

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2017.03.015

一个考虑 Beddington-DeAngelis 型功能反应的 集团内捕食系统的灭绝与持久性^①

赖 菊, 张国洪

西南大学 数学与统计学院, 重庆 400715

摘要: 研究了一个考虑 Beddington-DeAngelis 型功能反应的集团内捕食系统模型, 分别得到了集团内猎物与集团内捕食者灭绝的条件, 分析了系统一致持久的充分条件, 并进一步研究了系统的全局吸引子.

关 键 词: 集团内捕食; Beddington-DeAngelis 型功能反应; 持久性; 灭绝性

中图分类号: O175 **文献标志码:** A **文章编号:** 1673-9868(2017)03-0095-07

在生态学中, 当一个捕食者与食饵共同竞争一种资源时, 称出现集团内捕食(intraguild predation). 大量生态学证据表明集团内捕食在自然界中是一种广泛存在的生态现象^[1-2]. 通过建立一个三维 ODE 基本模型, 文献[3]对这类问题从理论上做了一些开创性的研究; 在文献[3]的基础上, 文献[4]进一步全面研究了在双线性(Holling-I)功能性反应函数条件下, 集团内捕食模型的共存与灭绝等问题; 而文献[5-8]则分别考虑了集团内捕食者采用 Holling-II, Holling-III 及比例依赖型的功能反应函数的动力学模型, 研究了上述各种功能反应函数对集团内捕食系统性态的影响.

注意到上述参考文献没有考虑捕食者种群内部之间的竞争效应, 本文引入捕食者的 Beddington-DeAngelis 型功能反应, 通过无量纲化得到如下的模型:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x(1-x) - \frac{xy}{c_1+x+e_1y} - \frac{xz}{c_2+x+e_2z} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{m_1xy}{c_1+x+e_1y} - \frac{a_3yz}{c_3+y+e_3z} - d_1y \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{m_2xz}{c_2+x+e_2z} + \frac{m_3yz}{c_3+y+e_3z} - d_2z\end{aligned}\tag{1}$$

其中: x 为共享资源(resource)的密度, 在没有捕食者时该资源按 logistic 增长; y 和 z 分别代表集团内猎物(intraguild prey 或 IG-prey)与集团内捕食者(intraguild predator 或 IG-predator)的密度, 参数 d_1 和 d_2 分别表示两类捕食者的死亡率; 假设所有捕食关系都遵循 Beddington-DeAngelis 型功能反应, 相关参数意义参见文献[9]. 特别地, 参数 e_i ($i=1,2,3$) 表示捕食者种群对其自身捕食的干扰强度.

最近, 文献[10]对考虑 Beddington-DeAngelis 型功能反应的非自治集团内捕食系统的周期解问题做了研究, 我们指出本文所得到的种群灭绝和系统持久的相关条件和结论与文献[10]有所不同, 且我们所得

① 收稿日期: 2015-12-30
基金项目: 国家自然科学基金项目(11461023); 教育部基本科研业务费项目(XDJK2016C121); 西南大学博士基金项目(SWU112099).
作者简介: 赖 菊(1992-), 女, 四川宜宾人, 硕士研究生, 主要从事生物数学及动力系统理论及其应用研究.
通信作者: 张国洪, 副教授.

的部分条件要求更低.

1 耗散与灭绝

引理 1 假设

$$0 < d_1 < \frac{m_1}{c_1 + 1} \quad 0 < d_2 < \frac{m_2}{c_2 + 1} + \frac{m_3 y^*}{c_3 + y^*} \quad (2)$$

那么模型(1) 满足初始条件 $(x(0), y(0), z(0)) > (0, 0, 0)$ 的解 $(x(t), y(t), z(t))$ 非负且满足

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} x(t) \leq 1 \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} y(t) \leq y^* \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} z(t) \leq z^*$$

其中

$$y^* = \frac{m_1 - d_1(c_1 + 1)}{e_1 d_1}$$

z^* 为满足方程

$$\frac{m_2 z}{c_2 + 1 + e_2 z} + \frac{m_3 y^* z}{c_3 + y^* + e_3 z} - d_2 z = 0$$

的唯一正根.

证 根据比较定理, 由初值条件 $(x, y, z) \geq (0, 0, 0)$ 易知系统(1) 的解为非负的. 从而由第一个方程得:

$$\frac{dx}{dt} \leq x(1 - x)$$

进而有

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} x(t) \leq 1$$

即对任意的 $\epsilon > 0$, 存在一个 $T(\epsilon) > 0$, 对任意的 $T > T(\epsilon)$ 有:

$$x(t) \leq 1 + \epsilon$$

从而由系统(1) 的第二个方程我们有

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &\leq \frac{m_1 y(1 + \epsilon)}{c_1 + 1 + \epsilon + e_1 y} - d_1 y \leq \\ &\frac{m_1 y}{c_1 + 1 + e_1 y} - d_1 y + m_1 \epsilon, t \in (T(\epsilon), \infty) \end{aligned}$$

考虑下面的辅助方程

$$\frac{dy}{dt} = \frac{m_1 y}{c_1 + 1 + e_1 y} - d_1 y \quad (3)$$

容易证明, 如果 $d_1 < \frac{m_1}{c_1 + 1}$, 则方程(3) 存在唯一的正平衡点

$$y^* = \frac{m_1 - d_1(c_1 + 1)}{e_1 d_1}$$

且知它在 $\mathbb{R}^+$ 上是全局渐近稳定的. 从而由比较定理我们有

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} y(t) \leq y^*$$

因此存在一个 $T'(\epsilon) > T(\epsilon)$, 对所有的 $T > T'(\epsilon)$ 满足:

$$y(t) \leq y^* + \epsilon$$

由系统(1) 的第三个方程, 我们有

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &\leq \frac{m_2(1 + \epsilon)z}{c_2 + 1 + \epsilon + e_2 z} + \frac{m_3(y^* + \epsilon)z}{c_3 + y^* + \epsilon + e_3 z} - d_2 z \leq \\ &\frac{m_2 z}{c_2 + 1 + e_2 z} + \frac{m_3 y^* z}{c_3 + y^* + e_3 z} + (m_2 \epsilon + m_3 \epsilon) - d_2 z, t \in (T'(\epsilon), \infty) \end{aligned}$$

考虑下面的辅助方程

$$\frac{dz}{dt} = \frac{m_2 z}{c_2 + 1 + e_2 z} + \frac{m_3 y^* z}{c_3 + y^* + e_3 z} - d_2 z \quad (4)$$

容易证明, 当

$$d_1 < \frac{m_1}{c_1 + 1} \quad d_2 < \frac{m_2}{c_2 + 1} + \frac{m_3 y^*}{c_3 + y^*}$$

时, (4) 式存在唯一的正平衡解 z^* , 且全局渐近稳定. 从而根据比较定理我们有

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} z(t) \leq z^*$$

引理证明完毕.

定理 1 设模型(1) 满足初始条件 $(x(0), y(0), z(0)) > (0, 0, 0)$ 的解为 $(x(t), y(t), z(t))$, 则下面结论成立.

(i) 若 $d_1 > \frac{m_1}{c_1 + 1}$, 则有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$$

(ii) 若 $d_1 < \frac{m_1}{c_1 + 1}$ 且

$$d_2 > \frac{m_2}{c_2 + 1} + \frac{m_3 y^*}{c_3 + y^*}$$

则有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$$

(iii) 若 $d_1 > \frac{m_1}{c_1 + 1}$ 且

$$d_2 > \frac{m_2}{c_2 + 1}$$

则有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$$

且

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$$

证 (i) 根据引理 1, 对于足够大的 t , 我们有

$$x(t) \leq 1 + \epsilon \quad (5)$$

取

$$\epsilon = \frac{1}{2m_1} \left(d_1 - \frac{m_1}{c_1 + 1} \right)$$

根据系统(1) 的第二个方程, 对足够大的 t 有

$$\frac{dy}{ydt} \leq \left(\frac{m_1}{c_1 + 1} - d_1 + m_1 \epsilon \right) < \frac{1}{2} \left(\frac{m_1}{c_1 + 1} - d_1 \right) < 0$$

因此有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$$

成立.

(ii) 根据引理 1, 当 $d_1 < \frac{m_1}{c_1 + 1}$ 时, 对充分大的 t 有

$$y(t) \leq y^* + \epsilon \quad (6)$$

取

$$\epsilon = \frac{1}{2(m_2 + m_3)} \left(d_2 - \frac{m_2}{c_2 + 1} - \frac{m_3 y^*}{c_3 + y^*} \right)$$

那么根据系统(1)的第三个方程,对充分大的 t 有

$$\begin{aligned} \frac{dz}{zdt} &\leq \frac{m_2(1+\epsilon)}{c_2+1+\epsilon+e_2z} + \frac{m_3(y^*+\epsilon)}{c_3+y^*+\epsilon+e_3z} - d_2 \leq \\ &\frac{m_2}{c_2+1} + \frac{m_3 y^*}{c_3+y^*} + (m_2\epsilon + m_3\epsilon) - d_2 \leq \\ &\frac{1}{2} \left(\frac{m_2}{c_2+1} + \frac{m_3 y^*}{c_3+y^*} - d_2 \right) < 0 \end{aligned}$$

从而由比较原理知

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$$

(iii) 若

$$d_1 > \frac{m_1}{c_1+1} \quad d_2 > \frac{m_2}{c_2+1}$$

取

$$\epsilon = \frac{1}{2(m_2+1)} \left(d_2 - \frac{m_2}{c_2+1} \right) > 0$$

则对充分大的 t 有:

$$y < \frac{c_3}{m_3} \epsilon$$

从而由(5),(6)式及系统(1)的第三个方程,对充分大的 t 有

$$\frac{dz}{zdt} \leq \left(\frac{m_2}{c_2+1} - d_2 + (m_2+1)\epsilon \right) < \frac{1}{2} \left(\frac{m_2}{c_2+1} - d_2 \right) < 0$$

因此有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$$

2 持久性与全局吸引子

引理 2 假设

$$\begin{aligned} \frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} &< 1 \\ 0 < d_1 &< \frac{m_1 \left(\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} \right)}{c_1 + \frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2}} - \frac{a_3}{e_3} \\ 0 < d_2 &< \frac{m_2 x_*}{c_2 + x_*} + \frac{m_3 y_*}{c_3 + y_*} \end{aligned} \quad (7)$$

那么模型(1)满足初始条件 $(x(0), y(0), z(0)) > (0, 0, 0)$ 的解 $(x(t), y(t), z(t))$ 满足

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} x(t) \geq x_* \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} y(t) \geq y_* \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} z(t) \geq z_* \quad (8)$$

其中

$$x_* = 1 - \frac{1}{e_1} - \frac{1}{e_2} \quad y_* = \frac{e_3 m_1 x_* - (a_3 + e_3 d_1)(c_1 + x_*)}{e_1(a_3 + e_3 d_1)}$$

z_* 为方程

$$\frac{m_2 x_*}{c_2 + x_* + e_2 z} + \frac{m_3 y_*}{c_3 + y_* + e_3 z} - d_2 = 0$$

的唯一正根.

证 由系统(1) 的第一个方程, 我们有

$$\frac{dx}{dt} \geq x \left(1 - \frac{1}{e_1} - \frac{1}{e_2} - x \right)$$

由比较定理及假设条件 $\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} < 1$ 有

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} x(t) \geq x_* > 0$$

从而对于足够小的 $\epsilon > 0$, 存在 T_ϵ , 对任意的 $t > T_\epsilon$ 有:

$$x(t) \geq x_* - \epsilon$$

由系统(1) 的第二个方程我们有

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &\geq \frac{m_1(x_* - \epsilon)y}{c_1 + x_* - \epsilon + e_1 y} - \left(\frac{a_3}{e_3} + d_1 \right) y \geq \\ &\frac{m_1 x_* y}{c_1 + x_* + e_1 y} - \left(\frac{a_3}{e_3} + d_1 \right) y - \frac{m_1 y}{c_1} \epsilon, t \in (T_\epsilon, \infty) \end{aligned}$$

考虑下面辅助方程

$$\frac{dy}{dt} = \frac{m_1 x_* y}{c_1 + x_* + e_1 y} - \left(\frac{a_3}{e_3} + d_1 \right) y \quad (9)$$

容易证明, 当 $e_3 m_1 x_* > (a_3 + e_3 d_1)(c_1 + x_*)$ 时, 系统(9) 唯一的正平衡点 y_* 在 $\mathbb{R}^+$ 上全局渐近稳定. 由比较定理有

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} y(t) \geq y_* > 0$$

从而存在 T'_ϵ , 对任意 $t > T'_\epsilon$ 有

$$y(t) \geq y_* - \epsilon$$

再由系统(1) 的第三个方程有

$$\frac{dz}{dt} \geq \frac{m_2 x_* z}{c_2 + x_* + e_2 z} + \frac{m_3 y_* z}{c_3 + y_* + e_3 z} - d_2 z - \left(\frac{m_2 z}{c_2} + \frac{m_3 z}{c_3} \right) \epsilon, t \in (T'_\epsilon, \infty)$$

考虑下面辅助方程

$$\frac{dz}{dt} = \frac{m_2 x_* z}{c_2 + x_* + e_2 z} + \frac{m_3 y_* z}{c_3 + y_* + e_3 z} - d_2 z \quad (10)$$

容易证明当 $d_2 < \frac{m_2 x_*}{c_2 + x_*} + \frac{m_3 y_*}{c_3 + y_*}$ 时, (10) 式存在唯一的正平衡点 z_* , 且该平衡点是全局渐近稳定的.

从而由比较定理知

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} z(t) \geq z_* > 0$$

证明完毕.

定理 2 假设条件(7) 成立, 那么系统(1) 存在一个正的全局吸引子 $[x_*, x^*] \times [y_*, y^*] \times [z_*, z^*]$.

证 由条件 $\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} < 1$ 知

$$x_* < 1 \quad d_1 < \frac{m_1 \left(\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_3} \right)}{c_1 + \frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_3}} - \frac{a_3}{e_3} < \frac{m_1}{c_1 + 1}$$

从而 $y_* < y^*$. 因此有

$$d_2 < \frac{m_2 x_*}{c_2 + x_*} + \frac{m_3 y_*}{c_3 + y_*} < \frac{m_2}{c_2 + 1} + \frac{m_3 y^*}{c_3 + y^*}$$

因此若条件(7)成立, 则条件(2)成立, 即引理 1 和引理 2 同时成立. 从而系统(1) 满足初始条件 $(x(0), y(0), z(0)) > (0, 0, 0)$ 的解 $(x(t), y(t), z(t))$ 同时满足下面的不等式:

$$x_* \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} x(t) \leq x^* \quad y_* \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} y(t) \leq y^* \quad z_* \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} z(t) \leq z^*$$

这表明 $[x_*, x^*] \times [y_*, y^*] \times [z_*, z^*]$ 是系统(1) 的一个正的全局吸引子. 证明完毕.

3 数值模拟

本节对前面结论通过数值模拟进行验证. 取定参数 $m_1 = 0.35, m_2 = 0.25, m_3 = 0.15, c_1 = c_2 = c_3 = 0.1, e_1 = 3.5, e_2 = 2.5, e_3 = 1.5, a_3 = 0.2$. 当 $d_1 = 0.35, d_2 = 0.1$ 时, 定理 1(i) 条件成立, 则集团内猎物(IG-prey) 灭绝(如图 1(a)); 当 $d_1 = 0.052, d_2 = 0.6$ 时, 定理 1(ii) 中条件成立, 则对应集团内捕食者(IG-predator) 灭绝(如图 1(b)); 而当 $d_1 = 0.05, d_2 = 0.065$ 时, 定理 2 中条件成立, 系统(1) 一致持续(如图 1(c)).

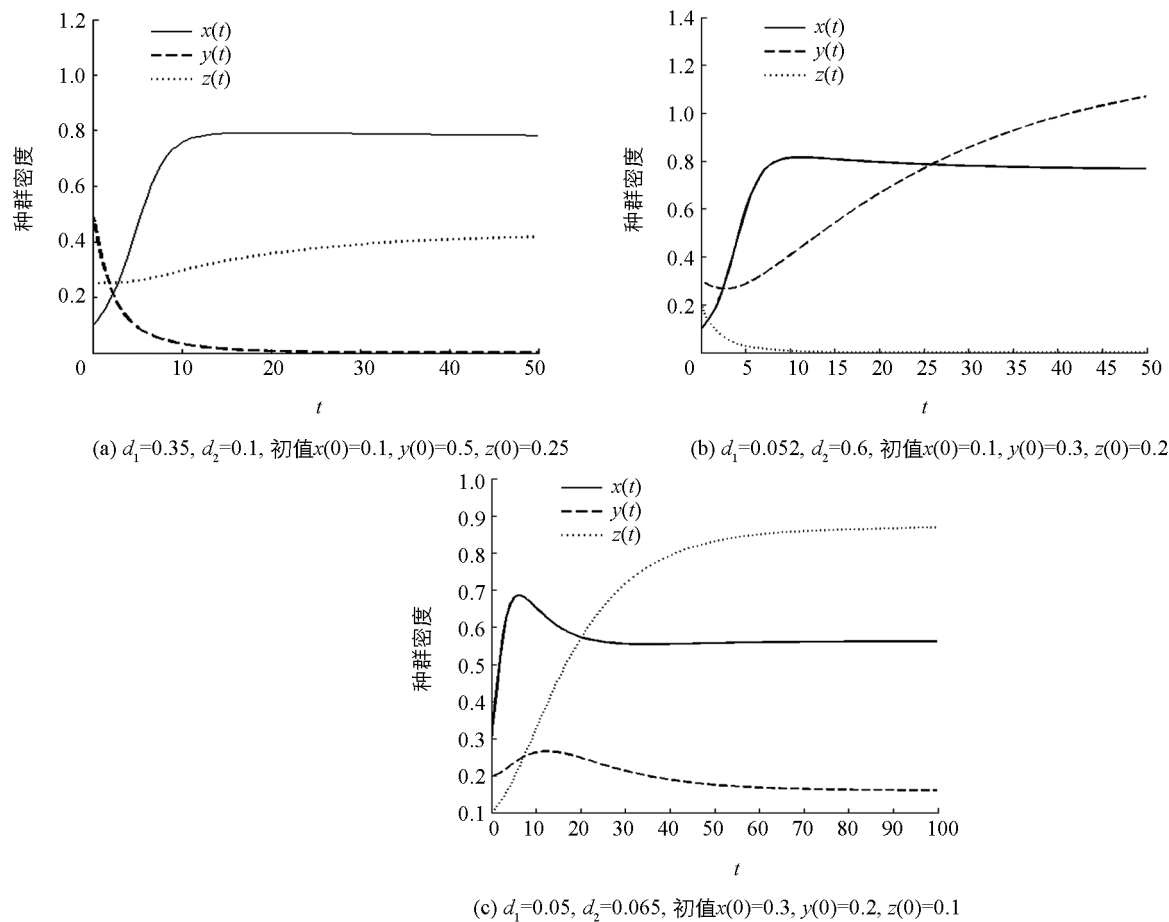


图 1 种群密度时间序列图

参考文献:

- [1] PIMM S L, LAWTON J H. Number of Trophic Levels in Ecological Communities [J]. Nature, 1977, 268(5618): 329—331.
- [2] PIMM S L, LAWTON J H. On Feeding on More than One Trophic Level [J]. Nature, 1978, 275(5680): 542—544.
- [3] HOLT R D, POLIS G A. A Theoretical Framework for Intraguild Predation [J]. Am Nat, 1997, 149(4): 745—764.
- [4] HSU S B, RUAN S G, YANG T H. Analysis of Three Species Lotka-Volterra Food Web Models with Omnivory [J]. J Math Anal Appl, 2015, 426(2): 659—687.
- [5] ABRAMS P A, FUNG S R. Prey Persistence and Abundance in Systems with Intraguild Predation and Type-2 Functional

Responses [J]. J Theor Biol, 2010, 264(3): 1033–1042.

[6] VERDY A, AMARASEKARE P. Alternative Stable States in Communities with Intraguild Predation [J]. J Theor Biol, 2010, 262(1): 116–128.

[7] KANG Y, WEDEKIN L. Dynamics of a Intraguild Predation Model with Generalist or Specialist Predator [J]. J Math Biol, 2013, 67(5): 1227–1259.

[8] FREEZE M, CHANG Y, FENG W. Analysis of Dynamics in a Complex Food Chain with Ratio-Dependent Functional Response [J]. J Appl Anal Comput, 2014, 4(1): 69–87.

[9] BEDDINGTON J R. Mutual Interference Between Parasites or Predators and Its Effect on Searching Efficiency [J]. J Animal Ecol, 1975, 44(1): 331–340.

[10] CUI H, YANG L, LI P, et al. Positive Periodic Solutions of a Nonautonomous Intraguild Predation with the Beddington-DeAngelis Functional Response [J]. 黑龙江大学学报(自然科学版), 2015, 32(6): 760–766.

Extinction and Permanence of an Intraguild Predation Model with Beddington-DeAngelis Functional Response

LAI Ju, ZHANG Guo-hong

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: In a study reported in this paper, an intraguild predation model with Beddington-DeAngelis functional response was investigated. Some sufficient conditions on the extinction and permanence of the population in the system were obtained. Furthermore, we also investigated the global attractor of the system.

Key words: intraguild predation; Beddington-DeAngelis functional response; permanence; extinction

责任编辑 张 枸

