DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2017.03.011

一类非线性弱奇异三重积分不等式中未知函数的估计及其应用①

欧阳云，　王五生

河池学院 数学与统计学院，广西 宜州 546300

摘要： 研究了一类积分项外包含了非常数项的非线性弱奇异三重积分不等式. 利用 conformable 分数阶导数与 conformable 分数阶积分的概念与运算法则、变量替换技巧和放大技巧等分析手段，给出了不等式中未知函数的上界估计. 最后举例说明所得结果可以用来研究 conformable 分数阶积分方程解的定性性质.

关 键 词： 弱奇异三重积分不等式；conformable 分数阶积分；conformable 分数阶导数；分析技巧；显上界估计

中图分类号： O175.5　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1673－9868(2017)03－0069－06

Gronwall 积分不等式[1] 是最著名的积分不等式，表述为：

$$u(t) \leqslant c + \int_a^t f(s)u(s)\mathrm{d}s$$

其中：u 和 f 是区间$[a, b]$上的非负连续函数，$c \geqslant 0$ 是常数，不等式中的未知函数 u 有估计式

$$u(t) \leqslant c\ \exp\left(\int_a^t f(s)\mathrm{d}s\right)$$

因为 Gronwall 积分不等式是研究微分方程、积分方程解的存在性、有界性、稳定性和唯一性等定性性质的重要工具，数学工作者不断地对它的形式进行各种推广，使它的应用范围不断扩大[2-15]. 1997 年，文献[2]研究了奇异积分不等式

$$u(t) \leqslant a(t) + \int_0^t (t-s)^{\beta-1} f(s) w(u(s))\mathrm{d}s \tag{1}$$

2008 年，文献[5]研究了弱奇异积分不等式

$$u^p(t) \leqslant a(t) + b(t)\int_0^t (t^\alpha - s^\alpha)^{\beta-1} s^{\gamma-1} f(s) u^q(s)\mathrm{d}s \tag{2}$$

2011 年，文献[6]研究了 Gronwall-ellman-Pachpatte 型积分不等式.

$$u(t) \leqslant u_0 + \int_0^t g(s)u(s)\left\{u(s) + \int_0^s h(\tau)\left[u(\tau) + \int_0^\tau r(\xi)u(\xi)\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{d}\tau\right\}\mathrm{d}s \tag{3}$$

本文受文献[2－3，5－9]的启发研究下面的弱奇异积分不等式

$$\begin{aligned} u(t) \leqslant e(t) + \int_a^t (s-a)^{\alpha-1} f(s) w_1(u(s))\Big\{u(s) + \int_a^s (\tau-a)^{\alpha-1} g(\tau) w_2(u(\tau)) \\ \left[u(\tau) + \int_a^\tau (\xi-a)^{\alpha-1} h(\xi) w_3(u(\xi))\mathrm{d}\xi\right]\ \mathrm{d}\tau\Big\}\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{4}$$

不等式(4)把文献[2]中的不等式(1)推广成包含多个奇异积分项的不等式，不等式(4)把文献[6]中的不等

---

① 收稿日期：2015－11－28
基金项目：国家自然科学基金项目(11561019)；国家自然科学基金项目(11161018)；广西高等学校科研项目(KY2015ZD103).
作者简介：欧阳云(1982－)，女，江西萍乡人，讲师，硕士，主要从事微分方程与积分不等式的研究.
通信作者：王五生，教授，博士.

式(3)推广成奇异不等式. 本文利用文献[8-9]中给出的新的分数阶导数与分数阶积分的概念与运算法则研究奇异积分不等式.

1 预备知识

为了研究积分不等式(4),我们需要叙述 conformable 分数阶导数和积分的概念和有关运算规律.

定义 1[8-9] 对于函数 $f:[a,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}_+$,如果极限

$$T_\alpha^a(f)(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t+\varepsilon(t-a)^{1-\alpha})-f(t)}{\varepsilon} \tag{5}$$

对所有 $t>a$ 存在,则称此极限为函数 f 的从 a 开始的 $0<\alpha\leqslant 1$ 阶 conformable 分数阶导数,并称函数 f 在区间 $[a,\infty)$ 上 α 可微.

定义 2[8-9] 函数 $f:[a,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}_+$ 的从 a 开始的 $0<\alpha\leqslant 1$ 阶 conformable 分数阶积分定义为

$$I_\alpha^a(f)(t)=\int_a^t(s-a)^{\alpha-1}f(s)\mathrm{d}s \tag{6}$$

引理 1[8-9] 假设 a,b,p,λ,α 是实常数,$\alpha\in(0,1]$. 假设函数 f,g 在区间 $[a,\infty)$ 上 α 可微. 令 $h(t)=f(g(t))$. 则有下面的运算规律:

$$T_\alpha^a(\lambda)=0 \tag{7}$$

$$T_\alpha^a(t^p)=pt^{p-\alpha} \tag{8}$$

$$T_\alpha^a(fg)=fT_\alpha^a(g)+gT_\alpha^a(f) \tag{9}$$

$$T_\alpha^a(h)(t)=T_\alpha^a(f)(g(t))T_\alpha^a(g)(t)\ g^{\alpha-1}(t) \tag{10}$$

$$T_\alpha^a(af+bg)=aT_\alpha^a(f)+bT_\alpha^a(g) \tag{11}$$

$$T_\alpha^a(I_\alpha^a(f))(t)=f(t) \tag{12}$$

$$I_\alpha^a(T_\alpha^a(f))(t)=f(t)-f(a) \tag{13}$$

如果 f 在区间 $[a,\infty)$ 上 α 可微,则有

$$T_\alpha^a(f)(t)=(t-a)^{1-\alpha}\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} \tag{14}$$

2 主要结果与证明

约定 $\mathbb{R}_+=[0,+\infty)$. 为了定理的叙述和证明简便,我们先用不等式(4)中的函数 w_1,w_2,w_3 定义 3 个新的函数 W_1,W_2,W_3:

$$W_1(z)=\int_1^z\frac{(s-a)^{\alpha-1}\mathrm{d}s}{w_1(s)s^\alpha}\qquad z\in\mathbb{R}_+$$

$$W_2(z)=\int_1^z\frac{(s-a)^{\alpha-1}w_1(W_1^{-1}(s))}{s^{\alpha-1}w_2(W_1^{-1}(s))}\mathrm{d}s\qquad z\in\mathbb{R}_+$$

$$W_3(z)=\int_1^z\frac{(s-a)^{\alpha-1}w_2(W_1^{-1}(W_2^{-1}(s)))W_1^{-1}(W_2^{-1}(s))\mathrm{d}s}{s^{\alpha-1}w_3(W_1^{-1}(W_2^{-1}(s)))}\qquad z\in\mathbb{R}_+ \tag{15}$$

定理 1 假设函数 $f,g,h,e\in C([a,\infty),\mathbb{R}_+)$,$e$ 是正的不减函数. 假设函数 $w_i\in C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)(i=1,2,3)$,$w_1(z)$,$w_2(z)$,$w_3(z)$,$\frac{w_2(z)}{w_1(z)}$,$\frac{w_3(z)}{zw_1(z)}$,$\frac{w_3(z)}{zw_2(z)}$ 都是正的不减函数. 如果 $u(t)$ 满足不等式(4),则有未知函数 $u(t)$ 的估计

$$u(t)\leqslant W_1^{-1}\{W_2^{-1}[W_3^{-1}(\Xi(t))]\},\ t\in[a,T_1] \tag{16}$$

其中:

$$\Xi(t)=W_3\left\{W_2\left[W_1(e(t))+\int_a^t(s-a)^{\alpha-1}f(s)\mathrm{d}s\right]+\int_a^t(s-a)^{\alpha-1}g(s)\mathrm{d}s\right\}+\int_a^t(s-a)^{\alpha-1}h(s)\mathrm{d}s \tag{17}$$

T_1 是满足下面条件的最大实数

$$\Xi(T_1) \leqslant W_3(\infty),\ W_3^{-1}(\Xi(T_1)) \leqslant W_2(\infty),\ W_2^{-1}(W_3^{-1}(\Xi(T_1))) \leqslant W_1(\infty) \tag{18}$$

证　因 $e(t)$ 是增函数，对于任意选定的实数 $T \in [a, T_1]$，由(4) 式可以推出

$$u(t) \leqslant e(T) + \int_a^t (s-a)^{\alpha-1} f(s) w_1(u(s)) \Big\{ u(s) + \int_a^s (\tau-a)^{\alpha-1} g(\tau) w_2(u(\tau)) \Big[u(\tau) + \int_a^\tau (\xi-a)^{\alpha-1} h(\xi) w_3(u(\xi)) \mathrm{d}\xi \Big] \mathrm{d}\tau \Big\} \mathrm{d}s,\ \forall t \in [a, T] \tag{19}$$

用 $z_1(t)$ 表示不等式(19) 的右端，即

$$z_1(t) = e(T) + \int_a^t (s-a)^{\alpha-1} f(s) w_1(u(s)) \Big\{ u(s) + \int_a^s (\tau-a)^{\alpha-1} g(\tau) w_2(u(\tau)) \Big[u(\tau) + \int_a^\tau (\xi-a)^{\alpha-1} h(\xi) w_3(u(\xi)) \mathrm{d}\xi \Big] \mathrm{d}\tau \Big\} \mathrm{d}s,\ \forall t \in [a, T] \tag{20}$$

显然，$z_1(t)$ 是区间$[a, T]$ 上正的不减函数，并且有

$$u(t) \leqslant z_1(t),\ t \in [a, T] \tag{21}$$

$$z_1(a) = e(T) \tag{22}$$

根据文献[8－9] 中给出的以 a 为积分下限的 conformable 左分数阶积分定义 2，(20) 式可以改写成

$$z_1(t) = e(T) + I_\alpha^a\{f(t) w_1(u(t))[u(t) + I_\alpha^a(g(t) w_2(u(t))(u(t) + I_\alpha^a(h(t) w_3(u(t)))))]\},\ \forall t \in [a, T] \tag{23}$$

求函数 $z_1(t)$ 的 α 阶 conformable 分数阶导数，利用引理 1 和关系式(21)，得到

$$T_\alpha^a(z_1)(t) = f(t) w_1(u(t))[u(t) + I_\alpha^a(g(t) w_2(u(t))(u(t) + I_\alpha^a(h(t) w_3(u(t)))))] \leqslant f(t) w_1(z_1(t)) z_2(t),\ \forall t \in [a, T] \tag{24}$$

其中 $z_2(t)$ 由(25) 式定义

$$z_2(t) = z_1(t) + I_\alpha^a(g(t) w_2(z_1(t))(z_1(t) + I_\alpha^a(h(t) w_3(z_1(t))))),\ \forall t \in [a, T] \tag{25}$$

可以看出 $z_2(t)$ 是$[a, T]$ 上正的不减函数. 由(22) 和(25) 式知

$$z_1(t) \leqslant z_2(t),\ t \in [a, \infty) \tag{26}$$

$$z_2(a) = e(T) \tag{27}$$

求函数 $z_2(t)$ 的 α 阶 conformable 分数阶导数，利用引理 1 与不等式(24) 和(26)，得到

$$T_\alpha^a(z_2)(t) \leqslant f(t) w_1(z_2(t)) z_2(t) + g(t) w_2(z_2(t)) z_3(t),\ \forall t \in [a, T] \tag{28}$$

其中 $z_3(t)$ 由下式定义

$$z_3(t) = z_2(t) + I_\alpha^a(h(t) w_3(z_2(t))),\ \forall t \in [a, T] \tag{29}$$

可以看出 $z_2(t)$ 是$[a, T]$ 上正的不减函数. 由(27) 和(29) 式知

$$z_2(t) \leqslant z_3(t),\ t \in [a, \infty) \tag{30}$$

$$z_3(a) = e(T) \tag{31}$$

求函数 $z_3(t)$ 的 α 阶 conformable 分数阶导数，利用引理 1 和不等式(28) 和(30)，得到

$$T_\alpha^a(z_3)(t) = T_\alpha^a(z_2)(t) + h(t) w_3(z_2(t)) \leqslant f(t) w_1(z_3(t)) z_3(t) + g(t) w_2(z_3(t)) z_3(t) + h(t) w_3(z_3(t)),\ \forall t \in [a, T] \tag{32}$$

不等式(32) 两边同除 $w_1(z_3(t)) z_3(t)$ 得到

$$\frac{T_\alpha^a(z_3)(t)}{w_1(z_3(t)) z_3(t)} \leqslant f(t) + g(t) \frac{w_2(z_3(t))}{w_1(z_3(t))} + h(t) \frac{w_3(z_3(t))}{w_1(z_3(t)) z_3(t)},\ \forall t \in [a, T] \tag{33}$$

根据引理 1 和 W_1 的定义，由(33) 式得到

$$T_\alpha^a W_1(z_3(t)) \leqslant f(t) + g(t) \frac{w_2(z_3(t))}{w_1(z_3(t))} + h(t) \frac{w_3(z_3(t))}{w_1(z_3(t)) z_3(t)},\ \forall t \in [a, T] \tag{34}$$

先把不等式(34) 中的 t 替换成 τ，然后不等式(34) 两边从 a 到 t 进行 α 阶 conformable 分数阶积分，根据引理 1 得到

$$W_1(z_3(t)) \leqslant W_1(e(T)) + \int_a^T (s-a)^{\alpha-1} f(s)\mathrm{d}s + \int_a^t (s-a)^{\alpha-1} g(s) \frac{w_2(z_3(s))}{w_1(z_3(s))}\mathrm{d}s + \int_a^t (s-a)^{\alpha-1} h(s) \frac{w_3(z_3(s))}{w_1(z_3(s))z_3(s)}\mathrm{d}s,\ \forall t \in [a,T] \tag{35}$$

用 z_4 表示不等式(35)的右端，则 z_4 是$[a,T]$上正的不减函数，且有

$$z_3(t) \leqslant W_1^{-1}(z_4(t)),\ t \in [a,T] \tag{36}$$

$$z_4(a) = W_1(e(T)) + \int_a^T (s-a)^{\alpha-1} f(s)\mathrm{d}s \tag{37}$$

求函数 $z_4(t)$ 的 α 阶 conformable 分数阶导数，利用引理 1 和不等式(36)得到

$$T_\alpha^a(z_4)(t) = g(s)\frac{w_2(z_3(t))}{w_1(z_3(t))} + h(t)\frac{w_3(z_3(t))}{w_1(z_3(t))z_3(t)} \leqslant g(s)\frac{w_2(W_1^{-1}(z_4(t)))}{w_1(W_1^{-1}(z_4(t)))} + h(t)\frac{w_3(W_1^{-1}(z_4(t)))}{w_1(W_1^{-1}(z_4(t)))W_1^{-1}(z_4(t))},\ \forall t \in [a,T] \tag{38}$$

不等式(38)两边同除$\dfrac{w_2(W_1^{-1}(z_4(t)))}{w_1(W_1^{-1}(z_4(t)))}$得到

$$\frac{w_1(W_1^{-1}(z_4(t)))T_\alpha^a(z_4)(t)}{w_2(W_1^{-1}(z_4(t)))} \leqslant g(s) + h(t)\frac{w_3(W_1^{-1}(z_4(t)))}{w_2(W_1^{-1}(z_4(t)))W_1^{-1}(z_4(t))},\ \forall t \in [a,T] \tag{39}$$

根据引理 1 和 W_2 的定义，由(39)式得到

$$T_\alpha^a(W_2(z_4(t))) \leqslant g(s) + h(t)\frac{w_3(W_1^{-1}(z_4(t)))}{w_2(W_1^{-1}(z_4(t)))W_1^{-1}(z_4(t))},\ \forall t \in [a,T] \tag{40}$$

先把不等式(40)中的 t 替换成 τ，然后不等式(40)两边从 a 到 t 进行 α 阶 conformable 分数阶积分，根据引理 1 得到

$$W_2(z_4(t)) \leqslant W_2(z_4(a)) + \int_a^T (s-a)^{\alpha-1} g(s)\mathrm{d}s + \int_a^t (s-a)^{\alpha-1} h(s)\frac{w_3(W_1^{-1}(z_4(s)))}{w_2(W_1^{-1}(z_4(s)))W_1^{-1}(z_4(s))}\mathrm{d}s,\ \forall t \in [a,T] \tag{41}$$

用 z_5 表示不等式(41)的右端，则 z_5 是$[a,T]$上正的不减函数，且有

$$z_4(t) \leqslant W_2^{-1}(z_5(t)),\ t \in [a,T] \tag{42}$$

$$z_5(a) = W_2(W_1(e(T)) + \int_a^T (s-a)^{\alpha-1} f(s)\mathrm{d}s) + \int_a^T (s-a)^{\alpha-1} g(s)\mathrm{d}s \tag{43}$$

求函数 $z_5(t)$ 的 α 阶 conformable 分数阶导数，利用引理 1 和不等式(42)得到

$$T_\alpha^a(z_5)(t) = h(t)\frac{w_3(W_1^{-1}(z_4(t)))}{w_2(W_1^{-1}(z_4(t)))W_1^{-1}(z_4(t))} \leqslant h(t)\frac{w_3(W_1^{-1}(W_2^{-1}(z_5(t))))}{w_2(W_1^{-1}(W_2^{-1}(z_5(t))))W_1^{-1}(W_2^{-1}(z_5(t)))},\ \forall t \in [a,T] \tag{44}$$

类似于对(38)式的推导，由(44)式推出

$$T_\alpha^a(W_3(z_5(t))) = \frac{w_2(W_1^{-1}(W_2^{-1}(z_5(t))))W_1^{-1}(W_2^{-1}(z_5(t)))}{z_5{}^{\alpha-1}(t)w_3(W_1^{-1}(W_2^{-1}(z_5(t))))} T_\alpha^a(z_5(t))z_5{}^{\alpha-1}(t) \leqslant h(t),\ \forall t \in [a,T] \tag{45}$$

由(46)式进一步推出

$$W_3(z_5(t)) \leqslant W_3(z_5(a)) + \int_a^t (s-a)^{\alpha-1} h(s)\mathrm{d}s,\ t \in [0,T] \tag{46}$$

综合(21),(30),(36)和(42)式得到

$$u(t) \leqslant z_1(t) \leqslant z_2(t) \leqslant z_3(t) \leqslant W_1^{-1}(z_4(t)) \leqslant W_1^{-1}(W_2^{-1}(z_5(t))),\ \forall t \in [a,T] \tag{47}$$

把(37),(43)和(46)式代入(47)式得到

$$u(t) \leqslant W_1^{-1}\Big\{W_2^{-1}\Big[W_3^{-1}(\ W_3(W_2(W_1(e(T)) + \int_a^T (s-a)^{\alpha-1} f(s)\mathrm{d}s) +$$

$$\int_a^T (s-a)^{\alpha-1} g(s)\mathrm{d}s) + \int_a^t (s-a)^{\alpha-1} h(s)\mathrm{d}s)\Big]\Big\},\ \forall t \in [a, T] \tag{48}$$

由于 $T \in [0, T_1]$ 的任意性，我们得到(4) 式中未知函数的估计(16).

3　应　用

我们用定理 1 的结果研究 一类 conformable 分数阶积分方程解的估计.

例　考虑下面的 conformable 分数阶积分方程：

$$x(t) = k + \int_a^t (s-a)^{\alpha-1} G\Big\{s, x(s), \int_a^s (\tau-a)^{\alpha-1} H \Big[\tau, x(\tau)\int_a^\tau (\xi-a)^{\alpha-1} K(\xi, x(\xi))\mathrm{d}\xi\Big]\mathrm{d}\tau\Big\}\mathrm{d}s,\ t \in [a, \infty) \tag{49}$$

其中：k 是常数；$G, H \in C([a, \infty) \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$，$K \in C([a, \infty) \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ 满足下面的条件：

$$|G(t, x, y)| \leqslant f(t) w_1(|x|)[|x| + |y|] \tag{50}$$

$$|H(t, x, y)| \leqslant g(t) w_2(|x|)[|x| + |y|] \tag{51}$$

$$|K(t, x)| \leqslant h(t) w_3(|x|) \tag{52}$$

这里函数 f, g, h, w_1, w_2, w_3 满足定理 1 中的条件.

利用条件(50),(51) 和(52)，由积分方程(49)，可以推出

$$|x(t)| \leqslant |k| + \int_a^t (s-a)^{\alpha-1} f(s) w_1(|x(s)|)\Big\{|x(s)| + \int_a^s (\tau-a)^{\alpha-1} g(\tau) w_2(|x(\tau)|) \Big[|x(\tau)| + \int_a^\tau (\xi-a)^{\alpha-1} h(\xi) w_3(|x(\xi)|)\mathrm{d}\xi\Big]\mathrm{d}\tau\Big\}\mathrm{d}s,\ t \in [a, \infty) \tag{53}$$

利用定理 1，我们就可以得到不等式(53) 中未知函数 $|x(t)|$ 的估计，从而得到方程(53) 解的估计为

$$|x(t)| \leqslant W_1^{-1}\{W_2^{-1}[W_3^{-1}(\Xi(t))]\},\ t \in [a, T_1]$$

其中：

$$\Xi(t) = W_3\Big\{W_2\Big[W_1(k) + \int_a^t (s-a)^{\alpha-1} f(s)\mathrm{d}s\Big] + \int_a^t (s-a)^{\alpha-1} g(s)\mathrm{d}s\Big\} + \int_a^t (s-a)^{\alpha-1} h(s)\mathrm{d}s$$

W_1, W_2, W_3 和定理 1 中的定义相同.

参考文献：

[1] GRONWALL T H. Note on the Derivatives with Respect to a Parameter of the Solutions of a System of Differential Equations [J]. Ann Math，1919，20(4)：292－296.

[2] MEDVED M. A New Approach to an Analysis of Henry Type Integral Inequalities and Their Bihari Type Versions [J]. J Math Anal Appl，1997，214(2)：349－366.

[3] AGARWAL R P，DENG Sheng-fu，ZHANG Wei-nian. Generalization of a Retarded Gronwall-like Inequality and Its Applications [J]. Appl Math Comput，2005，165(3)：599－612.

[4] MA Q H，PEČARIC J. Estimates on Solutions of Some New Nonlinear Retarded Volterra-Fredholm Type Integral Inequalities [J]. Nonlinear Anal，2008，69(2)：393－407.

[5] MA Q H，PEČARIC J. Some New Explicit Bounds for Weakly Singular Integral Inequalities with Applications to Fractional Differential and Integral Equations [J]. J Math Anal Appl，2008，341(2)：894－905.

[6] ABDELDAIM A，YAKOUT M. On Some New Integral Inequalities of Gronwall-Bellman-Pachpatte Type [J]. Appl Math Comput，2011，217(20)：7887－7899.

[7] ZHENG Bin. Explicit Bounds Derived by Some New Inequalities and Applications in Fractional Integral Equations [J]. Journal of Inequalities and Applications，2014，2014(4)：1－12.

[8] KHALIL R，Al HORANI M，YOUSEF A，et al. A New Denition of Fractional Derivative [J]. J Comput Appl Math，2014，264(5)：65－70.

[9] ABDELJAWAD T. On Conformable Fractional Calculus [J]. J Computational Appl Math, 2015, 279(C): 57－66.
[10] 许　佳，钟守铭. Gronwall 不等式的推广及其在分数阶微分方程中的应用 [J]. 西华大学学报(自然科学版)，2012，31(5)：62－64.
[11] 王五生，李自尊. 一类非连续函数积分不等式及其应用 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2012，34(2)：96－100.
[12] 杨必成，陈　强. 一个较为精确的半离散的 Hilbert 型不等式 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2013，35(6)：72－77.
[13] 巫伟亮. 一个新的 Hilbert 型积分不等式及其逆 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2013，38(12)：38－42.
[14] 梁　英. 一类时滞弱奇异 Wendroff 型积分不等式 [J]. 四川师范大学学报(自然科学版)，2014，37(4)：493－496.
[15] 卢钰松，王五生. 一类含有 p 次幂的 Volterra-Fredholm 型非线性迭代积分不等式 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2015，27(8)：76－80.
[16] 侯宗毅，王五生. 一类变下限非线性 Volterra-Fredholm 型积分不等式及其应用 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2016，41(2)：21－25.

Estimation of Unknown Functions of a Class of Nonlinear Weakly Singular Triple Integral Inequalities and Its Application

OU-YANG Yun，　WANG Wu-sheng
School of Mathematics and Statistics，Hechi University，Yizhou Guangxi 546300，China

Abstract: In this paper, we investigate a class of nonlinear weakly singular triple integral inequalities, which include a nonconstant term outside the integrals. The upper bounds of the embedded unknown functions are estimated explicitly by adopting novel analysis techniques, such as the definitions and rules of conformable fractional differential and conformable fractional integration, the techniques of change of variable, and the method of amplification. Finally, examples are cited to illustrate that the derived results can be applied in the study of qualitative properties of solutions of conformable fractional integral equations.

Key words: weakly singular triple integral inequality; conformable fractional integral; conformable fractional differential; analysis technique; estimation of explicit upper bounds

责任编辑　张　枸