第 39 卷第 2 期 西南大学学报(自然科学版) 2017 年 2 月
Vol. 39 No. 2 Journal of Southwest University (Natural Science Edition) Feb. 2017

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2017.02.012

复变量移动最小二乘近似误差分析①

孙新志

重庆师范大学 数学科学学院,重庆 401331

摘要: 复变量移动最小二乘近似是形成无网格法逼近函数的重要方法之一. 首先介绍了复变量移动最小二乘近似,接着在权函数及节点分布满足一定假设的条件下,详细讨论了复变量移动最小二乘近似逼近函数及其偏导数的误差估计,最后给出了数值算例.

关 键 词: 复变量移动最小二乘近似;无网格方法;误差分析

中图分类号: O241.82 **文献标志码:** A **文章编号:** 1673-9868(2017)02-0066-07

移动最小二乘近似是形成无网格方法逼近函数的重要方法之一[1-2],然而由于其形成的无网格方法需要选取较多的节点,程玉民等人提出了复变量移动最小二乘近似[3],该方法使用一维变量构造二维问题的形函数,可以克服二维问题中移动最小二乘近似形成的无网格方法配点过多的问题. 文献[4-10]讨论了移动最小二乘近似的逼近误差,文献[11]讨论了有限点法的误差,文献[12]对于改进的移动最小二乘近似在 Sobolev 空间中的误差分析做了相应的工作,文献[13]分析了插值型移动最小二乘近似的逼近误差. 无网格法作为一种新兴的数值计算方法,已经被广泛地应用于工程计算领域[14-15]. 以上这些成果都极大地丰富了无网格法的理论,然而基于复变量移动最小二乘近似的无网格方法的基本理论还很不完善. 本文在以上工作的基础上,讨论了复变量移动最小二乘近似的逼近误差,分析结果表明逼近误差随着节点间距的减小而降低,数值算例验证了结论的正确性. 本文的结果为基于复变量移动最小二乘近似的无网格方法的理论研究提供了基础.

1 复变量移动最小二乘近似

复变量移动最小二乘近似是对向量函数的逼近,取试函数

$$\overline{u}^h(z)=u_1^h(z)+\mathrm{i}u_2^h(z)=\sum_{j=0}^{m}p_j(z)a_j(z)=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(z)\boldsymbol{\alpha}(z) \qquad z=x+\mathrm{i}y\in\Omega\subset\mathbb{C}^2 \tag{1}$$

其中,$\overline{u}^h(z)$ 是对函数 $\overline{u}(z)=u_1(z)+\mathrm{i}u_2(z)$ 的逼近,$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(z)=(p_0(z),\ p_1(z),\ \cdots,\ p_m(z))$ 是取自多项式空间的基函数. 一般地,可选取基函数为

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(z)=(1,\ z,\ \cdots,\ z^m)$$

在点 z 的局部逼近定义为

$$\overline{u}^h(z,\ \overline{z})=\sum_{j=0}^{m}p_j(\overline{z})a_j(z)=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(\overline{z})\boldsymbol{\alpha}(z) \tag{2}$$

$a_j(z)$ 为待求,由下面定义的泛函 J 取极小值得到:

---

① 收稿日期:2015-12-04

基金项目:国家自然科学基金面上项目(11471063).

作者简介:孙新志(1992-),男,山西运城人,硕士研究生,主要从事微分方程数值解的研究.

$$J=\sum_{i=1}^{n}w(z-z_i)[\overline{u}^h(z,z_i)-\overline{u}(z_i)]^2=$$

$$\sum_{i=1}^{n}w(z-z_i)\Big[\sum_{j=1}^{m}p_j(z_i)a_j(z)-\overline{u}(z_i)\Big]^2 \tag{3}$$

z_i 为点 z 的紧支域内的节点，$w(z)$ 为具有紧支特性的权函数，$\{z_1, z_2, \cdots, z_n\}\subset\Omega\subset\mathbb{C}^2$ 为一个点集，我们用

$$h=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\min_{1\leqslant j\leqslant n}|z_i-z_j|$$

表示节点间距，$R=sh$ 表示节点影响域半径，其中 s 为一个固定常数，其决定了覆盖计算点的节点个数.且有

$$\overline{u}(z_i)=u_1(z_i)+\mathrm{i}u_2(z_i)$$

(3)式可以写成如下的矩阵形式：

$$J=(\boldsymbol{P\alpha}-\overline{\boldsymbol{u}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}(z)(\boldsymbol{P\alpha}-\overline{\boldsymbol{u}}) \tag{4}$$

其中：

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}p_0(z_1) & p_1(z_1) & \cdots & p_m(z_1)\\ p_0(z_2) & p_1(z_2) & \cdots & p_m(z_2)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ p_0(z_n) & p_1(z_n) & \cdots & p_m(z_n)\end{bmatrix} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{W}(z)=\begin{bmatrix}w(z-z_1) & 0 & \cdots & 0\\ 0 & w(z-z_2) & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & w(z-z_n)\end{bmatrix} \tag{6}$$

为了求得 $\boldsymbol{\alpha}(z)$，对 J 取极值，可得

$$\boldsymbol{A}(z)\boldsymbol{\alpha}(z)=\boldsymbol{B}(z)\overline{\boldsymbol{u}} \tag{7}$$

其中：

$$\boldsymbol{A}(z)=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}(z)\boldsymbol{P} \tag{8}$$

$$\boldsymbol{B}(z)=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}(z) \tag{9}$$

因此我们有

$$\boldsymbol{\alpha}(z)=\boldsymbol{A}^{-1}(z)\boldsymbol{B}(z)\overline{\boldsymbol{u}} \tag{10}$$

复变量移动最小二乘近似是基于节点的近似，假设待求函数在节点处的函数值已知，通过构造的泛函使得逼近函数在这些节点处的误差的加权平方和最小，从而求出待求函数在求解域内的全局近似.

逼近函数 $\overline{u}^h(z)$ 可以写成如下形式：

$$\overline{u}^h(z)=\sum_{i=1}^{n}\phi_i(z)\overline{u}(z_i) \tag{11}$$

其中

$$\phi_i(z)=[\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(z)\boldsymbol{A}^{-1}(z)\boldsymbol{B}(z)]_i \tag{12}$$

最后，可以得到：

$$u_1^h(z)=\mathrm{Re}[\phi(z)\overline{u}]=\mathrm{Re}\Big[\sum_{i=1}^{n}\phi_i(z)\overline{u}(z_i)\Big] \tag{13}$$

$$u_2^h(z)=\mathrm{lm}[(\phi(z)\overline{u}]=\mathrm{lm}\Big[\sum_{i=1}^{n}\phi_i(z)\overline{u}(z_i)\Big] \tag{14}$$

2　误差估计

为了估计误差，我们首先做如下的假设：

(i) 对 $\forall z\in\Omega$，存在与 h 无关的正整数 K_1 和 K_2，使得 $m+1\leqslant K_1\leqslant n\leqslant K_2$，即影响域包含计算点的节点个数至少是 K_1 个，至多是 K_2 个；

(ii) 存在与 h 无关的常数 $c_0>0$，使得对 $\forall z\in B_{\frac{R}{2}}(0)$，都有 $w(z)\geqslant c_0$；

(iii) 存在 c_p，使得 $\dfrac{h}{\delta}\leqslant c_p$，其中 $\delta=\min|z_i-z_j|$；

(iv) $w\in C^1(B_R(0))\cap W^{1,\infty}(\Omega)$，存在 c_1，使得 $\|w'\|_{L^\infty(\Omega)}\leqslant\dfrac{c_1}{h}$.

引理 1[5]　若假设 (i) 成立，且 $\overline{u}^h(z,\overline{z})$ 由(2)式确定，则对 $\forall\overline{u}\in C^{m+1}(\Omega)$，$\overline{u}(\overline{z})-\overline{u}^h(z,\overline{z})$ 关于 $\overline{z}$ 在 $B_R(z)\cap\Omega$ 内至少有 $m+1$ 个根.

推论 1　$u_1^h(z,\overline{z})-u_1(\overline{z})$ 和 $u_2^h(z,\overline{z})-u_2(\overline{z})$ 在 $B_R(z)\cap\Omega$ 内至少有 $m+1$ 个根.

因此，由插值误差估计，有下面的定理 1 成立：

定理 1[13]　若上述假设成立，且 $\overline{u}(\overline{z})\in C^{m+1}(\Omega)$，则存在常数 $C=C(m)$，使得对 $\forall z\in\Omega$ 和 $\forall\overline{z}\in B_R(z)\cap\Omega$，都有

$$|u_1(\overline{z})-u_1^h(z,\overline{z})|\leqslant C\|u_1^{(m+1)}\|_{L^\infty(\Omega)}h^{m+1}\tag{15}$$

特别地，当 $z=\overline{z}$ 时，有

$$\|u_1(z)-u_1^h(z)\|_{L^\infty(\Omega)}\leqslant C\|u_1^{(m+1)}\|_{L^\infty(\Omega)}h^{m+1}$$

同理，对 $u_2^h(z,\overline{z})-u_2(\overline{z})$ 有相同的估计.

注 1　本文中的字母 C 表示与 h 无关的常数，每次出现时可能并不相同. 这里要强调的是其与 h 无关.

定理 1 得到的是逼近函数的误差估计，下面估计逼近函数一阶偏导数的误差，为此要估计 $\dfrac{\partial\overline{u}^h}{\partial x}-\dfrac{\partial\overline{u}}{\partial x}$ 的误差，本文只讨论实部偏导的逼近误差，虚部偏导的逼近误差同理可以证明. 在此之前，先给出如下的引理：

引理 2　若 $\overline{u}\in C^{m+1}(\Omega)$，$z\in\Omega$，使得 $\dfrac{\partial u_1^h(z,\overline{z})}{\partial z}$ 存在，且假设 (i)—(iv) 成立，则存在常数 $C=C(c_0,c_1,c_p,m)$，使得对 $\forall\overline{z}\in B_R(z)\cap\Omega$，都有

$$\left|\frac{\partial u_1^h(z,\overline{z})}{\partial z}\right|\leqslant C\|u_1^{(m+1)}\|_{L^\infty(\Omega)}h^m\tag{16}$$

证　给定 $z\in\Omega$，由假设 (i) 知，存在 $m+1$ 个点 $z_{j_1},z_{j_2},\cdots,z_{j_{m+1}}\in B_R(z)$，对 $\forall l>0$，定义

$$S(z)=\sum_{k\in\{j_i\}}|u_1^h(z+l,z_k)-u_1^h(z,z_k)|^2\tag{17}$$

根据假设 (iii) 可以得到

$$\begin{aligned}S(z)\leqslant&\frac{1}{c_0}\sum_{k\in\{j_i\}}w(z-z_k)(u_1^h(z+l,z_k)-u_1^h(z,z_k))^2\leqslant\\&\frac{1}{c_0}\sum_{k=1}^{n}w(z-z_k)(u_1^h(z+l,z_k)-u_1^h(z,z_k))(u_1^h(z+l,z_k)-u_1(z_k))+\\&\frac{1}{c_0}\sum_{k=1}^{n}w(z-z_k)(u_1^h(z+l,z_k)-u_1^h(z,z_k))(u_1(z_k)-u_1^h(z,z_k))\end{aligned}\tag{18}$$

定义

$$Q(\overline{z})=u_1^h(z+l,\overline{z})-u_1^h(z,\overline{z})$$

且 $Q(\overline{z})$ 的阶数不大于 m，由于最小值在 $u_1^h(z,\overline{z})$ 处取到，故有

$$\langle u_1(\overline{z})-u_1^h(z,\overline{z}),Q(\overline{z})\rangle_z=\sum_{k=1}^{n}w(z-z_k)Q(z_k)(u_1(z_k)-u_1^h(z,z_k))=0\tag{19}$$

所以(18)式可以化为

$$S(z)\leqslant\frac{1}{c_0}\sum_{k=1}^{n}w(z-z_k)Q(z_k)(u_1^h(z+l,z_k)-u_1(z_k))\tag{20}$$

对足够小的 $l>0$，存在 θ_k，使得

$$w(z-z_k)=w(z+l-z_k)-w'(\theta_k)l$$

代入(20)式可得

$$S(z)\leqslant\frac{1}{c_0}\sum_{k=1}^{n}w(z+l-z_k)Q(z_k)(u_1^h(z+l,z_k)-u_1(z_k))-\frac{l}{c_0}\sum_{k=1}^{n}w'(\theta_k)Q(z_k)(u_1^h(z+l,z_k)-u_1(z_k))$$

由

$$\langle u_1(\bar z)-u_1^h(z+l,\bar z),Q(\bar z)\rangle_{z+l}=0$$

以及假设(iv)可以得到

$$S(z)\leqslant\frac{l}{c_0}\sum_{k=1}^{n}w'(\theta_k)Q(z_k)(u_1(z_k)-u_1^h(z+l,z_k))\leqslant\frac{c_1l}{c_0h}\sum_{z_k\in B_{2R}(z)}|Q(z_k)||(u_1^h(z+l,z_k)-u_1(z_k))| \tag{21}$$

由定理1可以得到

$$|u_1^h(z+l,z_k)-u_1(z_k)|\leqslant C\|u_1^{(m+1)}\|_{L^\infty(\Omega)}h^{m+1}$$

于是(21)式化为

$$S(z)\leqslant Cl\|u_1^{(m+1)}\|_{L^\infty(\Omega)}h^m\sum_{z_k\in B_{2R}(z)}|Q(z_k)| \tag{22}$$

由于 $Q(\bar z)$ 是阶数不超过 m 的多项式，所以有

$$Q(\bar z)=\sum_{k\in\{j_i\}}Q(z_k)l_k(\bar z) \tag{23}$$

其中 $l_k(\bar z)$ 是拉格朗日多项式基函数，故有

$$\sum_{z_k\in B_{2R}(z)}|Q(z_k)|\leqslant\sum_{i\in\{j_k\}}|Q(z_i)|\sum_{z_k\in B_{2R}(z)}|l_i(z_k)|$$

由假设(iii)可知

$$|l_k(\bar z)|\leqslant\left(\frac{2R}{\delta}\right)^m\leqslant C(c_p,m)$$

由霍尔德不等式以及(22)式可以得到

$$\Big(\sum_{k\in\{j_i\}}|Q(z_k)|\Big)^2\leqslant(m+1)\sum_{k\in\{j_i\}}|Q(z_k)|^2=(m+1)S(z)\leqslant Cl\|u_1^{(m+1)}\|_{L^\infty(\Omega)}h^m\Big(\sum_{k\in\{j_i\}}|Q(z_k)|\Big)$$

不等式两边同时除去 $\sum_{k\in\{j_i\}}|Q(z_k)|$，可以得到

$$\sum_{k\in\{j_i\}}|Q(z_k)|\leqslant Cl\|u_1^{(m+1)}\|_{L^\infty(\Omega)}h^m \tag{24}$$

由(23)以及(24)式可以得到，对 $\forall\bar z\in B_h(z)\cap\Omega$，都有

$$\lim_{l\to0}\frac{Q(\bar z)}{l}=\lim_{l\to0}\frac{\sum_{k\in\{j_i\}}Q(z_k)l_k(\bar z)}{l}\leqslant C\|u_1^{(m+1)}\|_{L^\infty(\Omega)}h^m \tag{25}$$

定理2 令 $\bar u\in C^{m+1}(\Omega)$，且假设(i)—(iv)成立，则存在常数 $C=C(c_0,c_1,c_p,m)$，使得有如下关系式成立：

$$\left\|\frac{\mathrm{d}u_1(z)}{\mathrm{d}z}-\frac{\mathrm{d}u_1^h(z)}{\mathrm{d}z}\right\|_{L^\infty(\Omega)}\leqslant C\|u_1^{(m+1)}\|_{L^\infty(\Omega)}h^m \tag{26}$$

证 由于权函数一阶连续可微，且基函数无穷阶可微，因此 $\bar u^h(z,\bar z)$ 处处连续可微，即 $u_1^h(z,\bar z)\in W^{1,\infty}(\Omega)$. 我们要估计

$$\left|\frac{\mathrm{d}u_1(z)}{\mathrm{d}z}-\frac{\mathrm{d}u_1^h(z)}{\mathrm{d}z}\right|=\left|\frac{\mathrm{d}u_1(z)}{\mathrm{d}z}-\frac{\mathrm{d}u_1^h(z,z)}{\mathrm{d}z}\right|$$

根据链式法则，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}u_1^h(z,z)=\left\{\frac{\partial u_1^h(z,\bar{z})}{\partial z}+\frac{\partial u_1^h(z,\bar{z})}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{z}}{\partial z}\right\}\Big|_{z=\bar{z}}$$

所以要估计的式子变为

$$\left|\frac{\partial u_1(\bar{z})}{\partial \bar{z}}-\frac{\partial u_1^h(z,\bar{z})}{\partial z}-\frac{\partial u_1^h(z,\bar{z})}{\partial \bar{z}}\right| \qquad \forall\, \bar{z}\in B_R(z)\cap\Omega \tag{27}$$

由于 $u_1^h(z,\bar{z})-u_1(\bar{z})$ 在 $B_R(z)\cap\Omega$ 内至少有 $m+1$ 个根，因此$\dfrac{\partial u_1(\bar{z})}{\partial \bar{z}}-\dfrac{\partial u_1^h(z,\bar{z})}{\partial \bar{z}}$ 在 $B_R(z)\cap\Omega$ 内至少有 m 个根，因此由插值误差估计可得

$$\left|\frac{\partial u_1(\bar{z})}{\partial \bar{z}}-\frac{\partial u_1^h(z,\bar{z})}{\partial \bar{z}}\right|\leqslant C\,\|u_1^{(m+1)}\|_{L^\infty(\Omega)}h^m \qquad \forall\, \bar{z}\in B_R(z)\cap\Omega \tag{28}$$

由引理 1 可以得到

$$\left|\frac{\partial u_1^h(z,\bar{z})}{\partial z}\right|\leqslant C\,\|u_1^{(m+1)}\|_{L^\infty(\Omega)}h^m \qquad \forall\, \bar{z}\in B_R(z)\cap\Omega \tag{29}$$

由(27),(28) 及(29) 式可得

$$\left|\frac{\partial u_1(\bar{z})}{\partial \bar{z}}-\frac{\partial u_1^h(z,\bar{z})}{\partial z}-\frac{\partial u_1^h(z,\bar{z})}{\partial \bar{z}}\right|\leqslant C\,\|u_1^{(m+1)}\|_{L^\infty(\Omega)}h^m \tag{30}$$

在(30) 式中取 $\bar{z}=z$，定理 2 得证.

下面的定理 3 说明$\dfrac{\partial u_1^h}{\partial x}-\dfrac{\partial u_1}{\partial x}$ 和$\dfrac{\partial u_1^h}{\partial y}-\dfrac{\partial u_1}{\partial y}$ 的误差与$\dfrac{\partial u_1^h}{\partial z}-\dfrac{\partial u_1}{\partial z}$ 的误差保持一致.

定理 3　若 $\bar{u}\in C^{m+1}(\Omega)$，假设(i)—(iv) 成立，则存在常数 $C=C(c_0,c_1,c_p,m)$，使得对于 $\forall\, z=x+\mathrm{i}y\in\Omega$，都有：

$$\left\|\frac{\partial u_1}{\partial x}-\frac{\partial u_1^h}{\partial x}\right\|_{L^\infty(\Omega)}=C\,\|u_1^{(m+1)}\|_{L^\infty(\Omega)}h^m$$

$$\left\|\frac{\partial u_1}{\partial y}-\frac{\partial u_1^h}{\partial y}\right\|_{L^\infty(\Omega)}=C\,\|u_1^{(m+1)}\|_{L^\infty(\Omega)}h^m$$

证　因为：

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}=\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}z}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}z}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial y}=\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}z}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\mathrm{i}\,\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}z}$$

因此有：

$$\left\|\frac{\partial u_1}{\partial x}-\frac{\partial u_1^h}{\partial x}\right\|_{L^\infty(\Omega)}=\left\|\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}z}-\frac{\mathrm{d}u_1^h}{\mathrm{d}z}\right\|_{L^\infty(\Omega)}=C\,\|u_1^{(m+1)}\|_{L^\infty(\Omega)}h^m$$

$$\left\|\frac{\partial u_1}{\partial y}-\frac{\partial u_1^h}{\partial y}\right\|_{L^\infty(\Omega)}=\left\|\mathrm{i}\left(\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}z}-\frac{\mathrm{d}u_1^h}{\mathrm{d}z}\right)\right\|_{L^\infty(\Omega)}=\sup\left\|\mathrm{i}\left(\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}z}-\frac{\mathrm{d}u_1^h}{\mathrm{d}z}\right)\right\|=$$

$$\sup\left|\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}z}-\frac{\mathrm{d}u_1^h}{\mathrm{d}z}\right|=\left\|\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}z}-\frac{\mathrm{d}u_1^h}{\mathrm{d}z}\right\|_{L^\infty(\Omega)}=C\,\|u_1^{(m+1)}\|_{L^\infty(\Omega)}h^m$$

3　数值算例

接下来，通过例子来验证本文的结论. 取函数如下：

$$u_1(x,y)=\sin x\cdot\log(y+1) \qquad 0\leqslant x,y\leqslant 2$$

$$u_2(x,y)=\sin y\cdot\log(x+1) \qquad 0\leqslant x,y\leqslant 2$$

基函数取为线性基，权函数取为高斯权函数，节点个数从6×6个一直加倍到161×161个，计算点选为(x_i, y_j)，其中：

$$x_i = 0.1 \times i - 0.1 \qquad y_j = 0.1 \times j - 0.1 \qquad i, j = 1, 2, \cdots, 21$$

逼近函数及其偏导数的 L^∞ 误差针对节点间距的变化情况如图1—图4所示：

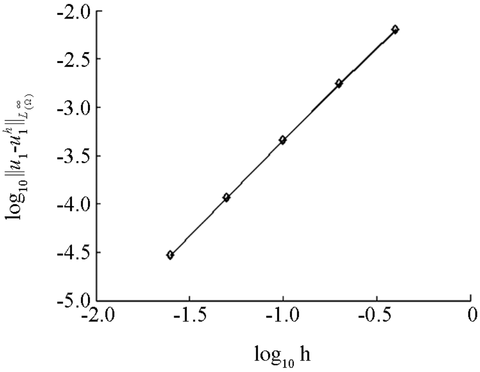

图1 u_1^h 在计算点处的 L^∞ 误差

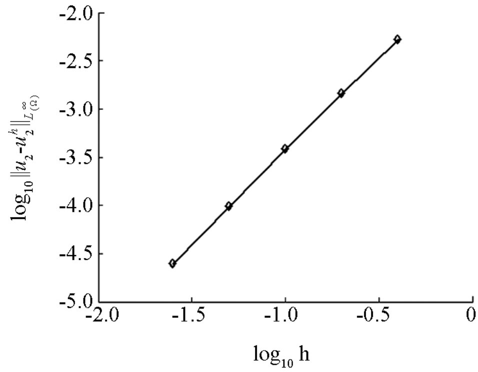

图2 u_2^h 在计算点处的 L^∞ 误差

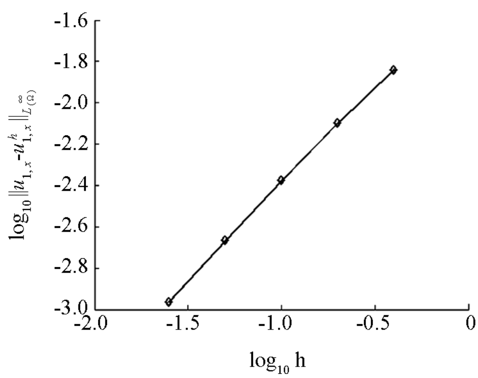

图3 $\frac{\partial u_1^h}{\partial x}$ 在计算点处的 L^∞ 误差

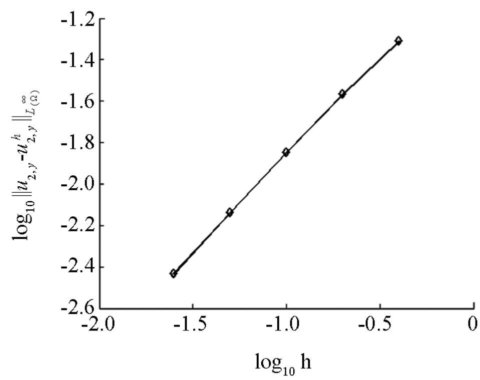

图4 $\frac{\partial u_2^h}{\partial y}$ 在计算点处的 L^∞ 误差

从图1—图4可以看出，随着节点间距的减小，逼近函数及其偏导的误差也随之减小，且逼近函数及其偏导的收敛阶分别为2和1，这与理论结果一致.

4 结　论

本文在对权函数做出适当假设的基础上，得到了复变量移动最小二乘近似逼近函数及其偏导的误差估计，结果表明，误差随节点间距的减小而降低.

参考文献：

[1] BELYTSCHKO T, LU Y Y, GU L. Element-Free Galerkin Methods [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1994, 37(2): 229-256.

[2] DUARTE C A, ODEN J T. *H-p* Clouds-an *h-p* Meshless Method [J]. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 1996, 12(6): 673-705.

[3] 程玉民，彭妙娟，李九红. 复变量移动最小二乘法及其应用 [J]. 力学学报，2005，37(6)：719-723.

[4] ARMENTANO M G. Error Estimates in Sobolev Spaces for Moving Least Square Approximations [J]. Society for Industrial & Applied Mathematics, 2001, 39(1): 38-51.

[5] ARMENTANO M G, DURÁN R G. Error Estimates for Moving Least Square Approximations [J]. Applied Numerical Mathematics, 2001, 37(3): 397-416.

[6] ZUPPA C. Error Estimates for Moving Least Square Approximations [J]. Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, 2003, 34(2): 231-249.

[7] ZUPPA C. Good Quality Point Sets and Error Estimates for Moving Least Square Approximations [J]. Bulletin Brazilian Mathematical Society, 2003, 47(3): 575-585.

[8] LI X L. Error Estimates for the Moving Least-Square Approximation and the Element Free Galerkin Method in n-Dimensional Spaces [J]. Applied Numerical Mathematics, 2016, 99(C): 77-97.

[9] LI X L. Meshless Galerkin Algorithms for Boundary Integral Equations with Moving Least Square Approximations [J]. Applied Numerical Mathematics, 2011, 61(12): 1237-1256.

[10] LI X L, ZHU J L. A Galerkin Boundary Node Method and Its Convergence Analysis [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2009, 230(1): 314-328.

[11] 程荣军. 无网格方法的误差估计和收敛性研究 [D]. 上海：上海大学，2007.

[12] LI X L, CHEN H, WANG Y. Error Analysis in Sobolev Spaces for the Improved Moving Least-Square Approximation and the Improved Element-Free Galerkin Method [J]. Applied Mathematics & Computation, 2015, 262(7): 56-78.

[13] 王聚丰. 插值型移动最小二乘法及其无网格方法的误差估计 [D]. 上海：上海大学，2013.

[14] 王延冲. Signorini 问题的无网格投影迭代法 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2014，39(9)：61-65.

[15] 杨　诚. 重调和外问题的奇异边界法 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2016，41(7)：27-32.

Error Analysis for the Complex Variable Moving Least Square (CVMLS) Approximation

SUN Xin-zhi

School of Mathematical Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China

Abstract: The complex variable moving least square (CVMLS) approximation is one of the most important methods to construct an approximation function with the meshless method. First, CVMLS is briefly introduced in this article. Then, the error estimates for the CVMLS approximation and its partial derivatives are discussed in detail under the condition that the weight function and the node distribution satisfy certain assumptions. Finally, a numerical example is given to confirm the theoretical analysis.

Key words: complex variable moving least square approximation; meshless method; error analysis

责任编辑　廖　坤