DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2017.03.012

N 个耦合反应扩散方程的边界控制①

甄志远，　谢成康，　何翠华

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：主要研究了 n 个耦合反应扩散方程的边界控制问题. 首先运用矩阵的方法，简化原系统的表达，然后根据变换和相应条件得到核方程，进而得到核方程的解和控制律. 通过逆变换及 Lypunov 证明闭环系统是指数稳定的.

关　键　词：耦合系统；闭环系统；边界控制；稳定性

中图分类号：O231.2　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673－9868(2017)03－0075－06

在控制工程中，反应扩散方程的边界控制已有很多研究[1-4]. 但大多是单个反应扩散方程的控制. 现在，多个反应扩散方程边界控制也有一些研究成果[5-9]. 本文考虑如下控制系统：

$$\partial_t u_i(x,t)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\partial_{xx}u_j(x,t)+\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}u_j(x,t),\ x\in(0,1),\ t>0$$

$$\partial_x u_i(0,t)=0$$

$$u_i(1,t)=v_i(t)$$

其中：标量 $u_i(x,t)\in\mathbb{R}$, $i=1,\cdots,n$ 是反应扩散方程的状态；λ_{ij} 是常数；$v_i(t)\in\mathbb{R}$, $i=1,\cdots,n$ 是边界控制输入. 把上面的系统写成如下的矩阵形式

$$\boldsymbol{U}_t(x,t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}_{xx}(x,t)+\Lambda\boldsymbol{U}(x,t),\ x\in(0,1),\ t>0 \tag{1}$$

$$\boldsymbol{U}(0,t)=\boldsymbol{0} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{U}(1,t)=\boldsymbol{V}(t) \tag{3}$$

其中

$$\boldsymbol{U}(x,t)=(u_1(x,t),u_2(x,t),\cdots u_n(x,t))^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\qquad \Lambda=\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_{n1} & \cdots & \lambda_{nn}\end{pmatrix}$$

假设 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵；矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 Λ 是可交换矩阵；$\boldsymbol{0}$ 是零矩阵；$\boldsymbol{V}(t)$ 是边界控制输入. 控制设计的目标是让整个闭环系统的状态量 $(u_1(x,t),u_2(x,t),\cdots,u_n(x,t))$ 在某种范数意义下指数稳定.

本文所使用的变换是矩阵形式的反应扩散方程的 Backstepping 方法，使复杂的系统简单化，但求变换和逆变换时，需要运用数学矩阵运算方法. 然后用 Lypunov 方法证明闭环系统在控制律下是指数稳定的.

---

① 收稿日期：2015－09－28

基金项目：国家自然科学基金项目(11301427)；贵州省科技厅联合基金资助项目(黔科合 LH 字(2015)7007 号).

作者简介：甄志远(1989－)，男，河南商丘人，硕士研究生，主要从事偏微分方程系统控制的研究.

通信作者：谢成康，教授.

1 控制律设计

本文通过矩阵形式的 Backstepping 方法来建立控制律 $V(t)$，使系统(1)—(3) 指数稳定.

1.1 核方程和控制律

为了使 $\boldsymbol{U}(t)\rightarrow\boldsymbol{W}(t)$，有下面的变换：

$$\boldsymbol{W}(x,t)=\boldsymbol{U}(x,t)-\int_0^x \boldsymbol{K}(x,y)\boldsymbol{U}(y,t)\mathrm{d}y \tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{K}(x,y)\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 为待定的核函数.

选取目标系统：

$$\boldsymbol{W}_t(x,t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{W}_{xx}(x,t) \tag{5}$$

$$\boldsymbol{W}(0,t)=\boldsymbol{0} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{W}(1,t)=\boldsymbol{0} \tag{7}$$

其中 $\boldsymbol{W}(x,t)=(w_1(x,t),w_2(x,t),\cdots,w_n(x,t))^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n$，可以证明目标系统 $\boldsymbol{W}(x,t)$ 在 $L^2[0,1]$ 范数下指数稳定.

为了使原系统(1)—(3) 在变换(4) 下化为目标系统(5)—(7). 首先对 $\boldsymbol{W}(x,t)$ 关于 x 和时间 t 求导

$$\begin{aligned}\boldsymbol{W}_{xx}(x,t)=&\boldsymbol{U}_{xx}(x,t)-\boldsymbol{K}(x,x)\boldsymbol{U}_x(x,t)-(\boldsymbol{K}'(x,x)+\\&\boldsymbol{K}_x(x,x))\boldsymbol{U}(x,t)-\int_0^x\boldsymbol{K}_{xx}(x,y)\boldsymbol{U}(y,t)\mathrm{d}y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{W}_t(x,t)=&\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}_{xx}(x,t)+\Lambda\boldsymbol{U}(x,t)-\boldsymbol{K}(x,x)\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}_x(x,t)+\boldsymbol{K}(x,0)\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}_x(0,t)+\\&\int_0^x\boldsymbol{K}_y(x,y)\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}_y(y,t)\mathrm{d}y-\int_0^x\boldsymbol{K}(x,y)\Lambda\boldsymbol{U}(y,t)\mathrm{d}y=\\&\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}_{xx}(x,t)+\Lambda\boldsymbol{U}(x,t)-\boldsymbol{K}(x,x)\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}_x(x,t)+\\&\boldsymbol{K}(x,0)\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}_x(0,t)+\boldsymbol{K}_y(x,x)\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}(x,t)-\\&\int_0^x\boldsymbol{K}_{yy}(x,y)\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}(y,t)\mathrm{d}y-\int_0^x\boldsymbol{K}(x,y)\Lambda\boldsymbol{U}(y,t)\mathrm{d}y\end{aligned}$$

可以得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{W}_t(x,t)-\boldsymbol{A}\boldsymbol{W}_{xx}(x,t)=&(\boldsymbol{A}\boldsymbol{K}'(x,x)+\boldsymbol{A}\boldsymbol{K}_x(x,x)+\boldsymbol{K}_y(x,x)\boldsymbol{A}+\Lambda)\boldsymbol{U}(x,t)-\\&\boldsymbol{K}(x,0)\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}_x(0,t)-\\&(\boldsymbol{K}(x,x)\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{K}(x,x))\boldsymbol{U}_x(x,t)+\int_0^x(\boldsymbol{A}\boldsymbol{K}_{xx}(x,y)-\\&\boldsymbol{K}_{yy}(x,y)\boldsymbol{A}-\boldsymbol{K}(x,y)\Lambda)\boldsymbol{U}(y,t)\mathrm{d}y\end{aligned} \tag{8}$$

其中

$$\boldsymbol{K}'(x,x)=\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{K}(x,y)\bigg|_{y=x}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{K}(x,y)\bigg|_{y=x}$$

为了使 $\boldsymbol{W}(x,t)$ 满足目标系统(1)，$\boldsymbol{K}(x,y)$ 满足下面方程组

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{K}_{xx}(x,y)-\boldsymbol{K}_{yy}(x,y)\boldsymbol{A}-\boldsymbol{K}(x,y)\Lambda=\boldsymbol{0} \tag{9}$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{K}'(x,x)+\boldsymbol{A}\boldsymbol{K}_x(x,x)+\boldsymbol{K}_y(x,x)\boldsymbol{A}+\Lambda=\boldsymbol{0} \tag{10}$$

$$\boldsymbol{K}(x,x)\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{K}(x,x)=\boldsymbol{0} \tag{11}$$

$$\boldsymbol{K}(x,0)=\boldsymbol{0} \tag{12}$$

由变换(4) 知

$$W(0,t)=U(0,t)$$

所以 $W(x,t)$ 满足边界条件(6). 由变换(4) 知，

$$\boldsymbol{W}(1,t)=\boldsymbol{U}(1,t)-\int_0^1\boldsymbol{K}(1,y)\boldsymbol{U}(y,t)\mathrm{d}y=\boldsymbol{V}(t)-\int_0^1\boldsymbol{K}(1,y)\boldsymbol{U}(y,t)\mathrm{d}y$$

为了满足边界条件(7)，选择控制律

$$\boldsymbol{V}(t)=\int_0^1 \boldsymbol{K}(1,y)\boldsymbol{U}(y,t)\mathrm{d}y \tag{13}$$

控制律通过边界 $x=1$ 处使系统(1)－(3)指数稳定.

1.2　核方程的解

假设方程组(9)－(12)存在一个 $\boldsymbol{K}(x,y)\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 和 $\Lambda\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 可交换，则方程组(9)－(12)可变成

$$\begin{cases}\boldsymbol{K}_{xx}(x,y)-\boldsymbol{K}_{yy}(x,y)=\boldsymbol{K}(x,y)\Lambda\boldsymbol{A}^{-1}\\ \boldsymbol{K}(x,x)=-\dfrac{1}{2}\Lambda\boldsymbol{A}^{-1}x\\ \boldsymbol{K}(x,0)=\boldsymbol{0}\end{cases} \tag{14}$$

参见文献[1]，方程组(14)的解

$$\boldsymbol{K}(x,y)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2y(x^2-y^2)^{n-1}}{4^n(n-1)!\ n!}(\Lambda\boldsymbol{A}^{-1})^n \tag{15}$$

参考文献[10]，可以证明 $\boldsymbol{K}(x,y)$ 是一致收敛的，$\boldsymbol{K}(x,y)$，$\boldsymbol{K}_x(x,y)$ 和 $\boldsymbol{K}_y(x,y)$ 是可微的. 然后证明(15)式满足方程组(9)－(12).

首先，需要证明 $\boldsymbol{K}(x,y)$ 和 $\boldsymbol{A}$ 为可交换矩阵，由于 Λ 和 $\boldsymbol{A}$ 是可交换矩阵，则 Λ 和 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也是可交换矩阵，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K}(x,y)\boldsymbol{A}&=\left(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2y(x^2-y^2)^{n-1}}{4^n(n-1)!\ n!}(\Lambda\boldsymbol{A}^{-1})^n\right)\boldsymbol{A}=\\&-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2y(x^2-y^2)^{n-1}}{4^n(n-1)!\ n!}(\Lambda\boldsymbol{A}^{-1})^{n-i}\boldsymbol{A}(\Lambda\boldsymbol{A}^{-1})^i=\\&-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2y(x^2-y^2)^{n-1}}{4^n(n-1)!\ n!}\boldsymbol{A}(\Lambda\boldsymbol{A}^{-1})^n=\boldsymbol{A}\boldsymbol{K}(x,y)\end{aligned}$$

因此，$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{K}(x,y)$ 是可交换矩阵，则 $\boldsymbol{K}(x,y)$ 式满足(11)式. 接着证明(15)式满足(9)式，有

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{A}\boldsymbol{K}_{xx}(x,y)-\boldsymbol{K}_{yy}(x,y)\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial^2\boldsymbol{K}_n(x,y)}{\partial^2 x}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial^2\boldsymbol{K}_n(x,y)}{\partial^2 y}\boldsymbol{A}=\\&-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4y(x^2-y^2)^{n-2}}{4^n(n-1)!\ n!}(\Lambda\boldsymbol{A}^{-1})^{n-1}\Lambda-\sum_{n=3}^{\infty}\frac{8x^2y(n-1)(n-2)(x^2-y^2)^{n-3}}{4^n(n-1)!\ n!}(\Lambda\boldsymbol{A}^{-1})^{n-1}\Lambda-\\&\sum_{n=2}^{\infty}\frac{12y(n-1)(x^2-y^2)^{n-2}}{4^n(n-1)!\ n!}(\Lambda\boldsymbol{A}^{-1})^{n-1}\Lambda+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{8y^3(n-1)(n-2)(x^2-y^2)^{n-3}}{4^n(n-1)!\ n!}(\Lambda\boldsymbol{A}^{-1})^{n-}\Lambda=\\&-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{16y(n-1)(x^2-y^2)^{n-2}}{4^n(n-1)!\ n!}\left(\frac{1}{4}\Lambda\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{n-1}\Lambda-\sum_{n=3}^{\infty}\frac{8y(n-1)(n-2)(x^2-y^2)^{n-2}}{4_n(n-1)!\ n!}(\Lambda\boldsymbol{A}^{-1})^{n-1}\Lambda=\\&-\Lambda-\sum_{n=3}^{\infty}\frac{2y(n-1)(n)(x^2-y^2)^{n-2}}{4^n(n-1)!\ n!}(\Lambda\boldsymbol{A}^{-1})^{n-1}\Lambda=\boldsymbol{K}(x,y)\Lambda\end{aligned}$$

则 $\boldsymbol{K}(x,y)$ 满足(9)式，下面需要证明 $\boldsymbol{K}(x,y)$ 满足(10)式，令 $y=x$，有

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{A}\boldsymbol{K}'(x,x)+\boldsymbol{A}\boldsymbol{K}_x(x,x)+\boldsymbol{K}_y(x,x)\boldsymbol{A}=\\&2\boldsymbol{A}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4x^2(n-1)(x^2-x^2)^{n-2}}{4^n(n-1)!\ n!}(\Lambda\boldsymbol{A}^{-1})^n-2\boldsymbol{A}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(x^2-x^2)^{n-1}}{4^n(n-1)!\ n!}(\Lambda\boldsymbol{A}^{-1})^n-\\&2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4x^2(x^2-x^2)^{n-2}}{4^n(n-1)!\ n!}(\Lambda\boldsymbol{A}^{-1})^n\boldsymbol{A}=\\&\frac{x^2}{4}\boldsymbol{A}(\Lambda\boldsymbol{A}^{-1})^2-\boldsymbol{A}\Lambda\boldsymbol{A}^{-1}-\frac{x^2}{4}(\Lambda\boldsymbol{A}^{-1})^2\boldsymbol{A}=-\Lambda\end{aligned}$$

因此，$\boldsymbol{K}(x,y)$ 满足(10)式. 接着，令 $y=0$ 代入(15)式，有 $\boldsymbol{K}(x,0)=\boldsymbol{0}$，因此 $\boldsymbol{K}(x,y)$ 满足(12)式. 于

是 $\boldsymbol{K}(x, y)$ 满足方程组(9)—(12)，$\boldsymbol{K}(x, y)$ 是方程组(9)—(12) 的一个解，故得核方程 $\boldsymbol{K}(x, y)$.

2 稳定性

在变换(4)下，闭环系统(1)—(3)变换到稳定的目标系统(5)—(7). 要证明闭环系统的稳定性，需证明逆变换存在.

2.1 逆变换

设逆变换 $\boldsymbol{W}(t) \longrightarrow \boldsymbol{U}(t)$ 为：

$$\boldsymbol{V}(x, t) = \boldsymbol{W}(x, t) + \int_0^x \boldsymbol{L}(x, y)\boldsymbol{W}(y, t)\mathrm{d}y \tag{16}$$

其中 $\boldsymbol{L}(x, y) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为待定的核函数. $\boldsymbol{L}(x, y) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 的求解与求 $\boldsymbol{K}(x, y) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 的方法类似，计算 $\boldsymbol{U}_{xx}$ 和 $\boldsymbol{U}_t$ 并使其满足系统(1)—(3)，就可以得到关于核函数 $\boldsymbol{L}(x, y) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 的方程组

$$\begin{cases} \boldsymbol{A}\boldsymbol{L}_{xx}(x, y) - \boldsymbol{L}_{yy}(x, y)\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{L}(x, y)\Lambda \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{L}'(x, x) + \boldsymbol{A}\boldsymbol{L}_x(x, x) + \boldsymbol{L}_y(x, x)\boldsymbol{A} = -\Lambda \\ \boldsymbol{L}(x, x)\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{L}(x, x) = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{L}(x, 0) = \boldsymbol{0} \end{cases} \tag{17}$$

逆变换的核方程求解见 1.2，得到逆变换的解

$$\boldsymbol{L}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1} y (x^2 - y^2)^{n-1}}{4^n (n-1)!\ n!} (\Lambda \boldsymbol{A}^{-1})^n \tag{18}$$

2.2 稳定性

定理 1 对于系统(1)—(3) 和控制律(13)，存在正数 σ 和 b，使得

$$\| \boldsymbol{U}(t) \|_2^2 \leqslant \sigma(\| \boldsymbol{U}(0) \|_2^2)\mathrm{e}^{-bt}$$

即闭环系统在此范数意义下指数稳定. 其中定义 $\boldsymbol{U}(x, t)$ 关于 x 的 L^2 范数

$$\| \boldsymbol{U}(t) \|_2 = \left(\int_0^1 \boldsymbol{U}(x, t)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{U}(x, t)\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}$$

符号 $\| \cdot \|$ 指矩阵的欧几里得范数.

证 L^2 范数简记为 $\| \cdot \|_2$. 对于目标系统(5)—(7)，选择 Lyapunov 函数

$$v(t) = \| \boldsymbol{W}(t) \|_2^2 \tag{19}$$

首先对 Lyapunov 函数(19) 关于 t 求导，有

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) = & \int_0^1 \boldsymbol{W}_t(x, t)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{W}(x, t)\mathrm{d}x + \int_0^1 \boldsymbol{W}(x, t)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{W}_t(x, t)\mathrm{d}x = \\ & \int_0^1 \boldsymbol{W}_{xx}(x, t)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{W}(x, t)\mathrm{d}x + \int_0^1 \boldsymbol{W}(x, t)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{W}_{xx}(x, t)\mathrm{d}x = \\ & -\int_0^1 \boldsymbol{W}_x(x, t)^{\mathrm{T}} (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{A}) \boldsymbol{W}_x(x, t)\mathrm{d}x \leqslant -\delta \| \boldsymbol{W}_x(t) \|_2^2 \end{aligned}$$

其中 δ 是矩阵 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 最小特征值. 由 Poincaré 不等式，有

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) = & -\delta \| \boldsymbol{W}_x(t) \|_2^2 = -\delta \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \partial_x w_i^2(x, t)\mathrm{d}x \leqslant -\frac{\delta}{4} \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 w_i{}^2(x, t)\mathrm{d}x = \\ & -\frac{\delta}{4} \int_0^1 \boldsymbol{W}(x, t)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{W}(x, t)\mathrm{d}x = -\frac{\delta}{4} v(t) \end{aligned}$$

令 $b = \dfrac{\delta}{4}$，从而有 $v(t) \leqslant v(0)\mathrm{e}^{-bV}$，目标系统指数稳定.

由变换(4) 建立闭环系统的范数 $\| W(t) \|$ 和 $\| U(t) \|$ 的关系，得到

$$\| \boldsymbol{W}(t) \|_2 \leqslant \| \boldsymbol{U}(x, t) \|_2 + \left\| \int_0^x \boldsymbol{K}(x, y) \boldsymbol{U}(y, t)\mathrm{d}y \right\|_2$$

由 Holder's 不等式和 Cauchy-Schwarz 不等式，有

$$\left\|\int_0^x \boldsymbol{K}(x,y)\boldsymbol{U}(y,t)\mathrm{d}y\right\|_2^2=\int_0^1\left(\int_0^x \boldsymbol{U}(y,t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}(x,y)^{\mathrm{T}}\mathrm{d}y\int_0^x \boldsymbol{K}(x,y)\boldsymbol{U}(y,t)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=$$

$$\int_0^1\left(\int_0^x\sum_{i=1}^n k_{1i}u_i(y)\mathrm{d}y,\cdots,\int_0^x\sum_{i=1}^n k_{ni}u_i(y)\mathrm{d}y\right)\left(\int_0^x\sum_{j=1}^n k_{j1}u_j(y)\mathrm{d}y,\cdots,\int_0^x\sum_{j=1}^n k_{jn}u_j(y)\mathrm{d}y\right)^{\mathrm{T}}\mathrm{d}x=$$

$$\int_0^1\left(\int_0^x\sum_{i=1}^n k_{1i}u_i(y)\mathrm{d}y\int_0^x\sum_{j=1}^n k_{j1}u_j(y)\mathrm{d}y+\cdots+\int_0^x\sum_{i=1}^n k_{ni}u_i(y)\mathrm{d}y\int_0^x\sum_{j=1}^n k_{jn}u_j(y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\leqslant$$

$$\int_0^1\sum_{i=1}^n\left(\left(\int_0^1 k_{1i}{}^2\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^1 u_i^2(y)\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}x\int_0^1\sum_{j=1}^n\left(\left(\int_0^1 k_{j1}{}^2\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^1 u_i^2(y)\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}x+\cdots+$$

$$\int_0^1\sum_{i=1}^n\left(\left(\int_0^1 k_{ni}{}^2\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^1 u_i^2(y)\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}x\int_0^1\sum_{j=1}^n\left(\left(\int_0^1 k_{jn}{}^2\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^1 u_i^2(y)\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}x\leqslant$$

$$\max\int_0^1\int_0^1 k_{ij}^2\mathrm{d}y\mathrm{d}x\int_0^1 \boldsymbol{U}(y,t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}(y,t)\mathrm{d}y=\boldsymbol{\kappa}^2\|\boldsymbol{U}(t)\|_2^2$$

其中 k_{ij} 是矩阵 $\boldsymbol{K}(x,y)$ 的元素，因为

$$\boldsymbol{\kappa}^2=\max\int_0^1\int_0^1 k_{ij}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

故

$$\|\boldsymbol{W}(t)\|_2^2\leqslant(1+\boldsymbol{\kappa})^2\|\boldsymbol{U}(x,t)\|_2^2 \tag{20}$$

由逆变换(16)，得到

$$\|\boldsymbol{U}(t)\|_2^2\leqslant(1+\boldsymbol{\gamma})^2\|\boldsymbol{W}(t)\|_2^2 \tag{21}$$

其中

$$\boldsymbol{\gamma}^2=\max\int_0^1\int_0^1 l_{ij}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

l_{ij} 是矩阵 $\boldsymbol{L}(x,y)$ 的元素. 由(21)式，得到

$$\|\boldsymbol{U}(t)\|_2^2\leqslant(1+\boldsymbol{\gamma})^2\|\boldsymbol{W}(t)\|_2^2=(1+\boldsymbol{\gamma})^2 v(t)\leqslant(1+\boldsymbol{\gamma})^2 v(0)\mathrm{e}^{-bt} \tag{22}$$

由(20)式，得到

$$v(0)=\|\boldsymbol{W}(0)\|_2^2\leqslant(1+\boldsymbol{\kappa})^2\|\boldsymbol{U}(0)\|_2^2 \tag{23}$$

由(22)式和(23)式，得到

$$\|\boldsymbol{U}(t)\|_2^2\leqslant\boldsymbol{\sigma}\|\boldsymbol{U}(0)\|_2^2\mathrm{e}^{-bt}$$

其中 $\boldsymbol{\sigma}=(1+\boldsymbol{\gamma})^2(1+\boldsymbol{\kappa})^2$，即闭环系统(1)－(3)在控制律(13)下是指数稳定的.

参考文献：

[1] KRSTIC M，SMYSHLYAEV A. Boundary Control of PDEs：a Course on Backstepping Design [M]. Philadelphia：SIAM，2008：13－63.

[2] LIU W J. Boundary Feedback Stabilization of an Unstable Heat Equation [J]. SIAM J. CONTROL OPTIM，2003，42(3)：1033－1043.

[3] SMYSHLYAEV A，KRSTIC M. Adaptive Control of Parabolic PDEs [M]. Princeton：Princeton University Press，2010.

[4] 赵　娜，谢成康，司元超. 一类级联系统的边界稳定 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2015，37(1)：93－98.

[5] BACCOIL A，PISANO A，ORLOV Y. Boundary Control of Counpled Reaction-Diffusion Processes with Constan Parameters [J]. Automatic，2015，54：80－90.

[6] MICHEL J，RAFAEL C，KRSTIC M，et al. Local Exponential H^2 Stabilization of a 2×2 Quasilinear Hyperbolic System using Backstepping [J]. SIAM Journal of Control and Optimization，2013，51(3)：2005－2035.

[7] VAZEQUEZ R, KRSTIC M. Maracm Q-Functions and Explict Kernels for Stabilization of 2×2 Linear Hyperbolic Systems with Consant Coefficients [J]. System & Control Letters, 2014, 68: 33－42.
[8] MEGLIO F, VAZQUEZ R, KRSTIC M, et al. Backstpping Stabilization of an Underactuated 3×3 Linear Hyperbolic System of a Fluid Flow Equations [C]. 2012 ACC. New York: IEEE Press, 2012.
[9] MEGLIO F, VAZQUEZ R, KRSTIC M. Stabilization of a System of n+1 Coupled First-Order Hyperbolic Linear PDEs with a Single Boundary Input [J]. IEEE Transtation on Automatic Control, 2013, 58(12): 3097－3111.
[10] APOSTOL T M. Mathematical Analysis [M]. 2版. 北京：机械工业出版社，2004.

On the Boundary Control of *N* Coupled RDE Systems

ZHEN Zhi-yuan, XIE Cheng-kang, HE Cui-hua
School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: The boundary control of n coupled reaction-diffusion equations is considered. Due to the complexity of n coupled reaction diffusion equations, it is necessary to apply the matrix method for the original system to be expressed in a simple way before the kernel equation is obtained according to the transformation and the corresponding conditions. Then, the kernel equation of solution and control law may be obtained. In this paper we prove by means of inverse transformation and the Lypunov function that the closed loop system is exponentially stable.

Key words: coupled system; closed-loop system; boundary control; stability

责任编辑 张 枸