DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2017.03.013

沃尔巴克氏体在蚊子种群中的传播动态分析[①]

张金金，　王稳地，　舒梦诗，　姚苗然

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：建立了具有不完全细胞质不相容性的沃尔巴克氏体传播模型．通过分析系统平衡点的性质，发现细胞质不相容的概率发生变化时会出现鞍结点分支．还发现在时滞系统中，时滞大于临界值 τ_0 时，正平衡点会消失．

关　键　词：沃尔巴克氏体；细胞质不相容；平衡点；稳定性

中图分类号：O175　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9868(2017)03-0081-07

研究发现，埃及伊蚊和白纹伊蚊是登革热的主要传播蚊种，可以基于沃尔巴克氏体所诱导的CI(细胞质不相容性)和对病原体的抗性来控制虫媒及虫媒病[1-2]．CI是沃尔巴克氏体影响昆虫生殖的一种表型，即当携带沃尔巴克氏体的雄蚊与不携带该菌的雌蚊交配时，雌蚊产的卵将不孵化．因而可以通过释放携带沃尔巴克氏体的雄蚊，降低野生蚊子种群的数量[3-4]．理想的带有沃尔巴克氏体的雄蚊有三个特征：所携带的沃尔巴克氏体菌种能发生CI；具备登革热病毒抗性；与宿主形成稳定的共生关系、可世代相传[5]．生物学家研究发现，影响沃尔巴克氏体在蚊子种群中传播状态的因素有很多[5-8]．

文献[5]在完全细胞质不相容的条件下得到只要未感染者的生存能力较强，系统就会出现正平衡点．本文在此基础上考虑不完全的细胞质不相容[3]，得到即使未感染者的基本再生数 K_2 大于感染者的基本再生数 K_1，当细胞质不相容的概率 S_h 较小时，无感染平衡点全局渐近稳定，当$\frac{(K_2-K_1)}{K_2}<S_h\leqslant 1$时，正平衡点才会出现，从而产生了鞍结点分支．进一步引入成熟时滞，分析参数 S_h 对边界平衡点稳定性及正平衡点存在性的影响，最后还发现，正平衡点会随时滞的变大而消失．

1　模型简化

基于文献[5]考虑不完全的细胞质不相容性，设 $R_F(t)$，$R_M(t)$ 分别表示 t 时刻释放的感染的雌性蚊虫和感染的雄性蚊虫的数量；$x(t)$，$y(t)$ 分别表示 t 时刻感染蚊和未感染蚊的数量，建立如下模型：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=b_1\mathrm{e}^{-\delta_1\tau}[x(t-\tau)+2R_F(t-\tau)]-\delta_1x(t)T(t)\\ \dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}=b_2\mathrm{e}^{-\delta_2\tau}y(t-\tau)(1-S_hA(t-\tau))-\delta_2y(t)T(t)\\ \dfrac{\mathrm{d}R_F(t)}{\mathrm{d}t}=-\delta_1R_F(t)T(t)\\ \dfrac{\mathrm{d}R_M(t)}{\mathrm{d}t}=-\delta_1R_M(t)T(t)\end{cases}\tag{1}$$

---

① 收稿日期：2016-05-09
基金项目：国家自然科学基金项目(11571284)．
作者简介：张金金(1990-)，女，河南洛阳人，硕士研究生，主要从事生物数学研究．
通信作者：王稳地，教授，博士研究生导师．

其中：b_1，δ_1 分别表示感染蚊虫的出生率和死亡率，b_2，δ_2 分别表示未感染蚊虫的出生率和死亡率；S_h 表示细胞质不相容的概率；τ 表示蚊子从幼虫到成虫经历的时长；$e^{-\delta_1\tau}$，$e^{-\delta_2\tau}$ 分别表示感染蚊和未感染蚊从幼虫到成虫的的存活概率；

$$A(t)=\frac{y(t)}{x(t)+y(t)+2R_M(t)} \qquad T(t)=x(t)+y(t)+R_F(t)+R_M(t)$$

为方便分析，我们设

$$K_1(\tau)=\frac{e^{-\delta_1\tau}b_1}{\delta_1} \qquad K_2(\tau)=\frac{e^{-\delta_2\tau}b_2}{\delta_2}$$

其中，当 $t\to\infty$ 且不考虑时滞 τ 时，易得 $R_F(t)\to 0$，$R_M(t)\to 0$，即在平衡点处均有 $R_F=0$，$R_M=0$，令

$$K_1=\frac{b_1}{\delta_1} \qquad K_2=\frac{b_2}{\delta_2}$$

分别是感染蚊和未感染蚊的基本再生数，当 $t\to\infty$ 时，我们只需考虑系统

$$\begin{cases}\dfrac{dx(t)}{dt}=h(x,y)=\delta_1x(t)[K_1-(x(t)+y(t))]\\ \dfrac{dy(t)}{dt}=g(x,y)=\delta_2y(t)\left[K_2\left(1-S_h\dfrac{x(t)}{x(t)+y(t)}\right)-(x(t)+y(t))\right]\end{cases} \tag{2}$$

2 不含成熟时滞的模型

在这一节中，我们主要讨论参数 S_h 对系统(2)平衡点的存在性和稳定性的影响. 由于函数 $g(x,y)$ 在原点没有定义，但是 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}g(x,y)=0$，所以，定义 $g(0,0)=0$，可将系统(2)延拓到原点，该矫正在后文不再标注.

引理1 $R=\{(x,y):0\leqslant x\leqslant K_1,0\leqslant y\leqslant K_2\}$ 是系统(2)的正向不变集.

证 设 $(x(t),y(t))$ 是系统(2)的关于初值 $0\leqslant x(0)\leqslant K_1$，$0\leqslant y(0)\leqslant K_2$ 的解. 当 $x(t_0)=0$ 时，有 $\dot{x}(t_0)=0$，从而得 $x(t)\equiv 0(t>t_0)$；当 $0<x(t_0)<K_1$ 时，若存在 $t_1>t_0$，使得 $x(t_1)<0$，由 $x(t)$ 的连续性，一定存在 $t_2\in(t_0,t_1)$，有 $x(t_2)=0$，且 $\dot{x}(t_2)<0$，但是，由系统(2)得 $\dot{x}(t_2)=0$，与假设矛盾，因此，$x(t)>0(t>t_0)$；类似可证 $x(t)\leqslant K_1$. 所以，当 $x(t_0)>0$ 时，一定存在 $T>t_0$，当 $t>T$ 时，有 $0\leqslant x(t)\leqslant K_1$. 同理可证 $y(t)$ 的正向不变性.

经计算得，系统(2)有平衡点 $E_0(0,0)$，$E_1(K_1,0)$，$E_2(0,K_2)$，$E^*(x^*,y^*)$. 其中

$$x^*=\frac{K_1(K_2-K_1)}{S_hK_2} \qquad y^*=\frac{K_1[K_1-(1-S_h)K_2]}{S_hK_2}$$

定理2 (a) 当 $K_1>K_2$ 时，E_0 不稳定，E_2 为鞍点，特别地，当 $K_1\geqslant K_2$ 时，E_1 全局渐近稳定，E^* 不存在；

(b) 当 $K_1<K_2$，$0<S_h<S_h^*$ 时，E_0 不稳定，E_1 为鞍点，E_2 全局渐近稳定，E^* 不存在；

(c) 当 $K_1<K_2$，$S_h^*<S_h\leqslant 1$ 时，E_0 不稳定，E_1，E_2 均为汇，E^* 存在且恒为鞍点，其中，

$$S_h^*=\frac{K_2-K_1}{K_2}$$

证 (a) 系统(2)在点 (x,y) 处线性化得

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}\delta_1K_1-\delta_1(2x+y) & -\delta_1x\\ -\delta_2y\left[\dfrac{K_2S_hy}{(x+y)^2}+1\right] & \delta_2K_2\left(1-\dfrac{S_hx^2}{(x+y)^2}\right)-\delta_2(2y+x)\end{pmatrix} \tag{3}$$

易知当 $K_1>K_2$ 时，平衡点 E_0 的特征方程对应的特征根为 $\delta_1K_1>0$，$\delta_2K_2>0$，因此 E_0 是不稳定的. 对于 E_1 的全局稳定性，我们用 Lyapunov 函数的方法证明. 构造 V 函数如下：

$$V(x,y)=\frac{1}{\delta_1}\left(x-K_1-K_1\ln\frac{x}{K_1}\right)+\frac{y}{\delta_2}$$

根据引理 1，当 $K_1 \geqslant K_2$ 时有

$$\dot{V}(x,y)|_{E_1} = \frac{1}{\delta_1}\left(1-\frac{K_1}{x}\right)\frac{dx}{dt} + \frac{1}{\delta_2}\frac{dy}{dt} =$$

$$(x-K_1)(K_1-x-y) - yK_2S_h\frac{x}{x+y} + K_2y - y(x+y) \leqslant$$

$$(x-K_1)(K_1-x-y) - K_2S_h\frac{xy}{x+y} + K_1y - y(x+y) =$$

$$-(x+y-K_1)^2 - K_2S_h\frac{xy}{x+y} < 0$$

因此 E_1 是全局渐近稳定的. 当 $K_1 > K_2$ 时，平衡点 E_2 对应特征方程的特征根为 $\delta_1(K_1-K_2) > 0$，$-\delta_2K_2 < 0$，因此，E_2 为鞍点.

（b）当 $K_1 < K_2$ 时，由（a）的分析可得，E_0 是不稳定的. 当 $K_1 < K_2$，$0 < S_h < S_h^*$ 时，平衡点 E_1 对应特征方程的特征根为 $-\delta_1K_1 < 0$，$\delta_2[(1-S_h)K_2 - K_1] > 0$，所以，$E_1$ 是鞍点. 下证 E_2 是全局渐近稳定的. 若 $x(0)=0$，$y(0)>0$，则由系统（2）得，$\dot{x}(t)\equiv 0$，$\dot{y}(t)=\delta_2y(K_2-y)$，因此，$x(t)\equiv 0$，$y(t)\to K_2(t\to\infty)$，$\omega(x(0),y(0))=E_2$. 若 $x(0)>0$，$y(0)>0$，可分三步证明：

首先用反证法证 $E_0(0,0)$ 也不属于其 ω 极限集. 若不然，则存在时间列 $\{t_n\}$ 及 $N>0$，当 $n>N$ 时，有

$$x(t_n) < \frac{K_1}{4},\ y(t_n) < \frac{K_1}{4}$$

此时，

$$\dot{x}(t_n) > \delta_1x(t_n)\left(\frac{K_2-K_1}{2}\right) > 0$$

与 E_0 是 ω 极限集矛盾，所以，

$$E_0 \notin \omega(x(0),y(0))$$

其次证 $E_1(K_1,0)$ 不属于 $\omega(x(0),y(0))$. 当 $K_1 < K_2$，由（3）式得，E_1 对应的特征方程的特征根分别为

$$-\delta_1K_1 < 0 \qquad \delta_2[(1-S_h)K_2 - K_1] > 0$$

其稳定曲线是 x 轴，所以，

$$E_1 \notin \omega(x(0),y(0))$$

最后证系统（2）无周期解. 设

$$Z(t) = \ln[y(t)^{\frac{1}{\delta_2}}x(t)^{-\frac{1}{\delta_1}}]$$

因为 $S_h < S_h^* = \dfrac{K_2-K_1}{K_2}$，$x(0)\geqslant 0$，$y(0)>0$，

$$Z'(t) = \frac{1}{\delta_2y}\frac{dy}{dt} - \frac{1}{\delta_1x}\frac{dx}{dt} =$$

$$(K_2-K_1) - S_h\frac{x}{x+y} \geqslant$$

$$(K_2-K_1) - \frac{K_2-K_1}{K_2}\frac{K_2x}{x+y} =$$

$$\left(1-\frac{x}{x+y}\right)(K_2-K_1) \geqslant 0$$

由 Durac 定理知，系统（2）无周期解. 因此，当 $x(0)\geqslant 0$，$y(0)>0$ 时，由 Poincaré-Bendixson 定理可得，

$$E_2 \in \omega(x(0),y(0))$$

又由（3）式，当 $K_1 < K_2$ 时，E_2 局部渐近稳定，因此，

$$E_2=\omega(x(0),\ y(0))$$

从而得 E_2 全局渐近稳定.

(c) 当 $K_1<K_2$，$S_n^*<S_h\leqslant 1$ 时，E_0 不稳定，E_1,E_2 局部渐近稳定. 令

$$A=-\frac{\delta_2[K_1-(1-S_h)K_2][2K_1-(1-S_h)K_2]}{S_hK_2}$$

$$B=\frac{\delta_2[(S_h-1)K_2+K_1][K_2-2K_1]}{S_hK_2}$$

则有

$$\det \boldsymbol{J}(E^*)=\frac{-\delta_1(K_2-K_1)}{S_hK_2}(B-A)=$$
$$-\delta_1K_1(K_2-K_1)<0$$

因此当 $K_1<K_2$ 时，E^* 必为鞍点.

3 考虑成熟时滞的模型

在这一节中，我们讨论 S_h 对引入成熟时滞后的系统(1) 平衡点的存在性和稳定性的影响. 此时，系统的平衡点可表示为

$$\overline{E}_0(0,\ 0,\ 0,\ 0)\qquad \overline{E}_1(K_1(\tau),\ 0,\ 0,\ 0)$$
$$\overline{E}_2(0,\ K_2(\tau),\ 0,\ 0)\qquad \overline{E}^*(x^*,\ y^*,\ 0,\ 0)$$

其中

$$x^*=\frac{K_1(\tau)(K_2(\tau)-K_1(\tau))}{S_hK_2(\tau)}$$
$$y^*=\frac{K_1(\tau)[K_1(\tau)-(1-S_h)K_2(\tau)]}{S_hK_2(\tau)} \tag{4}$$

3.1 对系统平衡点的分析

定理 3 (ⅰ) 当 $K_1(\tau)>K_2(\tau)$ 时，$\overline{E}^*$ 不存在，$\overline{E}_0$,$\overline{E}_2$ 不稳定，$\overline{E}_1$ 局部渐近稳定；

(ⅱ) 当 $K_1(\tau)<K_2(\tau)$，$0<S_h<S_h^*$ 时，$\overline{E}^*$ 不存在，$\overline{E}_0$,$\overline{E}_1$ 不稳定，$\overline{E}_2$ 局部渐近稳定；

(ⅲ) 当 $K_1(\tau)<K_2(\tau)$，$S_h^*<S_h\leqslant 1$ 时，$\overline{E}^*$ 存在，$\overline{E}_0$ 不稳定，$\overline{E}_1$,$\overline{E}_2$ 局部渐近稳定，当 $\tau=0$ 时，$\overline{E}^*$ 是不稳定的，其中，

$$S_h^*=\frac{K_2(\tau)-K_1(\tau)}{K_2(\tau)}$$

证 (ⅰ) 系统(1) 正平衡点存在性证明可参考定理 2. 下面我们证明各条件下平衡点的稳定性. $\overline{E}_0(0,\ 0,\ 0,\ 0)$ 的不稳定性我们用反证法来证明[5]. 设 $\Phi(t)=(x(t),\ y(t),\ R_F(t),\ R_M(t))$ 为系统(1) 任意解，则

$$|\ \Phi(t)\ |=\sqrt{x^2+y^2+R_F{}^2+R_M{}^2}$$

限制 $\Phi(t)$ 在$[t_0-\tau,\ t_0]$ 上为 $\Psi(t)$，定义其范数为

$$\|\ \Psi(t)\ \|=\sup\{|\ \Psi(t)\ |:\ t_0-\tau\leqslant t\leqslant t_0\}$$

假设 $\overline{E}_0$ 是稳定的，则存在充分小的 $C>0$，当 $\|\ \Psi(t)\ \|\leqslant C$，$t>t_0$ 时，有

$$|\ \Phi(t)\ |\leqslant\frac{K_1(\tau)}{5}$$

令系统(1) 的解 $\Phi(t)$ 满足

$$x_0=\inf\{x(t):\ t_0-\tau\leqslant t\leqslant t_0\}>0$$

则有 $x_0<C$ 且 $x_0<K_1(\tau)$. 下证对于所有的 $t\geqslant t_0$ 有 $x(t)>\frac{x_0}{2}$. 若不然，则存在 $t_1>t_0$，使得在时间区间$[t_0-\tau,\ t_1)$ 上 $x(t)>\frac{x_0}{2}$，$x(t_1)=\frac{x_0}{2}$ 且 $x'(t_1)\leqslant 0$. 但是，由系统(1) 得

$$\frac{x'(t_1)}{\delta_1} > K_1(\tau)x(t_1-\tau) - \frac{K_1(\tau)}{5}x(t_1) > \frac{K_1(\tau)x_0}{2} - \frac{K_1(\tau)}{5}\frac{x_0}{2} > 0$$

与假设矛盾，因此，对于所有的 $t \geqslant t_0$，有

$$x(t) > \frac{x_0}{2}$$

故平衡点 $\overline{E}_0$ 是不稳定的.

下证平衡点 $\overline{E}_1(K_1(\tau), 0, 0, 0)$，$\overline{E}_2(0, K_2(\tau), 0, 0)$ 的稳定性[9]. 令 $\boldsymbol{I}$ 为 2×2 单位矩阵，

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} K_1(\tau)\delta_1 & 0 & 2K_1(\tau)\delta_1 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 2b_{21} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} = -\begin{pmatrix} \delta_1(2x+y) & \delta_1 x & \delta_1 x & \delta_1 x \\ \delta_2 y & \delta_2(x+2y) & \delta_2 y & \delta_2 y \\ 0 & 0 & \delta_1(x+y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_1(x+y) \end{pmatrix}$$

其中

$$b_{21} = -\frac{K_2(\tau)\delta_2 S_h y(t-\tau)^2}{(x(t-\tau)+y(t-\tau))^2}$$

$$b_{22} = K_2(\tau)\delta_2\left(1 - S_h\frac{x(t-\tau)^2}{(x(t-\tau)+y(t-\tau))^2}\right)$$

那么系统(1) 在任意点$(x, y, 0, 0)$ 处的特征方程为：

$$\det(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B} - \mathrm{e}^{-\lambda\tau}\boldsymbol{A}) = [\lambda + \delta_1(x+y)]^2 \det \boldsymbol{C}_\lambda = 0 \tag{5}$$

其中

$$\boldsymbol{C}_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda - K_1(\tau)\delta_1\mathrm{e}^{-\lambda\tau} + \delta_1(2x+y) & \delta_1 x \\ -b_{21}\mathrm{e}^{-\lambda\tau} + \delta_2 y & \lambda - b_{22}\mathrm{e}^{-\lambda\tau} + \delta_2(x+2y) \end{pmatrix} \tag{6}$$

由上述分析，特征方程(5) 的特征根有 $\lambda_1 = \lambda_2 = -\delta_1(x+y) < 0$，$\overline{E}_1$,$\overline{E}_2$ 的稳定性由 $|\boldsymbol{C}_\lambda| = 0$ 的根的实部的符号决定. 在 $\overline{E}_1(K_1(\tau), 0, 0, 0)$，$\overline{E}_2(0, K_2(\tau), 0, 0)$ 处分别有

$$|\boldsymbol{C}_\lambda|_{\overline{E}_1} = (\lambda - K_1(\tau)\delta_1\mathrm{e}^{-\lambda\tau} + 2\delta_1 K_1(\tau))(\lambda - b_{22}\mathrm{e}^{-\lambda\tau} + \delta_2 K_1(\tau)) = 0 \tag{7}$$

$$|\boldsymbol{C}_\lambda|_{\overline{E}_2} = (\lambda - K_1(\tau)\delta_1\mathrm{e}^{-\lambda\tau} + \delta_1 K_2(\tau))(\lambda - b_{22}\mathrm{e}^{-\lambda\tau} + 2\delta_2 K_2(\tau)) = 0 \tag{8}$$

经计算得(7) 式的根 λ_1,λ_2 和(8) 式的根 λ_3,λ_4 满足 $\lambda_i = a_i + b_i\mathrm{e}^{-\lambda_i\tau}(i=1,2,\cdots)$，由(7) 式得，

$$a_1 = -2\delta_1 K_1(\tau) \qquad b_1 = K_1(\tau)\delta_1$$

$$a_2 = -\delta_2 K_1(\tau) \qquad b_2 = K_2(\tau)\delta_2(1-S_h)$$

当 $K_1(\tau) > K_2(\tau)$ 时，

$$a_1 + b_1 < 0 \qquad a_2 + b_2 < 0$$

因此，特征值均有负实部，E_1 局部渐近稳定. 由(8) 式得

$$a_3 = -\delta_1 K_2(\tau) \qquad b_3 = K_1(\tau)\delta_1$$

$$a_4 = -2\delta_2 K_2(\tau) \qquad b_4 = K_2(\tau)\delta_2(1-S_h)$$

此时，

$$a_3 + b_3 > 0 \qquad a_4 + b_4 < 0$$

因此 $\overline{E}_2$ 不稳定. 综上所述，当 $K_1(\tau) > K_2(\tau)$ 时，$\overline{E}_0$,$\overline{E}_2$ 不稳定，$\overline{E}_1$ 局部渐近稳定. 同理可证该定理(ⅱ)，(ⅲ) 边界平衡点的稳定性. 易证正平衡点 $\overline{E}^*$ 的存在性，当时滞 $\tau = 0$ 时，可参考定理 2 中正平衡点的证明，$\overline{E}^*$ 是不稳定的.

3.2 成熟时滞的作用

下面我们固定参数 S_h，研究时滞变化对系统(1)正平衡点存在性的影响，通过计算发现存在时滞的临界值 τ_0，时滞在穿过该临界时，正平衡点的存在性发生改变.

定理 4 若$\dfrac{b_1}{\delta_1}+\dfrac{S_h b_2}{\delta_2}>1$，存在时滞的临界值 τ_0，当 $0<\tau<\tau_0$ 时，系统(1)正平衡点存在，当 $\tau\geqslant\tau_0$ 时，该系统正平衡点不存在.

证 由(4)式得，正平衡点若存在，需满足

$$K_2(\tau)>K_1(\tau) \qquad K_1(\tau)>1-S_h K_2(\tau)$$

即

$$\tau<\frac{1}{\delta_2-\delta_1}\ln\frac{b_2\delta_1}{b_1\delta_2}$$

$$\frac{b_1 e^{-\delta_1\tau}}{\delta_1}+S_h\frac{b_2 e^{-\delta_2\tau}}{\delta_2}>1 \tag{9}$$

设

$$p(\tau)=\frac{b_1 e^{-\delta_1\tau}}{\delta_1}+\frac{S_h b_2 e^{-\delta_2\tau}}{\delta_2}$$

则有

$$p(0)=\frac{b_1}{\delta_1}+\frac{S_h b_2}{\delta_2} \qquad p(\infty)=0$$

因此，只要

$$p(0)=\frac{b_1}{\delta_1}+\frac{S_h b_2}{\delta_2}>1$$

由 $p(\tau)$ 的连续性，一定存在 τ_0，使得 $p(\tau_0)=1$. 当 $0<\tau<\tau_0$ 时，正平衡点存在，当 $\tau\geqslant\tau_0$ 时，正平衡点不存在.

4 讨 论

本文建立了具有不完全细胞质不相容性的沃尔巴克氏体传播模型. 得到当感染者的基本再生数 K_1 大于未感染者的基本再生数 K_2 时，完全感染平衡点是全局渐近稳定的；即使 $K_2>K_1$，当 S_h 较小时，正平衡点也不存在且无感染平衡点全局渐近稳定，当$\dfrac{K_2-K_1}{K_2}<S_h\leqslant 1$时，正平衡点才会出现，从而产生了鞍结点分支. 进一步引入成熟时滞分析参数 S_h 对边界平衡点稳定性及正平衡点存在性的影响也得到类似结果. 最后还发现，在相关参数取值满足条件$\dfrac{b_1}{\delta_1}+\dfrac{S_h b_2}{\delta_2}>1$时，时滞的大小会影响平衡点的存在性. 但是当时滞不为零时，正平衡点的稳定性是否会随着时滞的变大而改变的问题有待进一步讨论.

参考文献：

[1] CHAN M H T, KIM P S. Modelling a Wolbachia Invasion Using a Slow-Fast Dispersal Reaction-Diffusion Approach [J]. Bulletin of Mathematical Biology, 2013, 75(9): 1501-1523.

[2] XI Z, KHOO C C, DOBSON S L. Wolbachia Establishment and Invasion in an Aedes Aegypti Laboratory Population [J]. Japanese Economic Review, 2005, 310(5746): 326-328.

[3] NDII Z. Modelling the Introduction of Wolbachia into Aedes Aegypti Mosquitoes to Reduce Dengue Transmission [J]. Anziam Journal, 2012, 53(3): 213-227.

[4] RAŠIĆ G, ENDERSBY N M, WILLIAMS C, et al. Using Wolbachia-Based Release for Suppression of Aedes Mosquitoes: Insights from Genetic Data and Population Simulations [J]. Ecological Applications, 2014, 24(5): 1226-1234.

[5] ZHENG B, TANG M, YU J. Modeling Wolbachia Spread in Mosquitoes through Delay Differential Equations [J]. Siam

Journal on Applied Mathematics，2014，74(3)：743－770.
[6] 郑小英，刘起勇，奚志勇. 基于沃尔巴克氏体的蚊媒和蚊媒病控制的生物安全性 [J]. 中国媒介生物学及控制杂志，2014，25(2)：93－96.
[7] NDII M Z，ALLINGHAM D，HICKSON R I，et al. The Effect of Wolbachia on Dengue Dynamics in the Presence of Two Serotypes of Dengue：Symmetric and Asymmetric Epidemiological Characteristics [J]. Epidemiology & Infection，2016，144(13)：2874－2882.
[8] HANCOCK P A，WHITE V L，CALLAHAN A G，et al. Density-Dependent Population Dynamics in Aedes Aegypti，Slow the Spread of W Mel Wolbachia [J]. Journal of Applied Ecology，2016，53(3)：785－793.
[9] SMITH H. An Introduction to Delay Differential Equations with Applications to the Life Sciences [M]. New York：Springer，2010：49－54.

Analysis of Transmission Dynamics of *Wolbachia* in the Mosquito Population

ZHANG Jin-jin，　WANG Wen-di，　SHU Meng-shi，　YAO Miao-ran
School of mathematical and statistical of Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：In this paper，we develop a model to investigate the transmission dynamics of *Wolbachia* with cytoplasmic incompatibility in mosquitoes. Through an analysis of the character of the equilibrium，we show that when the probability of cytoplasmic incompatibility changes，a saddle-node bifurcation will appear. Moreover，when considering the delay system，we find that the positive equilibrium will disappear if the maturation delay is larger than the critical value.
Key words：*Wolbachia*；cytoplasmic incompatibility；equilibrium；stability

责任编辑　张　枸