2 - 1 = v_{2n} \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}_+ \tag{21}$$

从(4)式和(6)式可知：

$$\alpha = \beta^2 \qquad \bar{\alpha} = \bar{\beta}^2 \qquad \beta\bar{\beta} = -1$$

所以从(3),(5),(9)式可得

$$pa^2 = v_{2n} + 1 = \frac{\alpha^{2n} - \bar{\alpha}^{2n}}{\alpha - \bar{\alpha}} + 1 = \frac{\beta^{4n} - \bar{\beta}^{4n}}{\beta^2 - \bar{\beta}^2} - (\beta\bar{\beta})^{2n-1} =$$

$$\frac{(\beta^{2n+1} + \bar{\beta}^{2n+1})(\beta^{2n-1} - \bar{\beta}^{2n-1})}{\beta^2 - \bar{\beta}^2} = U_{2n+1} V_{2n-1} \tag{22}$$

由于 $p$ 是奇素数，又从引理 1 的结论(iv)可知

$$\gcd(U_{2n+1}, V_{2n-1}) = 1$$

所以从(22)式可得

$$\begin{cases} U_{2n+1} = f^2 \\ V_{2n-1} = pg^2 \\ a = fg \end{cases} \qquad f, g \in \mathbb{N}_+ \tag{23}$$

或

$$\begin{cases} U_{2n+1} = pf^2 \\ V_{2n-1} = g^2 \\ a = fg \end{cases} \qquad f, g \in \mathbb{N}_+ \tag{24}$$

如果(23)式成立，则根据引理 1 的结论(ii)，从(23)式中的 $U_{2n+1} = f^2$ 可知方程(13)有解

$$(X, Y) = (f, V_{2n+1})$$

然而，因为：

$$2n + 1 \geqslant 3 \qquad V_{2n+1} \geqslant V_3 > 1$$

所以根据引理 2 可知(23)式不成立.

如果(24)式成立，则根据引理 1 的结论(ii)，从(24)式中的 $V_{2n-1} = g^2$ 可知方程(13)有解

$$(X, Y) = (U_{2n-1}, g)$$

因此，从引理 3 可知，此时仅有：

$$n = 1 \qquad V_{2n-1} = V_1 = 1 \qquad g = 1$$

$$U_{2n+1} = U_3 = 5 \qquad p = 5 \qquad f = 1 \qquad a = 1$$

将此代入(17)式即得 $x = 13$ 和 $y = 21$. 由此可知：如果 $p \equiv 5 \pmod{12}$，则方程(2)仅当 $p = 5$ 时有解 $(x, y) = (13, 21)$. 定理 1 证毕.

**定理 2 的证明**

因为 $p \equiv 13 \pmod{24}$，所以从定理 1 的证明过程可知，如果方程(2)有解 $(x, y)$，则 $x$ 和 $y$ 必定满足(16)式或(18)式.

如果(16)式成立，因为 $x$ 是正奇数，所以从其中的 $x + 2 = a^2$ 可知 $a$ 也是正奇数，故有

$$x \equiv a^2-2 \equiv 1-2 \equiv 7 \pmod 8 \tag{25}$$

又因 $b$ 也是正奇数，所以将 (25) 式代入(16) 式中的 $x^2-2x+4=pb^2$，可得

$$p \equiv pb^2 \equiv x^2-2x+4 \equiv 1+2+4 \equiv 7 \pmod 8 \tag{26}$$

与题设条件 $p \equiv 13 \equiv 5 \pmod 8$ 矛盾，故(16) 式不成立.

同理，如果(18) 式成立，从其中的 $x+2=3a^2$，可知

$$x \equiv 3a^2-2 \equiv 3-2 \equiv 1 \pmod 8 \tag{27}$$

再将(27) 式代入(18) 式中的 $x^2-2x+4=3pb^2$，可得

$$3p \equiv 3pb^2 \equiv x^2-2x+4 \equiv 1-2+4 \equiv 3 \pmod 8 \tag{28}$$

又因 $\gcd(3,8)=1$，所以从(28) 式可知 $p \equiv 1 \pmod 8$，与题设条件 $p \equiv 13 \equiv 5 \pmod 8$ 矛盾，故(18) 式不成立. 综上所述可知：如果 $p \equiv 13 \pmod{24}$，则方程(2) 无解. 定理 2 证毕.

**参考文献：**

[1] LJUNGGREN W. Sätze Über Unbestimmte Gleichungen [J]. Skr Norske Vid Akad Oslo，1942，9(1)：1－55.

[2] 柯　召，孙　琦. 关于丢番图方程 $x^3\pm8=Dy^2$ 和 $x^3\pm8=3Dy^2$ [J]. 四川大学学报(自然科学版)，1981，18(4)：1－5.

[3] 罗　明. 关于不定方程 $x^3\pm8=7y^2$ [J]. 重庆师范学院学报(自然科学版)，1995，12(3)：29－31.

[4] 楼思远. 关于不定方程 $x^3+8=37y^2$ [J]. 重庆工商大学学报(自然科学版)，2012，29(1)：14－15.

[5] 黄勇庆. 关于不定方程 $x^3\pm8=Dy^2$ [D]. 重庆：重庆师范大学，2007.

[6] 黄勇庆. 关于不定方程 $x^3-8=61y^2$ [J]. 吉首大学学报(自然科学版)，2006，27(6)：24－25.

[7] 马　静，罗　明. 关于不定方程 $x^3\pm8=73y^2$ [J]. 内江师范学院学报，2011，26(12)：26－27.

[8] 梁艳华，李　鑫. 关于不定方程 $x^3+8=Dy^2$ [J]. 四川理工学院学报(自然科学版)，2009，22(1)：26－29.

[9] 孙浩娜. 关于不定方程 $x^3+8=103y^2$ [J]. 重庆工商大学学报(自然科学版)，2014，31(1)：14－15.

[10] 安　莹，郭凤明. 关于不定方程 $x^3\pm8=109y^2$ [J]. 重庆工商大学学报(自然科学版)，2014，31(5)：26－28.

[11] 占金虎. 关于 Diophantine 方程 $x^3\pm8=Dy^2$ [J]. 咸阳师范学院学报，2008，23(6)：3－4.

[12] 占金虎. 关于 Diophantine 方程 $x^3\pm8=Dy^2$ [J]. 科学技术与工程，2009，9(1)：91－93.

[13] 万　飞，杜先存. 关于丢番图方程 $x^3\pm8=Dy^2$ [J]. 唐山师范学院学报，2013，35(5)：27－29.

[14] 占金虎，朱　熙. 关于 Diophantine 方程 $x^3+8=Dy^2$ [J]. 高师理科学刊，2015，35(3)：15－16.

[15] 曹珍富. 丢番图方程引论 [M]. 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，1989.

# A Necessary Condition for the Diophantine Equation $x^3+8=py^2$ to Have Primitive Positive Integer Solutions

HU Jia-yuan[1]，　LI Xiao-xue[2]

*1. Department of Science，Hetao College，Bayannur Inner Mongolia 015000，China；*

*2. School of Mathematics，Northwest University，Xi'an 710127，China*

**Abstract**：Let $p$ be an odd prime. Using some properties of Pell equations，this paper proves that if the equation $x^3+8=py^2$ has positive integer solutions $(x, y)$ with $\gcd(x, y)=1$，then $p\equiv1,7 \pmod{24}$.

**Key words**：cubic diophantine equation；primitive positive integer solution；necessary condition

责任编辑　廖　坤