

C^* -代数值 b -度量空间中 不动点的存在性与唯一性^①

黄 链, 邓 磊

西南大学 数学与统计学院, 重庆 400715

摘要: 在 C^* -代数值 b -度量空间中引进新的压缩映象, 并对该压缩映象证明了不动点的存在性与唯一性.

关键词: C^* -代数; C^* -代数值 b -度量空间; 不动点

中图分类号: O177.91

文献标志码: A

文章编号: 1673-9868(2017)02-0055-05

20 世纪 20 年代, 文献[1] 提出并证明了著名的 Banach 压缩映象原理. 文献[2] 提出了 b -度量空间的概念, 众多学者深入研究了 b -度量空间中新型压缩映象及不动点问题.

定义 1^[3] 设 $\mathcal{A}$ 为代数空间, 共轭线性映射 $a \mapsto a^*$. 若 $\forall a, b \in \mathcal{A}$, 有:

$$(ab)^* = b^* a^* \quad (a^*)^* = a$$

则称该映射为 a^* -代数映射, 数对 $(\mathcal{A}, *)$ 是 a^* -代数空间.

定义 2^[3] 设 $(\mathcal{A}, *)$ 是完备的单位赋范 a^* -代数空间. 若 $\forall a \in \mathcal{A}$, 有

$$\|a^*\| = \|a\|$$

则称 $(\mathcal{A}, *)$ 为巴拿赫 a^* -代数空间.

定义 3^[3] 若在巴拿赫 a^* -代数空间 $(\mathcal{A}, *)$ 上, $\forall a \in \mathcal{A}$, 有

$$\|a^* a\| = \|a\|^2$$

则称 $\mathcal{A}$ 是 C^* -代数空间.

$\forall a \in \mathcal{A}$, 有 $a = a^*$ 且 $\sigma(a) \subset \mathbb{R}_+$, 其中

$$\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{R}: |\lambda 1_{\mathcal{A}} - a| = 0\}$$

则称 a 为 $\mathcal{A}$ 中的正元素, 用 $\mathcal{A}_+$ 表示正元素的集合.

对 $\mathcal{A}$ 中的正元素定义偏序“ $\geq$ ”: $b \geq a$ 当且仅当 $b - a \in \mathcal{A}_+$. 若 $a \in \mathcal{A}_+$, 即 $a \geq 0_{\mathcal{A}}$, 其中 $0_{\mathcal{A}}$ 表示 $\mathcal{A}$ 中的零元. 因此

$$\mathcal{A}_+ = \{a \in \mathcal{A}: a \geq 0_{\mathcal{A}}\}$$

注 1^[3] C^* -代数空间 $\mathcal{A}$ 中的任意正元素都有唯一正平方根, $(a^* a)^{\frac{1}{2}} = |a|$.

定义 4^[4] 设 $\mathcal{A}$ 为 C^* -代数空间, X 是非空集合, 映射 $d: X \times X \rightarrow \mathcal{A}_+$. 若 $\forall x_1, x_2, x_3 \in \mathcal{A}$, 有:

(T1) $d(x_1, x_2) = 0_{\mathcal{A}}$ 当且仅当 $x_1 = x_2$;

① 收稿日期: 2016-04-08

基金项目: 国家自然科学基金项目(11226228).

作者简介: 黄 链(1988-), 女, 四川泸州人, 硕士研究生, 主要从事非线性泛函分析的研究.

通信作者: 邓 磊, 教授.

$$(T2) \quad d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1);$$

$$(T3) \quad d(x_1, x_2) \leq d(x_1, x_3) + d(x_3, x_2).$$

成立, 则称 $(X, \mathcal{A}, d)$ 是 C^* -代数值度量空间.

定义 5^[3] 设 $\mathcal{A}$ 为 C^* -代数空间, X 是非空集合. 设 $b \in \mathcal{A}$ 且 $\|b\| \geq 1$, 映射 $d: X \times X \longrightarrow \mathcal{A}_+$. 若 $\forall x_1, x_2, x_3 \in \mathcal{A}$, 有:

$$(BM1) \quad d(x_1, x_2) = 0_{\mathcal{A}} \text{ 当且仅当 } x_1 = x_2;$$

$$(BM2) \quad d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1);$$

$$(BM3) \quad d(x_1, x_2) \leq b[d(x_1, x_3) + d(x_3, x_2)].$$

成立, 则称 $(X, \mathcal{A}, d)$ 是 C^* -代数值 b -度量空间.

定义 6^[3] 设 $(X, \mathcal{A}, d)$ 是 C^* -代数值 b -度量空间, $\{x_n\}$ 为 X 中的任一序列, $x \in X$.

(i) 若 $\forall \epsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得当 $n > N$ 时, 有

$$\|d(x_n, x)\| < \epsilon$$

则称序列 $\{x_n\}$ 收敛到点 x . 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

(ii) 若 $\forall \epsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得当 $n, m > N$ 时, 有

$$\|d(x_n, x_m)\| < \epsilon$$

则称序列 $\{x_n\}$ 是 X 中的柯西列.

(iii) 若 X 中每个柯西列都在 $(X, \mathcal{A}, d)$ 中收敛, 则称 $(X, \mathcal{A}, d)$ 是完备的 C^* -代数值 b -度量空间.

定义 7^[3] 设 $(X, \mathcal{A}, d)$ 是 C^* -代数值 b -度量空间, $T: X \longrightarrow X$, 若存在常数 $a \in \mathcal{A}$, $\|a\| < 1$, 使得

$$d(Tx, Ty) \leq a^* d(x, y) a \quad \forall x, y \in X$$

则称 T 是 X 上的压缩映象.

文献[4-5]在 C^* -代数值度量空间上证明了 Banach 压缩映象原理. 文献[6]研究了有关 C^* -值压缩映象的不动点理论. 随后文献[3]对 C^* -代数值度量空间与 b -度量空间进行推广, 定义了 C^* -代数值 b -度量空间, 并证明了在 C^* -代数值 b -度量空间中满足 $d(Tx, Ty) \leq a^* d(x, y) a$ 的压缩映象的不动点的存在性与唯一性.

本文在 C^* -代数值 b -度量空间中引入新的压缩映象, 并对该压缩映象证明了不动点的存在性与唯一性. 结果如下:

定理 1 设 $(X, \mathcal{A}, d)$ 是一个完备 C^* -代数值 b -度量空间, 压缩映象 $T: X \longrightarrow X$. 若 $\forall x, y \in X$, 存在 $a \in \mathcal{A}$, $\|a\| < 1$ 且 $\|b\| \|a\|^2 < 1$, 有

$$d(Tx, Ty) \leq a^* (m_1 d(x, y) + m_2 d(x, Tx) + m_3 d(y, Ty)) a \quad (1)$$

其中 m_i 为非负实数 ($i=1, 2, 3$), 且 $m_1 + m_2 + m_3 \leq 1$, 则 T 有唯一不动点.

证 若 $\mathcal{A} = \{0_{\mathcal{A}}\}$, 定理 1 成立. 不失一般性, 设 $\mathcal{A} \neq \{0_{\mathcal{A}}\}$, 任取 $x_0 \in X$, 定义迭代序列 $x_{n+1} = Tx_n$, 且有 $x_n = T^n x_0$ ($\forall n \in \mathbb{N}$).

由压缩条件(1)有

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(Tx_{n-1}, Tx_n) \leq \\ &a^* (m_1 d(x_{n-1}, x_n) + m_2 d(x_{n-1}, Tx_{n-1}) + m_3 d(x_n, Tx_n)) a = \\ &a^* (m_1 d(x_{n-1}, x_n) + m_2 d(x_{n-1}, x_n) + m_3 d(x_n, x_{n+1})) a = \\ &(m_1 + m_2) a^* d(x_{n-1}, x_n) a + m_3 a^* d(x_n, x_{n+1}) a \end{aligned}$$

下记 $d(x_n, x_{n+1}) = D_n$. 因 $\|a\| < 1$, 则

$$D_n \leq (m_1 + m_2) a^* D_{n-1} a + m_3 a^* D_n a =$$

$$\begin{aligned}
& (m_1 + m_2)a^* (D_{n-1})^{\frac{1}{2}} (D_{n-1})^{\frac{1}{2}} a + m_3 a^* (D_n)^{\frac{1}{2}} (D_n)^{\frac{1}{2}} a = \\
& (m_1 + m_2) (D_{n-1}^{\frac{1}{2}} a)^* (D_{n-1}^{\frac{1}{2}} a) + m_3 (D_n^{\frac{1}{2}} a)^* (D_n^{\frac{1}{2}} a) = \\
& (m_1 + m_2) \left| (D_{n-1})^{\frac{1}{2}} a \right|^2 + m_3 \left| (D_n)^{\frac{1}{2}} a \right|^2 \leqslant \\
& \left\| (m_1 + m_2) \cdot \left| D_{n-1}^{\frac{1}{2}} a \right|^2 \right\|_{1_{\mathcal{A}}} + \left\| m_3 \cdot \left(\left| D_n^{\frac{1}{2}} a \right|^2 \right) \right\|_{1_{\mathcal{A}}} \leqslant \\
& |m_1 + m_2| \cdot \left\| D_{n-1}^{\frac{1}{2}} \right\|^2 \cdot \|a\|^2_{1_{\mathcal{A}}} + |m_3| \cdot \left\| D_n^{\frac{1}{2}} \right\|^2 \cdot \|a\|^2_{1_{\mathcal{A}}} \leqslant \\
& |m_1 + m_2| \cdot \left\| D_{n-1}^{\frac{1}{2}} \right\|^2 \cdot \|a\|^2_{1_{\mathcal{A}}} + |m_3| \cdot \left\| D_n^{\frac{1}{2}} \right\|^2_{1_{\mathcal{A}}}
\end{aligned}$$

整理得

$$\|D_n\|_{1_{\mathcal{A}}} \leqslant \frac{|m_1 + m_2| \cdot \|a\|^2}{1 - |m_3|} \|D_{n-1}\|_{1_{\mathcal{A}}}$$

令

$$\lambda = \frac{|m_1 + m_2| \cdot \|a\|^2}{1 - |m_3|}$$

因:

$$m_i > 0 \quad m_1 + m_2 + m_3 \leqslant 1 \quad \|a\| < 1$$

则

$$0 < \lambda < 1$$

因此有

$$\|D_n\|_{1_{\mathcal{A}}} \leqslant \lambda \|D_{n-1}\|_{1_{\mathcal{A}}} \leqslant \lambda^2 \|D_{n-2}\|_{1_{\mathcal{A}}} \leqslant \cdots \leqslant \lambda^n \|D_0\|_{1_{\mathcal{A}}}$$

即

$$d(x_n, x_{n+1}) \leqslant \lambda^n d(x_0, x_1)$$

$\forall m, n \in \mathbb{N}, m > n$, 由 $\|b\| \geqslant 1$ 及(BM3), 有

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_m) & \leqslant b d(x_n, x_{n+1}) + b^2 d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + b^{m-n-1} d(x_{m-2}, x_{m-1}) + b^{m-n-1} d(x_{m-1}, x_m) \leqslant \\
& b \lambda^n d(x_0, x_1) + b^2 \lambda^{n+1} d(x_0, x_1) + \cdots + b^{m-n-1} \lambda^{m-2} d(x_0, x_1) + b^{m-n-1} \lambda^{m-1} d(x_0, x_1) = \\
& (b \lambda^n + b^2 \lambda^{n+1} + b^3 \lambda^{n+2} + \cdots + b^{m-n-1} \lambda^{m-2} + b^{m-n-1} \lambda^{m-1}) d(x_0, x_1) = \\
& b \lambda^n (1 + b \lambda + b^2 \lambda^2 + \cdots + b^{m-n-2} \lambda^{m-n-2} + b^{m-n-2} \lambda^{m-n-1}) d(x_0, x_1) \leqslant \\
& b \lambda^n (1 + b \lambda + b^2 \lambda^2 + \cdots + b^{m-n-2} \lambda^{m-n-2} + b^{m-n-1} \lambda^{m-n-1}) d(x_0, x_1) = \\
& b \lambda^n \sum_{i=0}^{m-n-1} (b \lambda)^i d(x_0, x_1) = \\
& b \lambda^n \frac{1 - (b \lambda)^{m-n}}{1 - b \lambda} d(x_0, x_1)
\end{aligned}$$

又有

$$b \lambda = b \frac{|m_1 + m_2| \cdot \|a\|^2}{1 - |m_3|}$$

因

$$m_1 + m_2 + m_3 \leqslant 1 \quad m_i \geqslant 0, i = 1, 2, 3$$

且 $\|b\| \|a\|^2 < 1$, 则有

$$0 < b \lambda < 1$$

因此

$$1 - (b\lambda)^{m-n} < 1$$

于是得到

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{b\lambda^n}{1-b\lambda} d(x_0, x_1) \rightarrow 0 \quad m, n \rightarrow \infty$$

因此 $\{x_n\}$ 为柯西序列. 由 $(X, \mathcal{A}, d)$ 的完备性, 存在 $x \in X$, 有 $x_n \rightarrow x (n \rightarrow \infty)$. 故有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_{n-1} = x$$

下证 x 为 T 的不动点. 因为

$$\begin{aligned} 0_{\mathcal{A}} &\leq d(Tx, x) \leq \\ &b(d(Tx, Tx_n) + d(Tx_n, x)) \leq \\ &ba^*[m_1d(x, x_n) + m_2d(x, Tx) + m_3d(x_n, Tx_n)]a + bd(Tx_n, x) \leq \\ &ba^*[m_1d(x, x_n) + m_2d(x, Tx) + m_3d(x_n, x_{n+1})]a + bd(x_{n+1}, x) \end{aligned}$$

两边取极限, 有

$$\begin{aligned} d(Tx, x) &\leq ba^*[m_1d(x, x) + m_2d(x, Tx) + m_3d(x, x)]a + bd(x, x) = \\ &bm_2a^*d(Tx, x)a \end{aligned}$$

由:

$$\|b\| \|a\|^2 < 1 \quad |m_2| \leq 1 \quad \|a^*a\| = \|a\|^2$$

则有

$$\begin{aligned} 0 \leq \|d(Tx, x)\| &\leq \|b\| \cdot |m_2| \cdot \|a^*d(Tx, x)a\| = \\ &|m_2| \cdot \|b\| \|a\|^2 \|d(Tx, x)\| < \\ &|m_2| \cdot \|d(Tx, x)\| \end{aligned} \quad (2)$$

(2) 式只有当 $d(Tx, x) = 0_{\mathcal{A}}$ 时成立, 因此有

$$Tx = x$$

即 x 为 T 的不动点.

下证 x 是唯一的不动点. 设 y 是 T 的另一个不动点, 有 $Tx = x \neq y = Ty$, 则

$$\begin{aligned} 0_{\mathcal{A}} &\leq d(x, y) = \\ &d(Tx, Ty) \leq \\ &a^*[m_1d(x, y) + m_2d(x, Tx) + m_3d(y, Ty)]a = \\ &m_1a^*d(x, y)a = \\ &m_1(d(x, y)^{\frac{1}{2}}a)^* \cdot (d(x, y)^{\frac{1}{2}}a) \end{aligned}$$

由 $|m_1| \leq 1$, $\|a\| < 1$, 则有

$$\begin{aligned} 0 \leq \|d(x, y)\| &\leq \\ &|m_1| \|d(x, y)^{\frac{1}{2}}\|^2 \cdot \|a\|^2 < \\ &|m_1| \cdot \|d(x, y)\| \end{aligned} \quad (3)$$

(3) 式当且仅当 $d(x, y) = 0_{\mathcal{A}}$ 时成立. 因此

$$x = y$$

综上所述, x 为 T 的唯一不动点.

注 2 令 $\mathcal{A} = \mathbb{R}$, C^* -代数值 b -度量空间就变成了 b -度量空间, 由定理 1 可直接得到 b -度量空间中的 Banach 压缩定理.

令定理 1 中 $m_1 = 1$, $m_2 = m_3 = 0$ 即可得如下推论 1, 也就是文献[3]中的定理 2.1:

推论 1^[3] 设 $(X, \mathcal{A}, d)$ 是一个完备 C^* -代数值 b -度量空间, 压缩映象 $T: X \rightarrow X$. 若 $\forall x, y \in X$,

存在 $a \in \mathcal{A}$, $\|a\| < 1$ 且 $\|b\| \|a\|^2 < 1$, 有

$$d(Tx, Ty) \leqslant a^* d(x, y) a$$

则 T 有唯一不动点.

参考文献:

[1] BANACH S. Sur Les Opérations Dans Les Ensembles Abstraits et Leurs Applictions Aux Équations Intégrals [J]. Fundam Math, 1922(3): 133–181.

[2] CZERWIK S. Contraction Mappings in b -Metric Spaces [J]. Acta Mathemaica Et Informatica Universitatis Ostraviensis, 1993, 1(1): 5–11.

[3] KAMRAN T, POSTOLACHE M A, GHIURA S, et al. The Banach Contraction Principle in C^* -Algebra-Valued b -Metric Spaces with Application [J]. Fixed Point Theory and Appl, 2016, 2016(1): 1–7.

[4] MA Z, JIANG L, SUN H. C^* -Algebra Valued Metric Spaces and Related Fixed Point Theorems [J]. Fixed Point Theory Appl, 2014, 206: 1–11.

[5] MA Z H, JIANG LN, XIN Q L. Fixed Point Theorems on Operator-Valued Metric Space [J]. Beijing Inst Techol, 2014, 34(10): 1078–1080.

[6] BATUL S, KAMRAN T. C^* -Valued Contractive Type Mappings [J]. Fixed Point Theory and Applications, 2015, 2015(1): 1–9.

[7] 李 健, 邓 磊. 偏 b -度量空间中的公共不动点定理 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2015, 37(8): 87–91.

On the Existence and Uniqueness of Fixed Points in C^* -Algebra-Valued b -Metric Spaces

HUANG Lian, DENG Lei

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: In this paper, we introduce a class of new contraction mapping into C^* -algebra-valued b -metric spaces, and prove a new result concerning the existence and uniqueness of fixed points in such spaces.

Key words: C^* -algebra; C^* -algebra-valued b -metric space; fixed point

责任编辑 廖 坤

