

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2017.03.014

具有非线性扩散项的捕食-食饵模型的共存解的多重性^①

郝爱景, 周 军

西南大学 数学与统计学院, 重庆 400715

摘要: 研究了一类具有非线性扩散的捕食-食饵模型, 利用分支理论和拓扑度理论研究了该模型共存解的多重性, 推广了已有研究成果.

关键词: 捕食-食饵模型; 非线性扩散; 共存解的多重性

中图分类号: O175.2 **文献标志码:** A **文章编号:** 1673-9868(2017)03-0088-07

具有非线性扩散的捕食-食饵模型是一类重要的种群模型, 近年来, 许多作者对该类模型的动力学性质及平衡态进行了研究^[1-5]. 最近, 文献[6]研究了如下—类模型:

$$\begin{cases} -\Delta[(1+\alpha v)u]=u\left(a-u-\frac{cv}{1+mu}\right) & x\in\Omega \\ -\Delta\left[\left(1+\frac{\gamma}{1+\beta u}\right)v\right]=v\left(b-v+\frac{du}{1+mu}\right) & x\in\Omega \\ u=v=0 & x\in\partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

其中: $\Omega\subset\mathbb{R}^N(1\leq N\leq 5)$ 是具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域; 系数 $a,c,d,m>0, \alpha,\beta,\gamma\geq 0, b\in\mathbb{R}$ 是实常数. 模型(1)的相关生物背景可参见文献[6].

(u,v) 称为(1)式的共存解, 如果 (u,v) 在 Ω 内的值是正的且满足(1)式. 文献[6]对模型(1)及其极限系统的共存解的存在条件进行了研究. 解的多重性是非线性椭圆方程的一个重要的研究课题, 本文旨在研究模型(1)共存解的多重性.

为了方便讨论, 我们给出一些定义和结果: 设 $\lambda_1(q)$ 为如下特征值问题

$$-\Delta u+q(x)u=\lambda u \quad x\in\Omega, u=0 \quad x\in\partial\Omega \quad (2)$$

的第一特征值, 其中 $q(x)\in C(\overline{\Omega})$, 则有^[7]:

- (i) $\lambda_1(q)$ 是简单的;
- (ii) 存在与 $\lambda_1(q)$ 对应的特征函数在 Ω 内不变号;
- (iii) 假设 $q_1(x)\leq q_2(x), q_1(x)\not\equiv q_2(x)$, 则有 $\lambda_1(q_1)<\lambda_1(q_2)$.

本文中我们记 $\lambda_1=\lambda_1(0)$, 并令 ϕ_1 为其对应的正特征函数, 且满足 $\|\phi_1\|_{L^2(\Omega)}=1$.

① 收稿日期: 2015-12-03
基金项目: 国家自然科学基金项目(11201380); 中国博士后基金—等项目(2014M550453); 中国博士后基金特别项目(2015T80948); 中央高校基本科研业务费重大项目(XDJK2015A16).
作者简介: 郝爱景(1990-), 女, 河南新乡人, 硕士研究生, 主要从事非线性偏微分方程理论及其应用研究.
通信作者: 周 军, 教授.

考虑下面 logistic 方程的非负解

$$-\Delta u = u(a - u) \quad x \in \Omega, u = 0 \quad x \in \partial\Omega \quad (3)$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 是具有光滑边界的有界区域, a 是正常数, 则有^[7]:

(i) 如果 $a \leq \lambda_1$, 则(3)式的非负解仅有零解;

(ii) 如果 $a > \lambda_1$, 则(3)式有唯一的正解 θ_a , 其中 θ_a 是关于 a 的严格递增函数且对任意的 $x \in \Omega$ 有 $0 < \theta_a < a$.

(iii) $\lim_{a \rightarrow \lambda_1^+} \theta_a(x) = 0$ 关于 $x \in \Omega$ 是一致的. 极限 $\lim_{a \rightarrow \infty} \theta_a = \infty$ 和 $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\theta_a}{a} = 1$ 在 Ω 的任意紧子集上一致成立.

设 E 是一个 Banach 空间, W 是 E 的一个闭凸子集, $\mathbf{A}: W \rightarrow W$ 是一个紧的 Fréchet 可微的算子, $y \in W$ 是 $\mathbf{A}$ 的一个孤立不动点, G 是 W 的一个开子集且 $\mathbf{A}$ 在 G 的边界 ∂G 上没有不动点, 类似于文献[7], 我们可以定义 Leray-Schauder 度 $\deg_w(\mathbf{I} - \mathbf{A}, G, 0)$. 孤立不动点 y 的不动点指数 $\text{index}(\mathbf{A}, y)$ 定义为 $\deg_w(\mathbf{I} - \mathbf{A}, N(y), 0)$, 其中 $N(y)$ 表示 y 在 W 中的一个小邻域. 进一步, 如果 $\deg_w(\mathbf{I} - \mathbf{A}, G, 0) \neq 0$, 则有 $\mathbf{A}$ 在 G 中至少有一个不动点.

类似于文献[6], 引入如下变化:

$$U = (1 + \alpha v)u \quad V = \left(1 + \frac{\gamma}{1 + \beta u}\right)v \quad (4)$$

则模型(1)等价于如下问题:

$$\begin{cases} -\Delta U = u \left(a - u - \frac{cv}{1 + mu} \right) & x \in \Omega \\ -\Delta V = v \left(b - v + \frac{du}{1 + mu} \right) & x \in \Omega \\ U = V = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (5)$$

显然模型(5)具有平凡解 $(U, V) = (0, 0)$; 如果 $a > \lambda_1$, 模型(5)具有平凡解 $(U, V) = (\theta_a, 0)$; 如果 $\bar{b} =$

$\frac{b}{1 + \gamma} > \lambda_1$, 模型(5)具有平凡解 $(U, V) = (0, (1 + \gamma)^2 \theta_{\bar{b}})$. 为了研究模型(1)或模型(5)共存解的多解性,

我们需要计算这些平凡解和半平凡解的不动点指数. 首先根据文献[6]中的引理 2.1, 我们知道(5)式的任意共存解 (U, V) 满足如下先验估计:

$$0 < U(x) \leq M_1 := \left(1 + \frac{aa(1 + ma)}{c}\right)a \quad 0 < V(x) \leq M_2 := (1 + \gamma) \left(b + \frac{d}{m}\right) \quad x \in \Omega \quad (6)$$

接下来引入如下记号:

$$E := C_0(\bar{\Omega}) \times C_0(\bar{\Omega})$$

$$W := K \times K, K = \{u(x) \in C_0(\bar{\Omega}) : u(x) \geq 0, x \in \bar{\Omega}\}$$

$$D := \{(U, V) \in W : U(x) \leq M_1 + 1, V(x) \leq M_2 + 1, x \in \bar{\Omega}\} \quad (7)$$

由(6)式知(5)式的共存解位于 D 的内部, 下面记 D 的内部为 $\overset{\circ}{D}$. 为了利用度理论, 取一个充分大的常数 p 使得对所有的 $(U, V) \in D$, 有

$$p + a - u - \frac{cv}{1 + mu} > 0 \quad p + b - v + \frac{du}{1 + mu} > 0$$

定义 E 上的算子 $\mathbf{A}$ 为

$$\mathbf{A}(U, V) = (-\Delta + p\mathbf{I})^{-1} \begin{pmatrix} f[u(U, V), v(U, V)] + pU \\ g[u(U, V), v(U, V)] + pV \end{pmatrix} \quad (8)$$

其中

$$f(u, v) = u \left(\left\{ a - u - \frac{cv}{1 + mu} \right\} \right) \quad g(u, v) = v \left(\left\{ b - v + \frac{du}{1 + mu} \right\} \right) \quad (9)$$

$u(U, V)$ 和 $v(U, V)$ 由(4) 式给出, 即

$$u(U, V) = \frac{-(1 + \gamma + \alpha V - \beta U) + \sqrt{(1 + \gamma + \alpha V - \beta U)^2 + 4\beta U(1 + \gamma)(1 + \alpha V)}}{2\beta(1 + \alpha V)}$$

$$v(U, V) = \frac{-(1 + \gamma + \beta U - \alpha V) + \sqrt{(1 + \gamma + \beta U - \alpha V)^2 + 4\alpha V(1 + \gamma)(1 + \beta U)}}{2\alpha(1 + \gamma)} \quad (10)$$

类似于文献[8] 引理 5.1 和引理 5.2 的证明, 我们可以得到如下结论:

(i) $\deg_w(\mathbf{I} - \mathbf{A}, \bar{D}) = 1$;

(ii) 如果 $a > \lambda_1$ 且 $\bar{b} \neq \lambda_1$, 则有

$$\text{index}_w(\mathbf{A}, (0, 0)) = 0$$

(iii) 如果 $a > \lambda_1$, $\bar{b} \neq \lambda_1$ 且

$$\lambda_1 \left[- \left(b + \frac{d\theta_a}{1 + m\theta_a} \right) \frac{1 + \beta\theta_a}{1 + \beta\theta_a + \gamma} \right] < 0$$

则

$$\text{index}_w(\mathbf{A}, (\theta_a, 0)) = 0 \quad (11)$$

(iv) 如果 $a > \lambda_1$, $\bar{b} > \lambda_1$ 且 $\lambda_1 \left[\frac{c(1 + \gamma)\theta_{\bar{b}} - a}{1 + \alpha(1 + \gamma)\theta_{\bar{b}}} \right] > 0$, 则

$$\text{index}_w(\mathbf{A}, (0, (1 + \gamma)^2\theta_{\bar{b}})) = 1$$

显然(5) 式有两条半平凡解曲线

$$\Gamma_U = \{(U, V, b) = (\theta_a, 0, b) : a > \lambda_1, b \in \mathbb{R}\}$$

$$\Gamma_V = \{(U, V, b) = (0, (1 + \gamma)^2\theta_{\bar{b}}, b) : \bar{b} > \lambda_1\} \quad (12)$$

对于 $a > \lambda_1$, 利用文献[6] 中的引理 3.1 和引理 3.2 可知

$$S_1 = \left\{ (a, b) : \lambda_1 \left[- \left(b + \frac{d\theta_a}{1 + m\theta_a} \right) \frac{1 + \beta\theta_a}{1 + \beta\theta_a + \gamma} \right] = 0 \right\} = \{(a, b) : b = b_*(a)\}$$

$$S_2 = \left\{ (a, b) : \lambda_1 \left[\frac{c(1 + \gamma)\theta_{\bar{b}} - a}{1 + \alpha(1 + \gamma)\theta_{\bar{b}}} \right] = 0, \bar{b} > \lambda_1 \right\} = \{(a, b) : b = b^*(a)\} \quad (13)$$

其中 $b_*(a)$ 和 $b^*(a)$ 是关于 $a \in (\lambda_1, \infty)$ 的连续函数且满足

$$b = b_*(a) \in \left(\lambda_1 - \frac{d}{m}, (1 + \gamma)\lambda_1 \right), b = b^*(a) > (1 + \gamma)\lambda_1$$

固定 $a > \lambda_1$, 以 b 为分支参数研究模型(5) 在 Γ_U 上的分支解. 令 ϕ_* 是方程

$$\begin{cases} -\Delta\phi - \left(b_* + \frac{d\theta_a}{1 + m\theta_a} \right) \frac{1 + \beta\theta_a}{1 + \beta\theta_a + \gamma} \phi = 0 & x \in \Omega \\ \phi = 0 & x \in \partial\Omega \\ \|\phi\|_{L^2(\Omega)} = 1 \\ \phi > 0 & x \in \Omega \end{cases} \quad (14)$$

的唯一正解. 由于算子 $-\Delta + 2\theta_a - a$ 在 Dirichlet 边界条件下是可逆的, 令 ϕ_* 是问题

$$\begin{cases} -\Delta\phi + (2\theta_a - a)\phi = -\frac{(1 + \beta\theta_a)\theta_a [\alpha(a - 2\theta_a) + c(1 + m\theta_a)^{-1}]}{1 + \beta\theta_a + \gamma} \phi_* & x \in \Omega \\ \phi = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (15)$$

的唯一解.

文献[6] 中的引理 3.4 证明了如下结论:

引理 1 假设 $a > \lambda_1$, 那么模型(5) 存在从半平凡解曲线 Γ_U 分支出的共存解当且仅当 $b = b_*(a)$, 并且对充分小的 $\delta > 0$ 及上述 (ϕ_*, ψ_*) , 模型(5) 在 $(\theta_a, 0, b_*)$ 附近的共存解可表示为

$$\Gamma_1 = \{(U, V, b) = (\theta_a + s\phi_* + s\Phi_1(s), s\psi_* + s\Psi_1(s), b(s)) : 0 < s \leq \delta\}$$

其中 $\{\Phi_1(s), \Psi_1(s), b(s)\}$ 关于 s 是光滑的并且满足

$$(\Phi_1(0), \Psi_1(0), b(0)) = (0, 0, b_*), \int_{\Omega} \Phi_1 \phi_* = 0, \int_{\Omega} \Psi_1 \psi_* = 0$$

下面我们讨论模型(5) 的多解性, 为此, 首先给出共存解 $(U(s), V(s), b(s))$ 的稳定性结论.

定理 1 假设 $a > \lambda_1$, $b(s)$ 是由引理 1 给出的函数, 则有 $b'(0) = \frac{A}{B}$, 其中

$$\begin{aligned} A = & \int_{\Omega} \left[\left(b + \frac{d\theta_a}{1+m\theta_a} \right) \frac{\beta\gamma}{(1+\beta\theta_a+\gamma)^2} + \frac{d(1+\beta\theta_a)}{(1+\beta\theta_a+\gamma)(1+m\theta_a)^2} \right] \phi_* \psi_*^2 dx - \\ & \int_{\Omega} \left[\left(b + \frac{d\theta_a}{1+m\theta_a} \right) \frac{\alpha\beta\gamma\theta_a(1+\beta\theta_a)}{(1+\beta\theta_a+\gamma)^3} + \left(\frac{1+\beta\theta_a}{1+\beta\theta_a+\gamma} \right)^2 + \frac{d\alpha\theta_a(1+\beta\theta_a)}{(1+\beta\theta_a+\gamma)^2(1+m\theta_a)^2} \right] \phi_*^3 dx \quad (16) \\ B = & \int_{\Omega} \frac{1+\beta\theta_a}{1+\beta\theta_a+\gamma} \phi_*^2 dx \end{aligned}$$

此外, 若 $b'(0) < 0$, 则 $(U(s), V(s), b(s))$ 是不稳定的; 若 $b'(0) > 0$, 则 $(U(s), V(s), b(s))$ 是稳定的.

证 设 $X = [W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)]^2$, $Y = [L^p(\Omega)]^2$, 定义映射 $F: X \times \mathbb{R} \rightarrow Y$

$$F(U, V, b) = \begin{pmatrix} \Delta U + f[u(U, V), v(U, V)] \\ \Delta V + g[u(U, V), v(U, V)] \end{pmatrix} \quad (17)$$

其中 $f, g, u(U, V)$ 和 $v(U, V)$ 由(9) 和(10) 式给出. 通过计算可知, 对任意的 $(\xi, \eta) \in X$, 有

$$F_{(U,V)}(U, V, b) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} G \\ H \end{bmatrix} \quad (18)$$

其中

$$\begin{aligned} G = & \Delta \xi + \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial U} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial U} \right) \xi + \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial V} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial V} \right) \eta \\ H = & \Delta \eta + \left(\frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial U} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial U} \right) \xi + \left(\frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial V} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial V} \right) \eta \quad (19) \end{aligned}$$

$$F_b(U, V, b) = \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix} \quad F_{b(U,V)}(U, V, b) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial v}{\partial U} \xi + \frac{\partial v}{\partial V} \eta \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$F_{(U,V)(U,V)}(U, V, b) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}^2 = \begin{bmatrix} G_{UU}\xi^2 + 2G_{UV}\xi\eta + G_{VV}\eta^2 \\ H_{UU}\xi^2 + 2H_{UV}\xi\eta + H_{VV}\eta^2 \end{bmatrix} \quad (21)$$

(21) 式中

$$\begin{aligned} G_{UU} = & \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial U} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial u}{\partial U} \cdot \frac{\partial v}{\partial U} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial U} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial U^2} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial U^2} \\ G_{UV} = & \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial U} \cdot \frac{\partial u}{\partial V} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial u}{\partial U} \cdot \frac{\partial v}{\partial V} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial U} \cdot \frac{\partial v}{\partial V} + \\ & \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial u}{\partial V} \cdot \frac{\partial v}{\partial U} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial U \partial V} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial U \partial V} \\ G_{VV} = & \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial V} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial u}{\partial V} \cdot \frac{\partial v}{\partial V} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial V} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial V^2} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial V^2} \\ H_{UU} = & \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial U} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial u}{\partial U} \cdot \frac{\partial v}{\partial U} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial U} \right)^2 + \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial U^2} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial U^2} \\ H_{UV} = & \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial U} \cdot \frac{\partial u}{\partial V} + \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial u}{\partial U} \cdot \frac{\partial v}{\partial V} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial U} \cdot \frac{\partial v}{\partial V} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial u}{\partial V} \cdot \frac{\partial v}{\partial U} + \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial U \partial V} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial U \partial V} \\
H_{VV} = & \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial V} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial u}{\partial V} \cdot \frac{\partial v}{\partial V} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial V} \right)^2 + \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial V^2} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial V^2}
\end{aligned} \quad (22)$$

由文献[9]可知

$$b'(0) = \frac{\int_{\Omega} \phi_* \mathbf{F}_{(U,V)(U,V)}(\theta_a, 0, b_*) [\phi_*, \phi_*]^2 dx}{2 \int_{\Omega} \phi_* \mathbf{F}_{b(U,V)}(\theta_a, 0, b_*) [\phi_*, \phi_*] dx} = \frac{A}{B}$$

其中 A, B 由(16)式给出.

考虑特征值问题

$$\begin{cases} \mathbf{L}(s) \begin{pmatrix} U(s) \\ V(s) \end{pmatrix} = \rho(s) \begin{pmatrix} U(s) \\ V(s) \end{pmatrix} & x \in \Omega \\ U(s) = V(s) = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

其中

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}(s) = & -\mathbf{F}_{(U,V)}(U(s), V(s), b(s)) = \\
& \begin{pmatrix} -\Delta - \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial U} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial U} \right) & - \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial V} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial V} \right) \\ - \left(\frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial U} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial U} \right) & -\Delta - \left(\frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial V} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial V} \right) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

因为当 $s \rightarrow 0$ 时, $(U(s), V(s), b(s)) \rightarrow (\theta_a, 0, b_*)$, 所以

$$\lim_{s \rightarrow 0} \mathbf{L}(s) = \begin{pmatrix} -\Delta - (a - 2\theta_a) & [\alpha(a - 2\theta_a) + c(1 + m\theta_a)^{-1}] \frac{(1 + \beta\theta_a)\theta_a}{(1 + \beta\theta_a + \gamma)} \\ 0 & -\Delta - \left(b_* + \frac{d\theta_a}{1 + m\theta_a} \right) \frac{1 + \beta\theta_a}{1 + \beta\theta_a + \gamma} \end{pmatrix} =: \mathbf{L}_0$$

由于

$$\begin{aligned}
\lambda_1 \left(- \left(b_* + \frac{d\theta_a}{1 + m\theta_a} \right) \frac{1 + \beta\theta_a}{1 + \beta\theta_a + \gamma} \right) &= 0 \\
\lambda_1(2\theta_a - a) &> 0
\end{aligned}$$

故 0 是算子 $\mathbf{L}_0$ 的最小特征值(对应的特征函数是 (ϕ_*, ψ_*)), 而且 $\mathbf{L}_0$ 的其他特征值都具有正实部. 由摄动定理知, 存在 $\delta_1 \in (0, \delta]$ 使得当 $s \in (0, \delta_1)$ 时, $\mathbf{L}$ 存在唯一的特征值 $\rho(s)$ 满足

$$\lim_{s \rightarrow 0} \rho(s) = 0$$

并且 $\mathbf{L}$ 的其他特征值都具有正实部.

下面讨论当 $s > 0$ 适当小时 $\rho(s)$ 的符号, 考虑特征值问题

$$\begin{cases} -\mathbf{F}_{(U,V)}(\theta_a, 0, b) \begin{pmatrix} \phi(b) \\ \psi(b) \end{pmatrix} = m(b) \begin{pmatrix} \phi(b) \\ \psi(b) \end{pmatrix} & x \in \Omega \\ \phi(b) = \psi(b) = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

类似 $\mathbf{L}$ 的讨论, 可得存在一个适当小的常数 $\delta_2 \in (0, \delta]$ 使得当 $|b - b_*| < \delta_2$ 时, $-\mathbf{F}_{(U,V)}(\theta_a, 0, b)$ 存在唯一的特征值 $m(b)$ 满足

$$\lim_{b \rightarrow b_*} m(b) = 0$$

并且 $-\mathbf{F}_{(U,V)}(\theta_a, 0, b)$ 的其他特征值都具有正实部. 另外, $m(b)$ 满足特征值问题

$$\begin{cases} -\Delta \phi(b) - \left(b + \frac{d\theta_a}{1 + m\theta_a} \right) \frac{1 + \beta\theta_a}{1 + \beta\theta_a + \gamma} \phi(b) = m(b) \phi(b) & x \in \Omega \\ \phi(b) = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (23)$$

由于 $m(b_*) = 0$, $\psi(b_*) = \psi_*$, 将(23)式两边关于 b 求导, 令 $\chi = \psi'(b_*)$ 并取 $b = b_*$ 得

$$\begin{cases} -\Delta\chi - \left(b_* + \frac{d\theta_a}{1+m\theta_a}\right) \frac{1+\beta\theta_a}{1+\beta\theta_a+\gamma} \chi - \psi_* = m'(b_*)\psi_* & x \in \Omega \\ \chi = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (24)$$

将(25)式两边乘以 ψ_* 并在 Ω 上积分得

$$\begin{aligned} m'(b_*) \int_{\Omega} \psi_*^2 dx &= - \int_{\Omega} \psi_*^2 + \int_{\Omega} \left(-\Delta\chi\psi_* - \left(b_* + \frac{d\theta_a}{1+m\theta_a}\right) \frac{1+\beta\theta_a}{1+\beta\theta_a+\gamma} \chi\psi_* \right) dx = \\ &= - \int_{\Omega} \psi_*^2 + \int_{\Omega} \chi \left(-\Delta\psi_* - \left(b_* + \frac{d\theta_a}{1+m\theta_a}\right) \frac{1+\beta\theta_a}{1+\beta\theta_a+\gamma} \psi_* \right) dx = \\ &= - \int_{\Omega} \psi_*^2 \end{aligned} \quad (25)$$

因为 ψ_* 在 Ω 内的值是正的, 所以 $m'(b_*) = -1$. 因为 $b'(0) \neq 0$, 故存在一个正数 $\delta_3 \leq \min\{\delta_1, \delta_2\}$ 使得当 $0 < s < \delta_3$ 时, $\rho(s) \neq 0$ 并且有^[9]

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\rho(s)}{s} = -m'(b_*)b'(0) = b_1$$

此时可知存在一个正数 $\delta' \leq \delta_3$ 使得当 $0 < s < \delta'$ 时, $\rho(s)$ 与 b_1 符号相同. 定理得证.

定理 2 固定 $a > \lambda_1$, b_* 和 A 分别由(13)和(16)式所定义, 如果 $A < 0$, 则存在一个常数 $\varepsilon > 0$ 使得:

- (i) 当 $b_* - \varepsilon < b < b_*$ 时, 方程(5)至少有两个共存解;
- (ii) 当 $b \geq b_* - \varepsilon$ 时, 方程(5)至少有一个共存解.

证 由引理 1 知, 方程(5)在 $(\theta_a, 0, b_*)$ 附近有共存解曲线 Γ_1 . 由于

$$b'(0) = \frac{A}{B} < 0$$

则当 $s > 0$ 适当小时有 $b(s) < b_*$. 下面用反证法证明定理的结论. 假设在 b_* 附近且 $b < b_*$ 时方程(5)有唯一解 $(\hat{U}, \hat{V})$, 显然 $(\hat{U}, \hat{V}) = (U(s), V(s))$, 并且由定理 1 知它是非退化的共存解. 令 D 是(7)式定义的区域, $\overset{\circ}{D}$ 表示其内部, $\mathbf{A}$ 是由(8)式所定义的算子, 则有 $\mathbf{I} - \mathbf{A}_{(U,V)}(\hat{U}, \hat{V}) : \overline{W_{(\hat{U}, \hat{V})}} \rightarrow \overline{W_{(\hat{U}, \hat{V})}}$ 是可逆的. 因为 $(\hat{u}, \hat{v}) \in \overset{\circ}{D}$, 根据文献[10]定理 4.9.3 知 $\text{index}_W(\mathbf{A}, (\hat{u}, \hat{v})) = \pm 1$. 注意到当 $0 < s \ll 1$, $a > \lambda_1$ 时, $\lambda_1 < b < b_*$. 再由(11)式可知

$$1 = \deg_W(\mathbf{I} - \mathbf{A}, \overset{\circ}{D}) =$$

$$\text{index}_W(\mathbf{A}, (0, 0)) + \text{index}_W(\mathbf{A}, (\theta_a, 0)) + \text{index}_W(\mathbf{A}, (0, (1+\gamma)\theta_b)) + \text{index}_W(\mathbf{A}, (\hat{U}, \hat{V})) = 0 + 0 + 1 \pm 1$$

矛盾. 定理得证.

参考文献:

- [1] KADOTA T, KUTO K. Positive Steady States for a Prey-Predator Model with Some Nonlinear Diffusion Terms [J]. J Math Anal Appl, 2006, 323(2): 1387—1401.
- [2] KUTO K, A Strongly Coupled Diffusion Effect on the Stationary Solution Set of a Prey-Predator Model [J]. Adv Differential Equations, 2007, 12(2): 145—172.
- [3] KUTO K, YAMADA Y. Coexistence Problem for a Prey-Predator Model with Density-Dependent Diffusion [J]. Nonlinear Anal, 2009, 71(12): e2223—e2232.
- [4] KUTO K, YAMADA Y. Limiting Characterization of Stationary Solutions for a Prey-Predator Model with Nonlinear Diffusion of Fractional Type [J]. Differential Integral Equations, 2009, 22(7/8): 725—752.
- [5] WU J, GUO G, MA C. Nonlinear Diffusion Effect on Bifurcation Structures for a Predator-Prey Model [J]. Differential Integral Equations, 2011, 24(1/2): 177—198.

- [6] WANG Y X, LI W T. Stationary Problem of a Predator-Prey System with Nonlinear Diffusion Effects [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2015, 70(8): 2102–2124.
- [7] KUTO K, YAMADA Y. Positive Solutions for Lotka-Volterra Competition Systems with Large Cross-Diffusion [J]. Appl Anal, 2010, 89(7): 1037–1066.
- [8] ZHOU J, KIM C G. Positive Solutions for a Lotka-Volterra Prey-Predator Model with Cross-Diffusion of Fractional Type [J]. Results Math, 2014, 65(3/4): 293–320.
- [9] SHI J P. Persistence and Bifurcation of Degenerate Solutions [J]. J Funct Anal, 1999, 169(2): 494–531.
- [10] 王明新. 非线性椭圆型方程 [M]. 北京: 科学出版社, 2010: 147–149.

The Multiplicity of the Coexistence Solution of a Predator-Prey Model with Nonlinear Diffusion Terms

HAO Ai-jing, ZHOU Jun

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: In this paper we discuss a class of predator-prey systems with nonlinear diffusion terms. We mainly study the multiplicity of the coexistence solution by using the bifurcation theory and the degree theory and extend the previous results.

Key words: predator-prey model; nonlinear diffusion; the multiplicity of coexistence solutions

责任编辑 张 枸

