DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2017.03.009

一类多目标半无限规划的最优性与对偶性①

王荣波， 冯 强， 刘 瑞

延安大学 数学与计算机科学学院，陕西 延安 716000

摘要：给出了一类新的广义一致伪拟$(F, \alpha, \rho, d)-I$型凸函数，利用这类新的广义凸函数，得到了涉及广义一致强伪拟、弱严格伪拟、弱伪拟以及伪拟$(F, \alpha, \rho, d)-I$型凸函数的多目标半无限规划的最优性条件. 同时给出了Mond-Weir与Wolfe型混合对偶模型，得到了涉及广义一致伪拟、严格伪拟$(F, \alpha, \rho, d)-I$型凸函数的多目标半无限规划的弱对偶定理.

关 键 词：多目标半无限规划；广义一致伪拟$(F, \alpha, \rho, d)-I$型凸函数；最优性；对偶性

中图分类号：O221.2 **文献标志码**：A **文章编号**：1673-9868(2017)03-0055-07

多目标半无限规划问题是在若干约束条件下，研究有限多个目标函数的极值问题. 如果目标函数数量是一个，则此时多目标半无限规划就变为单目标半无限规划问题. 多目标半无限规划广泛应用于控制系统设计、竞争状态下的决策、多目标优化以及滤波设计等各种领域[1-2]. 单目标半无限规划邻域的研究已有很多[3]. 多目标半无限规划问题的研究始于80年代[4-6].

由于凸函数与广义凸性在多目标规划的最优性条件和对偶理论中有着非常重要的作用，与之相关的凸性推广引起了人们极大的兴趣：文献[7-15]讨论了各种凸性及其最优性与对偶形式；文献[16]给出了广义$(F, \alpha, \rho, d)-I$型凸函数，得到了一类非线性分式规划的最优性条件与对偶性结果；文献[17]给出了$(F, \alpha, \rho, d)-I$型凸函数，得到了一类不可微多目标规划的若干最优性条件与混合对偶型结果；文献[18]在二阶$(F, \alpha, \rho, d)-I$型凸函数的基础上，得到了一类多目标规划的对偶性结果；文献[19]在广义$(F, \alpha, \rho, d)-I$型凸函数，得到了一类极大极小分式规划的若干二阶对偶型结果；文献[20]在广义$(F, \alpha, \rho, d)-I$型凸函数，得到了一类对称不可微多目标分式变分问题的对偶型结果；文献[21]定义了高阶$(F, \alpha, \rho, d)-I$型凸函数，得到了一类多目标分式规划的高阶对称对偶型结果；文献[22]基于广义$(F, \alpha, \rho, d)-I$型凸函数，得到了一类不可微多目标高阶对称规划的对偶型结果.

本文在文献[16-22]的基础上，首先给出一类新的广义一致伪拟$(F, \alpha, \rho, d)-I$型凸函数，然后利用这类新的广义凸函数，得到了涉及广义一致强伪拟、弱严格伪拟、弱伪拟以及伪拟$(F, \alpha, \rho, d)-I$型凸函数的多目标半无限规划的最优性条件. 同时给出了Mond-Weir与Wolfe型混合对偶模型，得到了涉及广义一致伪拟、严格伪拟$(F, \alpha, \rho, d)-I$型凸函数的多目标半无限规划的弱对偶定理. 推广了文献[16-22]的成果，这些成果进一步丰富了最优化理论.

① 收稿日期：2015-06-04
基金项目：国家自然科学基金项目(61171195)；陕西省教育厅科研基金(12jk0867)；延安大学科研基金(YDQ2013-08).
作者简介：王荣波(1976-)，女，陕西绥德人，副教授，主要从事最优化理论与应用研究.

1 预备知识

设当 $\boldsymbol{x} \leqq \boldsymbol{y}$ 时，对于任意 i，有 $\boldsymbol{x}_i \leqq \boldsymbol{y}_i$ 成立；当 $\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{y}$ 时，对于任意 i，有 $\boldsymbol{x}_i \leqq \boldsymbol{y}_i$ 成立，且至少存在一个 $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ 使得 $\boldsymbol{x}_j < \boldsymbol{y}_j$ 成立. 当 $\boldsymbol{x} < \boldsymbol{y}$ 时，对于任意 i，有 $\boldsymbol{x}_i < \boldsymbol{y}_i$ 成立，我们用 $\boldsymbol{x} \not\leqslant \boldsymbol{y}$ 表示 $\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{y}$ 的否定形式.

本文约定，对于局部 Lipschitz 函数 $\varphi: X \longrightarrow \mathbb{R}$，用 Clarke 方向导数表示[4]，即

$$\varphi^0(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{v}) = \limsup_{\substack{\boldsymbol{x} \to \bar{\boldsymbol{x}} \\ t \to 0+}} \frac{1}{2}(\varphi(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{v}) - \varphi(\boldsymbol{x}))$$

φ 在点 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处的 Clarke 次微分定义为

$$\partial\varphi(\bar{\boldsymbol{x}}) = (\boldsymbol{x}^* \in \boldsymbol{E}^*: \varphi^0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) \geqq \langle \boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{v} \rangle)$$

其中 $\boldsymbol{E}^*$ 表示 $\boldsymbol{E}$ 的拓扑对偶，$\langle .\,, . \rangle$ 表示对偶对.

本文考虑如下多目标半无限规划问题(SIVP)

$$\begin{cases} \min f(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x}), \cdots, f_p(\boldsymbol{x})) \\ \text{s. t. } g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \leqq 0, \boldsymbol{x} \in X^0. \boldsymbol{u} \in U \end{cases}$$

其中：$X \subseteq U^n$ 是非空集，$f: X \longrightarrow \mathbb{R}^p$，$g: X \times U \longrightarrow \mathbb{R}$，$\boldsymbol{u} \in U$ 在 X 上是局部 Lipschitz 函数，$U \subset \mathbb{R}^m$ 是无限参数集. 记

$$X^0 = \{\boldsymbol{x} \mid g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \leqq 0, \boldsymbol{x} \in X, \boldsymbol{u} \in U\}, J(\bar{\boldsymbol{x}}) = \{j \mid g(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{u}^j) = 0, \bar{\boldsymbol{x}} \in X^0, \boldsymbol{u} \in U\}$$

设 $U^* = \{\boldsymbol{u} \in U \mid g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}^j) \leqq 0, j \in \Delta, \Delta$ 是相应的指标集$\}$ 是 U 的任意可数子集，$\Lambda = \{\boldsymbol{\mu}^j \mid \boldsymbol{\mu}^j \geqq 0, j \in \Delta$，有有限个 $\boldsymbol{\mu}^j \neq 0\}$. F 次线性泛函，$X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+ \backslash \{0\}$，，$\alpha_1, \alpha_2: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+ \backslash \{0\}$，$\varphi_i: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$，$\varphi_j: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$，$\rho_i\rho_j \in \mathbb{R}$，$\rho_j \in \mathbb{R}$，$\rho_j \in \mathbb{R}$.

定义 1 若对任意 $\boldsymbol{x} \in A$，(f, g) 在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处是广义一致伪拟$(F, \alpha, \rho, d) - I$ 型的，则有

$$\boldsymbol{b}_i(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}})\varphi_i[f_i(\boldsymbol{x}) - f_i(\bar{\boldsymbol{x}})] < 0 \Rightarrow F(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}}; \alpha_1(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}})\xi_i) + \rho_i d^2(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}}) < 0, \xi_i \in \partial f_i(\bar{\boldsymbol{x}}) \tag{1}$$

$$-\boldsymbol{b}_j(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}})\varphi_j[g(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{u}^j)] \leqq 0 \Rightarrow F(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}}; \alpha_2(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}})\eta_j) + \rho_j d^2(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}}) \leqq 0, \forall \eta_j \in \partial g(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{u}^j), \forall \boldsymbol{u}^j \in U^* \tag{2}$$

在上述定义中，如果不等式(1) 满足

$$\boldsymbol{b}_i(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}})\varphi_i[f_i(\boldsymbol{x}) - f_i(\bar{\boldsymbol{x}})] \leqq 0 \Rightarrow F(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}}; \alpha_1(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}})\xi_i) + \rho_i d^2(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}}) < 0, \xi_i \in \partial f_i(\bar{\boldsymbol{x}})$$

则我们称(f, g) 在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处是广义一致严格伪拟$(F, \alpha, \rho, d) - I$ 型的.

定义 2 若对任意 $\boldsymbol{x} \in A$，(f, g) 在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处是弱严格伪拟$(F, \alpha, \rho, d) - I$ 型的，则有

$$\boldsymbol{b}_i(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}})\varphi_i[f_i(\boldsymbol{x}) - f_i(\bar{\boldsymbol{x}})] \leqslant 0 \Rightarrow F(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}}; \alpha_1(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}})\xi_i) + \rho_i d^2(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}}) < 0, \forall \xi_i \in \partial f_i(\bar{\boldsymbol{x}}) \tag{3}$$

$$-\boldsymbol{b}_j(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}})\varphi_j[g(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{u}^j)] \leqq 0 \Rightarrow F(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}}; \alpha_2(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}})\eta_j) + \rho_j d^2(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}}) \leqq 0, \forall \eta_j \in \partial g(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{u}^j), \forall \boldsymbol{u}^j \in U^* \tag{4}$$

定义 3 若对任意 $\boldsymbol{x} \in A$，(f, g) 在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处是广义一致强伪拟$(F, \alpha, \rho, d) - I$ 型的，则有

$$\boldsymbol{b}_i(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}})\varphi_i[f_i(\boldsymbol{x}) - f_i(\bar{\boldsymbol{x}})] \leqslant 0 \Rightarrow F(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}}; \alpha_1(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}})\xi_i) + \rho_i d^2(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}}) \leqslant 0, \forall \xi_i \in \partial f_i(\bar{\boldsymbol{x}}) \tag{5}$$

$$-\boldsymbol{b}_j(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}})\varphi_j[g(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{u}^j)] \leqq 0 \Rightarrow F(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}}; \alpha_2(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}})\eta_j) + \rho_j d^2(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}}) \leqq 0, \forall \eta_j \in \partial g(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{u}^j), \forall \boldsymbol{u}^j \in U^* \tag{6}$$

定义 4 若对任意 $\boldsymbol{x} \in A$，(f, g) 在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处是广义一致弱伪拟$(F, \alpha, \rho, d) - I$ 型的，则有

$$\boldsymbol{b}_i(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}})\varphi_i[f_i(\boldsymbol{x}) - f_i(\bar{\boldsymbol{x}})] < 0 \Rightarrow F(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}}; \alpha_1(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}})\xi_i) + \rho_i d^2(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}}) \leqslant 0, \forall \xi_i \in \partial f_i(\bar{\boldsymbol{x}}) \tag{7}$$

$$-\boldsymbol{b}_j(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}})\varphi_j[g(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{u}^j)] \leqq 0 \Rightarrow F(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}}; \alpha_2(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}})\eta_j) +$$

$$\rho_j d^2(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}) \leqq 0,\ \forall \eta_j \in \partial g(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{u}^j),\ \forall \boldsymbol{u}^j \in U^* \tag{8}$$

2　最优性充分条件

定理 1　设规划(SIVP) 有可行解 $\bar{\boldsymbol{x}}$，向量 $\bar{\boldsymbol{\lambda}} \in \mathbb{R}_+^p$，$\bar{\boldsymbol{\lambda}} > 0$，$\bar{\boldsymbol{u}}_j \in \Lambda$，满足

1）$0 \in \sum_{i=1}^{p} \bar{\lambda}_i \partial f_i(\bar{\boldsymbol{x}}) + \sum_{j\in\Delta} \bar{\mu}_j \partial g(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{u}^j)$.

2）$\boldsymbol{\mu}_j g(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{u}^j)=0$，$j \in \Delta$.

3）$(\bar{\boldsymbol{\lambda}},\bar{\boldsymbol{u}}) \geqslant 0$，$\sum_{i=1}^{p} \bar{\lambda}_i = 1$.

4）(f,g) 在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处是广义一致强伪拟$(F,\alpha,\rho,d)-I$ 型的，$(j \in J(\bar{\boldsymbol{x}}))$.

5）当 $a<0$ 时，$\varphi_i(a)<0$；$a=0$ 时，$\varphi_i(a) \leqq 0$，$\varphi_j(a) \geqq 0$.

6）$\sum_{i=1}^{p} \boldsymbol{\lambda}_i \rho_i^1 \dfrac{1}{\alpha^1(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})} + \sum_{j\in J(\bar{\boldsymbol{x}})} \boldsymbol{\mu}_j \rho_j^2 \dfrac{1}{\alpha^2(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})} \geqq 0$.

则 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是规划(SIVP) 的有效解.

证　假设 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 不是规划(SIVP) 的有效解. 则存在 $\boldsymbol{x}^0 \in X^0$ 满足

$$f(\boldsymbol{x}^0) \leqslant f(\bar{\boldsymbol{x}})$$

由条件 5）得

$$b_i(\boldsymbol{x}^0,\bar{\boldsymbol{x}})\varphi_i(f_i(\boldsymbol{x}^0)-f_i(\bar{\boldsymbol{x}})) \leqslant 0 \tag{9}$$

当 $j \in J(\bar{\boldsymbol{x}})$，$g(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{u}^j)=0$，以及条件 5）得

$$-\boldsymbol{b}_j(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})\varphi_j(g(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{u}^j)) \leqq 0 \tag{10}$$

由(9),(10) 以及条件 4)，可得

$$F(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}};\alpha_1(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})\xi_i)+\rho_i d^2(\boldsymbol{x}^0,\bar{\boldsymbol{x}}) \leqslant 0,\ \forall \xi_i \in \partial f_i(\bar{\boldsymbol{x}}) \tag{11}$$

$$F(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}};\alpha_2(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})\eta_j)+\rho_j d^2(\boldsymbol{x}^0,\bar{\boldsymbol{x}}) \leqq 0,\ \forall \eta_j \in \partial g(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{u}^j) \tag{12}$$

由于 F 是次线性泛函，所以

$$\alpha_1(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})F(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}};\xi_i) \leqslant -\rho_i d^2(\boldsymbol{x}^0,\bar{\boldsymbol{x}}),\ \forall \xi_i \in \partial f_i(\bar{\boldsymbol{x}}) \tag{13}$$

$$\alpha_2(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})F(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}};\eta_j) \leqq -\rho_j d^2(\boldsymbol{x}^0,\bar{\boldsymbol{x}})\ \forall \eta_j \in \partial g(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{u}^j) \tag{14}$$

由(13),(14) 以及条件 3)，可得

$$\sum_{i=1}^{p} \boldsymbol{\lambda}_i F(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}};\xi_i) + \sum_{j\in J(\bar{\boldsymbol{x}})} \boldsymbol{\mu}_j F(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}};\eta_j) < -\left(\sum_{i=1}^{p} \boldsymbol{\lambda}_i \rho_i^1 \frac{1}{\alpha^1(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})} + \sum_{j\in J(\bar{\boldsymbol{x}})} \boldsymbol{\mu}_j \rho_j^2 \frac{1}{\alpha^2(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})}\right) d^2(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})$$

再由 F 的次线性泛函性以及条件 6）可得

$$F\left(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}};\ \sum_{i=1}^{p} \boldsymbol{\lambda}_i \xi_i + \sum_{j\in J(\bar{\boldsymbol{x}})} \boldsymbol{\mu}_j \eta_j\right) < 0$$

由条件 2)，我们有 $j \in \Delta / J(\bar{\boldsymbol{x}})$，$\boldsymbol{\mu}_j=0$，因此

$$F\left(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}};\ \sum_{i=1}^{p} \boldsymbol{\lambda}_i \xi_i + \sum_{j\in\Delta} \boldsymbol{\mu}_j \eta_j\right) < 0$$

这与条件 1) 矛盾. 因为 $F(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}};0)=0$，因此，$\bar{\boldsymbol{x}}$ 是规划(SIVP) 的一个有效解.

定理 2　设规划(SIVP) 有可行解 $\bar{\boldsymbol{x}}$，向量 $\bar{\boldsymbol{\lambda}} \in \mathbb{R}_+^p$，$\bar{\boldsymbol{\lambda}} > 0$，$\bar{\boldsymbol{u}}_j \in \Lambda$，满足

1）$0 \in \sum_{i=1}^{p} \bar{\boldsymbol{\lambda}}_i \partial f_i(\bar{\boldsymbol{x}}) + \sum_{j\in\Delta} \bar{\boldsymbol{\mu}}_j \partial g(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{u}^j)$.

2）$\boldsymbol{\mu}_j g(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{u}^j)=0$，$j \in \Delta$.

3) $\bar{\boldsymbol{\lambda}} \geqslant 0$.

4) (f, g) 在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处是广义一致弱严格伪拟$(F, \alpha, \rho, d)-I$ 型的, $j \in J(\bar{\boldsymbol{x}})$.

5) 当 $a < 0$ 时, $\varphi_i(a) < 0$; 当 $a = 0$ 时, $\varphi_i(a) \leqq 0$. $\varphi_j(a) \geqq 0$.

6) $\displaystyle\sum_{i=1}^{p}\boldsymbol{\lambda}_i\rho_i^1 \frac{1}{\alpha^1(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}})} + \sum_{j\in J(\bar{\boldsymbol{x}})}\boldsymbol{\mu}_j\rho_j^2 \frac{1}{\alpha^2(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}})} \geqq 0$.

则 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是规划(SIVP)的有效解.

证 假设 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 不是规划(SIVP)的有效解. 则存在 $\boldsymbol{x}^0 \in \boldsymbol{X}^0$ 满足 $f(\boldsymbol{x}^0) \leqslant f(\bar{\boldsymbol{x}})$, 由条件 5) 得

$$\boldsymbol{b}_i(\boldsymbol{x}^0, \bar{\boldsymbol{x}})\varphi_i(f_i(\boldsymbol{x}^0) - f_i(\bar{\boldsymbol{x}})) \leqslant 0 \tag{15}$$

当 $j \in J(\bar{\boldsymbol{x}})$, $g(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{u}^j) = 0$ 时, 由条件 5) 得

$$-\boldsymbol{b}_j(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}})\varphi_j(g(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{u}^j)) \leqq 0 \tag{16}$$

由(15),(16) 以及条件 4) 可得

$$F(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}}; \alpha_1(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}})\xi_i) + \rho_i d^2(\boldsymbol{x}^0, \bar{\boldsymbol{x}}) < 0, \ \forall \xi_i \in \partial f_i(\bar{\boldsymbol{x}}) \tag{17}$$

及

$$F(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}}; \alpha_2(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}})\eta_j) + \rho_j d^2(\boldsymbol{x}^0, \bar{\boldsymbol{x}}) \leqq 0, \ \forall \eta_j \in \partial g(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{u}^j) \tag{18}$$

余下的证明和定理 1 类似.

定理 3 设规划(SIVP)有可行解 $\bar{\boldsymbol{x}}$, 向量 $\bar{\boldsymbol{\lambda}} \in \mathbb{R}_+^p$, $\bar{\boldsymbol{\lambda}} > 0$, $\bar{\boldsymbol{u}}_j \in \Lambda$, 满足定理 2 中的条件 1)-5). 同时, 假设(f, g) 在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处是广义一致弱伪拟$(F, \alpha, \rho, d)-I$ 型的, $j \in J(\bar{\boldsymbol{x}})$, 则 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是规划(SIVP)的弱有效解.

证 假设 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 不是规划(SIVP)的弱有效解. 则存在 $\boldsymbol{x}^0 \in X^0$ 满足

$$f(\boldsymbol{x}^0) < f(\bar{\boldsymbol{x}})$$

由定理 2 中的 6) 得

$$\boldsymbol{b}_i(\boldsymbol{x}^0, \bar{\boldsymbol{x}})\varphi_i(f_i(\boldsymbol{x}^0) - f_i(\bar{\boldsymbol{x}})) < 0 \tag{19}$$

当 $j \in J(\bar{\boldsymbol{x}})$, $g(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{u}^j) = 0$ 时, 由定理 2 中的 5) 可得

$$-\boldsymbol{b}_j(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}})\varphi_j(g(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{u}^j)) \leqq 0 \tag{20}$$

再由(19), (20) 式以及(f, g) 在 $\bar{\boldsymbol{x}}(j \in J(\bar{\boldsymbol{x}}))$ 处是广义一致弱伪拟$(F, \alpha, \rho, d)-I$ 型, 可得

$$F(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}}; \alpha_1(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}})\xi_i) + \rho_i d^2(\boldsymbol{x}^0, \bar{\boldsymbol{x}}) \leqslant 0 \qquad \forall \xi_i \in \partial f_i(\bar{\boldsymbol{x}}) \tag{21}$$

及

$$F(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}}; \alpha_2(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}})\eta_j) + \rho_j d^2(\boldsymbol{x}^0, \bar{\boldsymbol{x}}) \leqq 0 \qquad \forall \eta_j \in \partial g(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{u}^j) \tag{22}$$

其余证明与定理 1 类似.

定理 4 设规划(SIVP)有可行解 $\bar{\boldsymbol{x}}$, 向量 $\bar{\boldsymbol{\lambda}} \in \mathbb{R}_+^p$, $\bar{\boldsymbol{u}}_j \in \Lambda$, 满足定理 2 中的条件 1)-5). 同时, 假设(f, g) 在 $\bar{\boldsymbol{x}}(j \in J(\bar{\boldsymbol{x}}))$ 处是广义一致伪拟$(F, \alpha, \rho, d)-I$ 型的, 则 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是规划($SIVP$)的有效解.

3 混合型对偶

设 $J_1 \subseteq \Delta$, $J_2 = \Delta \backslash J_1$, 我们考虑以下混合型对偶(XMOP)

$$\begin{cases} \max f(\boldsymbol{y}) + \displaystyle\sum_{j\in J_1}\boldsymbol{\mu}_j g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{u}^j)\boldsymbol{e} \\ \text{s.t. } 0 \in \partial\Big(\displaystyle\sum_{i=1}^{p}\boldsymbol{\lambda}_i f_i(\boldsymbol{y}) + \sum_{j\in J_1}\boldsymbol{\mu}_j g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{u}^j)\boldsymbol{e}\Big) + \partial\Big(\sum_{j\in J_2}\boldsymbol{\mu}_j g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{u}^j)\boldsymbol{e}\Big) \\ \displaystyle\sum_{j\in J_2}\boldsymbol{\mu}_j g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{u}^j)\boldsymbol{e} \geqq 0 \\ \boldsymbol{\mu}_j \in \Lambda, \boldsymbol{\lambda}_i \geqslant 0, \displaystyle\sum_{i=1}^{p}\boldsymbol{\lambda}_i = 1, \boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{e} = 1 \end{cases}$$

在混合型对偶(XMOP)中，我们分别用 $J_1=\varphi$ 表示 Mond-Weir 型对偶，用 $J_2=\varphi$ 表示 Wolfe 型对偶.

定理 5(弱对偶性)　设 $\boldsymbol{x}$ 与($\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{\lambda}$，$\boldsymbol{u}^j$，$\boldsymbol{\mu}$)分别是(SIVP)与(XMOP)的可行解，且满足条件

1) $\boldsymbol{\lambda}>0$，$\left(\sum_{i=1}^{p}\boldsymbol{\lambda}_i f_i(.)+\sum_{j\in J_1}\boldsymbol{\mu}_j g(.\,,\boldsymbol{u}^j),\ \sum_{j\in J_2}\boldsymbol{\mu}_j g(.\,,\boldsymbol{u}^j)\right)$ 在 $\boldsymbol{y}$ 处是广义一致伪拟(F，α，ρ，d)$-I$ 型.

2) 当 $a<0$ 时，$\varphi_1(a)<0$；当 $a\geqq 0$ 时，$\varphi_2(a)\geqq 0$.

3) $\rho_1\dfrac{1}{\alpha^1(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})}+\rho_2\dfrac{1}{\alpha^2(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})}\geqq 0$.

则

$$f(\boldsymbol{x})\leqslant f(\boldsymbol{y})+\sum_{j\in J_1}\boldsymbol{\mu}_j g(\boldsymbol{y},\boldsymbol{u}^j)\boldsymbol{e} \tag{23}$$

不成立.

证　假设(23)式成立，由于 $\boldsymbol{x}$ 是(XMOP)的可行解，我们可得

$$f(\boldsymbol{x})+\sum_{j\in J_1}\boldsymbol{\mu}_j g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}^j)\boldsymbol{e}\leqslant f(\boldsymbol{y})+\sum_{j\in J_1}\boldsymbol{\mu}_j g(\boldsymbol{y},\boldsymbol{u}^j)\boldsymbol{e}$$

由 $\boldsymbol{\lambda}>0$ 得

$$\sum_{i=1}^{p}\boldsymbol{\lambda}_i f_i(\boldsymbol{x})+\sum_{j\in J_1}\boldsymbol{\mu}_j g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}^j)<\sum_{i=1}^{p}\boldsymbol{\lambda}_i f_i(\boldsymbol{y})+\sum_{j\in J_1}\boldsymbol{\mu}_j g(\boldsymbol{y},\boldsymbol{u}^j)$$

利用条件 2) 得

$$\boldsymbol{b}_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\varphi_1\left(\sum_{i=1}^{p}\boldsymbol{\lambda}_i f_i(\boldsymbol{x})+\sum_{j\in J_1}\boldsymbol{\mu}_j g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}^j)-\sum_{i=1}^{p}\boldsymbol{\lambda}_i f_i(\boldsymbol{y})+\sum_{j\in J_1}\boldsymbol{\mu}_j g(\boldsymbol{y},\boldsymbol{u}^j)\right)<0 \tag{24}$$

由于($\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{\lambda}$，$\boldsymbol{u}^j$，$\boldsymbol{\mu}$)是(XMOP)可行解，因此有

$$\sum_{j\in J_2}\boldsymbol{\mu}_j g(\boldsymbol{y},\boldsymbol{u}^j)\geqq 0$$

由条件 2) 得

$$\boldsymbol{b}_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\varphi_2\left(\sum_{j\in J_2}\boldsymbol{\mu}_j g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}^j)\right)\leqq 0 \tag{25}$$

利用(24),(25)式以及条件 1) 可得

$$F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\alpha_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\xi)+\rho_1 d^2(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})<0,\ \forall\xi\in\partial\left(\sum_{i=1}^{p}\boldsymbol{\lambda}_i f_i(\boldsymbol{y})+\sum_{j\in J_1}\boldsymbol{\mu}_j g(\boldsymbol{y},\boldsymbol{u}^j)\right) \tag{26}$$

$$F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\alpha_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\eta)+\rho_2 d^2(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})\leqq 0,\ \forall\eta\in(\sum_{j\in J_2}\boldsymbol{\mu}_j g(\boldsymbol{y},\boldsymbol{u}^j)) \tag{27}$$

由 $\alpha_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})>0$，$\alpha_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})>0$ 以及(26),(27)式可得

$$\alpha_1(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})F(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}};\xi)\leqslant-\rho_1 d^2(\boldsymbol{x}^0,\bar{\boldsymbol{x}})\qquad\forall\xi\in\partial\left(\sum_{i=1}^{p}\boldsymbol{\lambda}_i f_i(\boldsymbol{y})+\sum_{j\in J_1}\boldsymbol{\mu}_j g(\boldsymbol{y},\boldsymbol{u}^j)\right)$$

$$a_2(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})F(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}};\eta)\leqq-\rho_2 d^2(\boldsymbol{x}^0,\bar{\boldsymbol{x}})\qquad\forall\eta\in\sum_{j\in J_2}\boldsymbol{\mu}_j g(\boldsymbol{y},\boldsymbol{u}^j)$$

由于 F 是次线性的，可得

$$F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\xi+\eta)<-\left(\rho_1\frac{1}{\alpha^1(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})}+\rho_2\frac{1}{\alpha^2(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})}\right)d^2(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})$$

由条件 3) 得 $F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\xi+\eta)<0$. 因为 $F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};0)=0$，这与对偶约束条件矛盾，因此，(23)式不成立.

定理 6(弱对偶性)　设 $\boldsymbol{x}$ 与($\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{\lambda}$，$\boldsymbol{u}^j$，$\boldsymbol{\mu}$)分别是(SIVP)与(XMOP)的可行解且以下条件成立：

1)$\boldsymbol{\lambda}>0$，$\left(\sum_{i=1}^{p}\boldsymbol{\lambda}_i f_i(.)+\sum_{j\in J_1}\boldsymbol{\mu}_j g(.\,,\boldsymbol{u}^j),\ \sum_{j\in J_2}\boldsymbol{\mu}_j g(.\,,\boldsymbol{u}^j)\right)$ 在 $\boldsymbol{y}$ 处是广义一致严格伪拟(F，α，ρ，d，)$-I$ 型的.

2) 当 $a \leqq 0$ 时, $\varphi_1(a) \leqq 0$; 当 $a \geqq 0$ 时, $\varphi_2(a) \geqq 0$.

3) $\rho_1 \dfrac{1}{\alpha^1(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}})} + \rho_2 \dfrac{1}{\alpha^2(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}})} \geqq 0$.

则

$$f(\boldsymbol{x}) \leqslant f(\boldsymbol{y}) + \sum_{j \in J_1} \boldsymbol{\mu}_j g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{u}^j)\boldsymbol{e}$$

不成立

证 定理的证明类似定理5.

参考文献:

[1] GOBERNA M A, LÓPEZ M A. Linear Semi-Infinite Optimization [M]. New Jersey: Wiley, 1998.

[2] LÓPEZ M A, STILL G. Semi-Infinite Programming [J]. European Journal of Operational Research, 2007, 180(2): 491-518.

[3] REEMTSEN R, RüCKMANN J J. Semi-Infinite Programming [M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1998.

[4] HANSON M A, MOND M. Further Generalizations of Convexity in Mathematical Programming [J]. Journal of Information and Optimization Science, 1982, 3(1): 25-32.

[5] HANSON M A, MOND M. Necessary and Sufficient Conditions in Constrained Optimization [J]. Mathematical Programming, 1987, 37(1): 51-58.

[6] RUEDA N G, HANSON M A. Optimality Criteria in Mathematical Programming Involving Generalized Invexity [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1988, 130(2): 375-385.

[7] CASTELLANI M. Nonsmooth Invex Functions and Sufficient Optimality Conditions [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2001, 255(1): 319-332.

[8] ANTCZAK T. Multiobjective Programming under d-Invexity [J]. European Journal of Operational Research, 2002, 137(1): 28-36.

[9] MISHRA S K, WANG S Y, LAI K K. Nondifferentiable Multiobjective Programming under Generalized Dinvexity [J]. European Journal of Operational Research, 2005, 160(1): 218-226.

[10] STANU-MINASIAN M I. Optimality and Duality in Nonlinear Programming Involving Semilocally B-Preinvex and Related Functions [J]. European Journal of Operational Research, 2006, 173(1): 47-58.

[11] 王荣波, 张庆祥, 冯 强. 一类非光滑多目标半无限规划的最优性条件 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2008, 30(3): 1-5.

[12] 王荣波, 冯 强. 一类多目标半无限规划的 Mond-Weir 型对偶 [J]. 浙江大学学报(理学版), 2012, 39(6): 627-629.

[13] 冯 强, 王荣波. 一类多目标半无限规划的最优性条件 [J]. 西北大学学报(自然科学版), 2012, 42(2): 195-197.

[14] 王荣波. 一类多目标半无限规划的最优性条件 [J]. 内蒙古师范大学学报(自然科学汉文版), 2013, 42(4): 383-386.

[15] 焦合华. 一类极大极小分式规划的最优性和对偶 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2014, 36(9): 75-80.

[16] LIANG Z A, HUANG H X, PARDALOS P M. Optimality Conditions and Duality for a Class of Nonlinear Fractional Programming Problems [J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2001, 110(3): 611-619.

[17] HACHIMI M, AGHEZZAF B. Sufficiency and Duality in Nondifferentiable Multiobjective Programming Involve Generalized Type Functions [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2006, 319(1): 110-123.

[18] AHMAD I, HUSAIN Z. Second Order (F, α, ρ, d) Convexity and Duality in Multiobjective Programming [J]. Information Sciences, 2006, 176(20): 3094-3103.

[19] JAYSWAL A, STANCU-MINASIAN I, AHMAD I. Second Order Duality for Minmax Fractional Programming Problem Involving (F, α, ρ, d)-Type I Functions [J]. Bulletin of the Malaysian Mathematical Society, 2014, 37(3): 893-905.

[20] KAILEY N, GUPTA S K. Duality for a Class of Symmetric Nondifferentiable Multiobjective Fractional Variational Problems with Generalized (F, α, ρ, d)-Convexity [J]. Mathematical and Computer Modelling, 2013, 57(5－6): 1453－1465.

[21] GAO Y. Higher-Order Symmetric Duality for a Class of Multiobjective Fractional Programming Problems [J]. Journal of Inequalities and Applications, 2012, 2012(1): 142－154.

[22] GUPTA S K, KAILEY N, KUMAR S. Duality for Nondifferentiable Multiobjective Higher-Order Symmmetric Programs over Cones Involving Generalized (F, α, ρ, d)-Convexity [J]. Journal of Inequalities and Applications, 2012, 2012(1): 298－314.

Optimality and Duality for a Class of Multiobjective Semi-Infinite Programming

WANG Rong-bo, FENG Qiang, LIU Rui

College of Mathematics and Computer Science, Yan'an University, Yan'an Shaaxi 716000, China

Abstract: A class of new generalized uniform pseudoquasi (F, α, ρ, d)-I type function are given. The optimality conditions for a class of multiobjective semi-infinite programming are obtained involving generalized uniform strong pseudoquasi, weak strictly pseudoquasi, weak pseudoquasi and pseudoquasi (F, α, ρ, d)-I type function. The mixed type duality model for the multiobjective semi-infinite programming problem are formulated and weak mixed type duality theorems are established relating generalized uniform pseudoquasi, strictly pseudoquasi weak (F, α, ρ, d)-I type function.

Key words: multiobjective semi-infinite programming; generalized uniform pseudoquasi (F, α, ρ, d)-I type function; optimality; duality

责任编辑　张　枸