DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2017.03.017

一类带有分数型交错扩散的捕食-食饵模型的多解性研究①

罗丽容，　周　军

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：研究了一类具有分数型交错扩散的捕食-食饵模型. 此模型用于描述种群栖息地的分化现象. 通过分析该模型的线性化问题的特征值问题，并利用分支理论和拓扑度理论研究了该模型的正平衡态解的性质，并得到了正平衡态解的多重性条件，此结论推广并完善了已有的结果.

关　键　词：分数型交错扩散；捕食-食饵模型；正解；多重性

中图分类号：O175.2　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9868(2017)03-0108-07

具有交错扩散的种群模型是一类重要的生物模型，此类模型最初由 Shigesada 等人提出[1]，主要用于描述种群栖息地的分化现象. 此后，有很多生物数学工作者对此类模型的动力学行为、平衡态模式进行了研究[2-7]. 最近，文献[8] 研究了如下一类带有分数型交错扩散项的捕食-食饵模型：

$$\begin{cases} -\Delta\left[\left(2-\dfrac{r_1}{1+\alpha v}\right)u\right]=u\,[(2-r_1)a-u-cv] & x\in\Omega \\ -\Delta\left[\left(1+\dfrac{r_2}{1+\beta u}\right)v\right]=v\,[(1+r_2)b+\mathrm{d}u-v] & x\in\Omega \\ u=v=0 & (x,t)\in\partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

其中：$\Omega\subset\mathbb{R}^N\,(1\leqslant N\leqslant 5)$ 是有界区域并具有光滑边界 $\partial\Omega$；系数 $a,c,d,r_2>0$，$\alpha,\beta\geqslant 0$，$r_1\leqslant 1$，$b\in\mathbb{R}$ 是实常数. 模型(1) 的相关生物背景可参见文献[8]. 在该文献中作者对此模型正解的存在性条件及其动力学行为进行了研究，所谓正解是指满足模型(1) 并在 Ω 内取正的解.

下面我们介绍一些本文所需的符号和结果. 令 $\lambda_1(q)$ 表示如下特征值问题的主特征值：

$$-\Delta u+q(x)u=\lambda u\qquad x\in\Omega,\ u=0\qquad x\in\partial\Omega \tag{2}$$

其中 $q(x)\in C(\overline{\Omega})$，由文献[8] 可知 $\lambda_1(q)$ 是简单的，其对应的特征函数在 Ω 内不变号，并且如下结论成立：若 $q_1(x)\leqslant q_2(x)$，$q_1(x)\not\equiv q_2(x)$，则 $\lambda_1(q_1)<\lambda_1(q_2)$. 我们记 $\lambda_1=\lambda_1(0)$，并令 ϕ_1 为其对应的满足 $\|\phi_1\|_{L^2(\Omega)}=1$ 的正特征函数.

类似于文献[8]，当常数 $a>\lambda_1$ 时，我们记如下 Logistic 方程

$$-\Delta u=u(a-u)\qquad x\in\Omega,\ u=0\qquad x\in\partial\Omega \tag{3}$$

的唯一正解为 θ_a. 由文献[9] 可知：如果 $a\leqslant\lambda_1$，$u=0$ 是(3) 式的唯一非负解；θ_a 是关于 a 的递增函数且对任意的 $x\in\Omega$ 有 $0<\theta_a<a$；$\lim\limits_{a\to\lambda_1^+}\theta_a(x)=0$ 关于 $x\in\Omega$ 是一致的；$\lim\limits_{a\to\infty}\theta_a=\infty$ 和 $\lim\limits_{a\to\infty}\dfrac{\theta_a}{a}=1$ 在 Ω 的任

① 收稿日期：2015-12-06

基金项目：国家自然科学基金项目(11201380)；中国博士后基金一等项目(2014M550453)；中国博士后基金特别项目(2015T80948)；中央高校基本科研业务费重大项目(XDJK2015A16).

作者简介：罗丽容(1990-)，女，四川巴中人，硕士研究生，主要从事非线性偏微分方程理论及其应用研究.

通信作者：周　军，教授.

意紧子集上一致成立.

设 E 是一个Banach空间，W 是 E 的一个闭凸子集，$\boldsymbol{A}: W \longrightarrow W$ 是一个紧的Frechet可微的算子，$y \in W$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个孤立不动点，G 是 W 的一个开子集且 $\boldsymbol{A}$ 在 G 的边界 ∂G 上没有不动点，类似于文献[5]，我们可以定义 Leray-Schauder 度 $\deg_W(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}, G, 0)$. 孤立不动点 y 的不动点指数 $\operatorname{index}(\boldsymbol{A}, y)$ 定义为 $\deg_W(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}, N(y), 0)$，其中 $N(y)$ 表示 y 在 W 中的一个小邻域. 进一步，如果 $\deg_W(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}, G, 0) \neq 0$，则有 $\boldsymbol{A}$ 在 G 中至少有一个不动点.

近年来，有许多作者研究了具有扩散项的种群模型的正解的多重性，如文献[10－14]等. 文献[8]没有考虑模型(1)正解的多重性. 在本文中，我们将利用分支理论和拓扑度理论研究模型(1)正解的多重性条件.

1 主要结果和证明

由文献[8]可知，模型(1)等价于如下问题：

$$\begin{cases}-\Delta \overline{U}=u\left[(2-r_1)a-u-cv\right] & (x, t) \in \Omega \times(0, T) \\ -\Delta \overline{V}=v\left[(1+r_2)b+\mathrm{d}u-v\right] & (x, t) \in \Omega \times(0, T) \\ \overline{U}=\overline{V}=0 & x \in \Omega\end{cases} \tag{4}$$

其中，

$$\overline{U}=\left(2-\frac{r_1}{1+\alpha v}\right)u$$
$$\overline{V}=\left(1+\frac{r_2}{1+\beta u}\right)v \tag{5}$$

显然模型(4)具有平凡解$(\overline{U}, \overline{V})=(0, 0)$；如果 $a>\lambda_1$，模型(4)具有半平凡解$(\overline{U}, \overline{V})=((2-r_1)^2\theta_a, 0)$；如果 $b>\lambda_1$，模型(4)具有半平凡解$(\overline{U}, \overline{V})=(0, (1+r_2)^2\theta_b)$. 由此可以看出模型(1)有两条半平凡解曲线：

$$\Gamma_1=\{(\overline{U}, \overline{V}, b)=((2-r_1)^2\theta_a, 0, b): a \geqslant \lambda_1, b \in \mathbb{R}\}$$
$$\Gamma_2=\{(\overline{U}, \overline{V}, b)=(0, (1+r_2)^2\theta_b, b): b \geqslant \lambda_1\} \tag{6}$$

为了研究以上各平凡解和半平凡解的不动点指数，我们首先定义以下集合：

$$E:=C_0(\overline{\Omega}) \times C_0(\overline{\Omega})$$
$$W:=K \times K, K=\{u(x) \in C_0(\overline{\Omega}): u(x) \geqslant 0, x \in \overline{\Omega}\}$$
$$D:=\{(\overline{U}, \overline{V}) \in W: \overline{U}(x) \leqslant M_1+1, \overline{V}(x) \leqslant M_2+1, x \in \overline{\Omega}\} \tag{7}$$

其中，

$$M_1(a)=\frac{(2-r_1)^2(c+2a\alpha)a}{c+(2-r_1)a\alpha}$$
$$M_2=b(1+r_2)^2+d(1+r_2)M_1(a)$$

由文献[8]中引理4.1可知(4)式的非负解都在 D 内，我们记 D 的内部为 $\mathring{D}$.

定义 E 上的算子 $\boldsymbol{A}$ 为

$$\boldsymbol{A}(\overline{U}, \overline{V})=(-\Delta+p\boldsymbol{I})^{-1}\begin{pmatrix}f\left[u(\overline{U}, \overline{V}), v(\overline{U}, \overline{V})\right]+p\overline{U} \\ g\left[u(\overline{U}, \overline{V}), v(\overline{U}, \overline{V})\right]+p\overline{V}\end{pmatrix} \tag{8}$$

其中：$f(u, v)=u((2-r_1)a-u-cv)$，$g(u, v)=v((1+r_2)b+\mathrm{d}u-v)$，$u(\overline{U}, \overline{V})$ 和 $v(\overline{U}, \overline{V})$ 由(5)式给出. 常数 p 充分大使得 $\boldsymbol{A}: \overline{D} \longrightarrow W$. 我们令

$$\varphi(\theta_a, b):=-\frac{\left[d(2-r_1)\theta_a+(1+r_2)b\right]\left[1+\beta(2-r_1)\theta_a\right]}{1+\beta(2-r_1)\theta_a+r_2}$$
$$\psi(a, \theta_b):=\frac{\left[c(1+r_2)\theta_b-(2-r_1)a\right]\left[1+\alpha(1+r_2)\theta_b\right]}{2+2\alpha(1+r_2)\theta_b-r_1} \tag{9}$$

根据文献[8]中的引理5.1和引理5.2，如下结论成立：

(i) $\deg_W(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A},\mathring{D})=1$，

(ii) 如果 $a>\lambda_1$ 且 $b\neq\lambda_1$，则有

$$\mathrm{index}_W(\boldsymbol{A},(0,0))=0$$

(iii) 如果 $a>\lambda_1$，$b\neq\lambda_1$ 且 $\lambda_1(\varphi(\theta_a,b))>0$，则

$$\mathrm{index}_W(\boldsymbol{A},((2-r_1)^2\theta_a,0))=1 \tag{10}$$

(iv) 如果 $a>\lambda_1$，$b>\lambda_1$ 且 $\lambda_1(\psi(a,\theta_b))<0$，则

$$\mathrm{index}_W(\boldsymbol{A},(0,(1+r_2)^2\theta_b))=0$$

为了给出本文的主要结果，我们在(a,b)平面内定义两条曲线 S_1 和 S_2 如下：

$$S_1=\left\{(a,b)\in\mathbb{R}^2:\lambda_1(\varphi(\theta_a,b))=0,\ a\geqslant\lambda_1,\ b\geqslant-\frac{d}{\beta r_2}\right\}$$
$$S_2=\{(a,b)\in\mathbb{R}^2:\lambda_1(\psi(a,\theta_b))=0,\ a\geqslant\lambda_1,\ b\geqslant\lambda_1\} \tag{11}$$

由文献[8]中的引理 6.1 和引理 6.2 可知：

$$S_1=\{(a,b)\in\mathbb{R}^2:b=f(a),\ \lambda_1\leqslant a\leqslant a^*\}$$
$$S_2=\{(a,b)\in\mathbb{R}^2:b=g(a),\ a\geqslant\lambda_1\} \tag{12}$$

其中 a^* 是一个大于 λ_1 的正常数且满足 $f(a^*)=-\dfrac{d}{\beta r_2}$，$f(a)$ 是$[\lambda_1,a^*]$上关于 a 递减的连续可微函数，$g(a)$ 是$[\lambda_1,+\infty)$上关于 a 递增的连续可微函数，并且 $f(a)$ 和 $g(a)$ 满足

$$f(\lambda_1)=\lambda_1,\ f'(\lambda_1)=-\frac{r_2\lambda_1\beta+d}{1+r_2}$$

$$g(\lambda_1)=\lambda_1,\ \lim_{a\to+\infty}g(a)=\infty,\ g'(\lambda_1)=\frac{2-r_1}{c+\lambda_1\alpha r_1}$$

利用分支理论，我们可以得到如下定理：

定理 1　固定 $a>\lambda_1$，模型(4)曲线在 Γ_1 附近有分支解当且仅当 $b=f(a)$，并且对充分小的 $\delta>0$，模型(4)在$((2-r_1)^2\theta_a,0,f(a))$附近的分支正解 $\Gamma_3=\{(\overline{U},\overline{V},b)=(\overline{U}(s),\overline{V}(s),b(s)):0<s\leqslant\delta\}$ 可表示为：

$$\overline{U}(s)=(2-r_1)^2\theta_a+s\eta+s\Phi_1(s)=(2-r_1)^2\theta_a+s\eta+O(s^2)$$
$$\overline{V}(s)=s\xi+s\Psi_1(s)=s\xi+O(s^2)$$
$$b(s)=f(a)+sb_1+O(s^2) \tag{13}$$

并且有

$$b_1=-\frac{A}{B} \tag{14}$$

$$A=\int_\Omega\frac{d(1+\beta(2-r_1)\theta_a)(1+\beta(2-r_1)\theta_a+r_2)+\beta r_2[(1+r_2)b+d(2-r_1)\theta_a]}{(1+\beta(2-r_1)\theta_a+r_2)^2(2-r_1)}\xi^2\eta-$$
$$\frac{(1+\beta(2-r_1)\theta_a)^2(1+\beta u+r_2)(2-r_1)+\alpha\beta r_1r_2(2-r_1)\theta_a[(1+r_2)b}{(2-r_1)(1+\beta(2-r_1)\theta_a+r_2)^3}\xi^3+$$
$$\frac{d(2-r_1)\theta_a](1+\beta(2-r_1)\theta_a)}{(2-r_1)(1+\beta(2-r_1)\theta_a+r_2)^3}\xi^3\mathrm{d}x \tag{15}$$

$$B=\int_\Omega(1+r_2)\frac{1+\beta(2-r_1)\theta_a}{1+\beta(2-r_1)\theta_a+r_2}\xi^2\mathrm{d}x$$

其中 ξ 和 η 的定义见(18)和(19)式，$\{\Phi_1(s),\Psi_1(s),b(s)\}$ 关于 s 是光滑的并满足

$$(\Phi_1(0),\Psi_1(0),b(0))=(0,0,f(a)),\ \int_\Omega\Psi_1\xi\mathrm{d}x=0,\ \int_\Omega\Phi_1\eta\mathrm{d}x=0$$

证　设 $X=[W^{2,p}(\Omega)\cap W_0^{1,p}(\Omega)]^2$，$Y=[L^p(\Omega)]^2$，定义映射 $\boldsymbol{S}:X\times\mathbb{R}\longrightarrow Y$ 如下：

$$\boldsymbol{S}(\overline{U},\overline{V},b)=\begin{pmatrix}\Delta\overline{U}+f(u(\overline{U},\overline{V}),v(\overline{U},\overline{V}))\\ \Delta\overline{V}+g(u(\overline{U},\overline{V}),v(\overline{U},\overline{V}))\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}F(\overline{U},\overline{V})\\ G(\overline{U},\overline{V})\end{pmatrix} \tag{16}$$

其中 f 和 g 由(8)式给出. 通过计算，我们可以得到：

$$\boldsymbol{S}_{(\overline{U},\overline{V})}(\overline{U},\overline{V},b)\begin{pmatrix}\phi\\ \varphi\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}\Delta\phi+(a-2\theta_a)\phi+\dfrac{\alpha r_1(2-r_1)\theta_a(a-2\theta_a)(1+\beta(2-r_1)\theta_a)-c(2-r_1)\theta_a}{1+r_2+\beta(2-r_1)\theta_a}\varphi\\ \Delta\varphi-\varphi(\theta_a,b)\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi\\ \varphi\end{pmatrix}\tag{17}$$

由于 $b=f(a)$ 时，$\lambda_1(\varphi(\theta_a,b))=0$，令 ξ 是其对应的满足 $\|\xi\|_{L^2(\Omega)}=1$ 的正特征函数，即 ξ 满足方程

$$\begin{cases}-\Delta\xi+\varphi(\theta_a,b)\xi=0 & x\in\Omega\\ \xi=0 & x\in\partial\Omega\end{cases}\tag{18}$$

由于算子 $-\Delta+2\theta_a-a$ 在 Dirichlet 边界条件下是可逆的，我们令 η 是问题

$$\begin{cases}-\Delta\eta+(2\theta_a-a)\eta=-\dfrac{\alpha r_1(2-r_1)\theta_a(a-2\theta_a)(1+\beta(2-r_1)\theta_a)-c(2-r_1)\theta_a}{1+\beta(2-r_1)\theta_a+r_2}\eta & x\in\Omega\\ \eta=0 & x\in\partial\Omega\end{cases}\tag{19}$$

的唯一解. 经计算得

$$\boldsymbol{S}_{b(\overline{U},\overline{V})}(\overline{U},\overline{V},b)=\begin{pmatrix}0\\ (1+r_2)\dfrac{1+\beta(2-r_1)\theta_a}{1+r_2+\beta(2-r_1)\theta_a}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{S}_{(\overline{U},\overline{V})(\overline{U},\overline{V})}(\phi,\varphi)^2=\begin{pmatrix}f_{\overline{UU}}\phi^2+f_{\overline{UV}}\varphi\phi+f_{\overline{VV}}\varphi^2\\ g_{\overline{UU}}\phi^2+g_{\overline{UV}}\varphi\phi+g_{\overline{VV}}\varphi^2\end{pmatrix}$$

在 $(\overline{U},\overline{V},b)=((2-r_1)^2\theta_a,0,f)$ 时，我们可以得到

$$N(\boldsymbol{S}_{(\overline{U},\overline{V})}((2-r_1)^2\theta_a,0,f))=\mathrm{span}\{\xi\},\ R(\boldsymbol{S}_{(\overline{U},\overline{V})}((2-r_1)^2\theta_a,0,f))=$$

$$\{(\chi,\psi)\in Y:\int_\Omega\psi\xi\mathrm{d}x=0\}$$

此外，由于 $\int_\Omega(1+r_2)\dfrac{1+\beta(2-r_1)\theta_a}{1+r_2+\beta(2-r_1)\theta_a}\xi^2\mathrm{d}x>0$，可知

$$\boldsymbol{S}_{b(\overline{U},\overline{V})}((2-r_1)^2\theta_a,0,f)[\eta,\xi]=\begin{pmatrix}0\\ (1+r_2)\dfrac{1+\beta(2-r_1)\theta_a}{1+r_2+\beta(2-r_1)\theta_a}\xi\end{pmatrix}\notin R(\boldsymbol{S}_{(\overline{U},\overline{V})}((2-r_1)^2\theta_a,0,f))$$

从而由 Rabinowitz 局部分支理论[15-16]可知定理成立. 再根据文献[17]可知,

$$b_1=-\frac{\langle L,\boldsymbol{S}_{(\overline{U},\overline{V})(\overline{U},\overline{V})}((2-r_1)^2\theta_a,0,f(a))[\eta,\xi]^2\rangle}{2\langle L,\boldsymbol{S}_{b(\overline{U},\overline{V})}((2-r_1)^2\theta_a,0,f(a))[\eta,\xi]\rangle}=-\frac{A}{B}$$

其中：A，B 由(15)式定义，L 是 Y 上的线性泛函满足 $\langle L,(\chi,\psi)\rangle=\int_\Omega\psi\xi\mathrm{d}x$. 定理证明完毕.

显然我们可以知道 $\{(\overline{U}(s),\overline{V}(s),b(s))\}_{0<s<\delta}$ 是(4)式的正解，下面我们研究这组正解 $(\overline{U}(s),\overline{V}(s))$ 的稳定性.

定理 2 假设 $a>\lambda_1$ 且 $b_1\neq0$，则存在常数 $\delta'\in(0,\delta]$，当 $0<s<\delta'$ 时，解 $(\overline{U}(s),\overline{V}(s),b(s))$ 是非退化的. 此外，若 $b_1<0$，则 $(\overline{U}(s),\overline{V}(s),b(s))$ 是不稳定的；若 $b_1>0$，则 $(\overline{U}(s),\overline{V}(s),b(s))$ 是稳定的.

证 设 X，Y 和 $\boldsymbol{S}$ 是定理 1 的证明中所定义的集合和映射，则对任意的 $(\varphi,\psi)\in X$，有

$$\boldsymbol{S}_{(\overline{U},\overline{V})}(\overline{U},\overline{V},b)\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}F_{\overline{U}} & F_{\overline{V}}\\ G_{\overline{U}} & G_{\overline{V}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}\tag{20}$$

考虑特征值问题

$$\begin{cases}\mathscr{L}(s)\begin{pmatrix}\overline{U}(s)\\ \overline{V}(s)\end{pmatrix}=\omega(s)\begin{pmatrix}\overline{U}(s)\\ \overline{V}(s)\end{pmatrix} & x\in\Omega\\ \overline{U}(s)=\overline{V}(s)=0 & x\in\partial\Omega\end{cases}$$

其中

$$\mathscr{L}(s) = -\boldsymbol{S}_{(\overline{U},\overline{V})}(\overline{U}(s), \overline{V}(s), b(s)) =$$

$$\begin{pmatrix} -\Delta - \left(\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial \overline{U}} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial \overline{U}}\right) & -\left(\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial \overline{V}} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial \overline{V}}\right) \\ -\left(\dfrac{\partial g}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial \overline{U}} + \dfrac{\partial g}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial \overline{U}}\right) & -\Delta - \left(\dfrac{\partial g}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial \overline{V}} + \dfrac{\partial g}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial \overline{V}}\right) \end{pmatrix}$$

当 $s \to 0$ 时，$(\overline{U}(s), \overline{V}(s), b(s)) \to ((2-r_1)^2\theta_a, 0, f)$. 因此，

$$\lim_{s\to 0}\mathscr{L}(s) = \begin{pmatrix} -\Delta - (a - 2\theta_a) & \dfrac{\alpha r_1(2-r_1)\theta_a(a-2\theta_a)(1+\beta(2-r_1)\theta_a) - c(2-r_1)\theta_a}{1+r_2+\beta(2-r_1)\theta_a} \\ 0 & -\Delta + \varphi(\theta_a, b) \end{pmatrix} := \mathscr{L}_0$$

由于

$$\lambda_1(\varphi(\theta_a, b)) = 0$$

$$\lambda_1(2\theta_a - a) > \lambda_1(\theta_a - a) = 0$$

故算子$\mathscr{L}_0$有最小特征值 0，并且$\mathscr{L}_0$的其他特征值都大于 0. 由摄动定理知，存在$\delta_1 \in (0, \delta]$使得当$s \in (0, \delta_1)$时，$\mathscr{L}$存在唯一的特征值$\omega(s)$满足

$$\lim_{s\to 0}\omega(s) = 0$$

并且$\mathscr{L}$的其他特征值的实部都大于 0.

下面讨论当$s > 0$适当小时$\omega(s)$的符号，考虑特征值问题

$$\begin{cases} -\boldsymbol{S}_{(\overline{U},\overline{V})}((2-r_1)^2\theta_a, 0, b)\begin{pmatrix}\eta(b)\\ \xi(b)\end{pmatrix} = m(b)\begin{pmatrix}\eta(b)\\ \xi(b)\end{pmatrix} & x \in \Omega \\ \eta(b) = \xi(b) = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

类似$\mathscr{L}$的讨论，可得存在一个适当小的常数$\delta_2 \in (0, \delta]$使得当$|b - f| < \delta_2$时，$-\boldsymbol{S}_{(\overline{U},\overline{V})}((2-r_1)^2\theta_a, 0, b)$存在唯一的特征值$m(b)$满足

$$\lim_{b\to f} m(b) = 0$$

并且$-\boldsymbol{S}_{(\overline{U},\overline{V})}((2-r_1)^2\theta_a, 0, b)$的其他特征值都有正实部. 另外，$m(b)$满足线性化特征值问题

$$\begin{cases} -\Delta\xi(b) + \varphi(\theta_a, b)\xi(b) = m(b)\xi(b) & x \in \Omega \\ \xi(b) = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{21}$$

由于$m(f) = 0$，$\xi(f) = \xi$，将(21)式两边关于b求导，

令$\zeta = \xi'(f)$并取$b = f$得

$$\begin{cases} -\Delta\zeta + \varphi(\theta_a, f)\zeta + \varphi'(\theta_a, f)\xi = m'(f)\xi & x \in \Omega \\ \zeta = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{22}$$

将(22)式两边乘以ξ并在Ω上积分得

$$\begin{aligned} m'(f)\int_\Omega \xi^2 \mathrm{d}x = & -\int_\Omega (1+r_2)\frac{1+\beta(2-r_1)\theta_a}{1+\beta(2-r_1)\theta_a+r_2}\xi^2\mathrm{d}x + \int_\Omega(-\Delta\zeta\xi + \varphi(\theta_a, f)\zeta\xi\mathrm{d}x = \\ & -\int_\Omega (1+r_2)\frac{1+\beta(2-r_1)\theta_a}{1+\beta(2-r_1)\theta_a+r_2}\xi^2\mathrm{d}x + \int_\Omega \zeta(-\Delta\xi + \varphi(\theta_a, f)\xi)\mathrm{d}x = \\ & -\int_\Omega (1+r_2)\frac{1+\beta(2-r_1)\theta_a}{1+\beta(2-r_1)\theta_a+r_2}\xi^2\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{23}$$

由(23)式知，

$$m'(f) = -\int_\Omega (1+r_2)\frac{1+\beta(2-r_1)\theta_a}{1+\beta(2-r_1)\theta_a+r_2}\xi^2\mathrm{d}x$$

因为$b_1 \neq 0$，所以存在一个正数$\delta_3 \leqslant \min\{\delta_1, \delta_2\}$使得当$0 < s < \delta_3$时$\omega(s) \neq 0$并且有

$$\lim_{s\to 0}\frac{\omega(s)}{s} = \int_\Omega (1+r_2)\frac{1+\beta(2-r_1)\theta_a}{1+\beta(2-r_1)\theta_a+r_2}\xi^2\mathrm{d}x b_1$$

此时可知存在一个正数 $\tilde{\delta} \leqslant \delta_3$ 使得当 $0 < s < \tilde{\delta}$ 时，$\omega(s)$ 与 b_1 符号相同. 定理得证.

基于上述讨论，模型(4) 正解的多重性结果如下：

定理 3　固定 $a > \lambda_1$，则如下列结论成立：如果 $b_1 < 0$，则存在一个常数 $\varepsilon = \varepsilon(b) < \lambda_1 - f$ 使得

1) 当 $f - \varepsilon < b < f$ 时，模型(4) 至少有两个正解；

2) 当 $b \geqslant f - \varepsilon$ 时，模型(4) 至少有一个正解.

其中 f 和 b_1 的定义可参见(12) 和(14) 式.

证　由定理 1 知，方程(4) 在 $((2 - r_1)^2\theta_a, 0, b)$ 附近有正解曲线 Γ_3. 由于 $b_1 < 0$，则当 $s > 0$ 适当小时 $b(s) < f$.

下面用反证法证明此定理. 假设在 f 附近且 $b < f$ 时方程(4) 有唯一解 $(\hat{U}, \hat{V})$，显然 $(\hat{U}, \hat{V}) = (\overline{U}(s), \overline{V}(s))$，并且由定理 2 知它是非退化的正解. 因而 $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_{(\overline{U}, \overline{V})}(\hat{U}, \hat{V})$：$\overline{W_{(\hat{U}, \hat{V})}} \longrightarrow \overline{W_{(\hat{U}, \hat{V})}}$ 是可逆的. 因为 $(\hat{U}, \hat{V}) \in \mathring{D}$，根据文献[19] 中定理 4.9.3 知 $\mathrm{index}_W(\boldsymbol{A}, (\hat{U}, \hat{V})) = \pm 1$. 注意到当 $0 < s \ll 1$，$a > \lambda_1$ 时，$b < f$. 因此由(10) 式可知

$$
\begin{aligned}
1 = {} & \deg_W(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}, \mathring{D}) = \\
& \mathrm{index}_W(\boldsymbol{A}, (0, 0)) + \mathrm{index}_W(\boldsymbol{A}, ((2 - r_1)^2\theta_a, 0)) + \\
& \mathrm{index}_W(\boldsymbol{A}, (0, (1 + r_2)^2\theta_b)) + \mathrm{index}_W(\boldsymbol{A}, (\hat{U}, \hat{V})) = \\
& 0 + 1 + 0 + \pm 1
\end{aligned}
$$

上面的等式不可能成立. 故假设错误，定理得证.

2　结　论

本文研究了文献[8] 中提出的一类具有分数型交错扩散项的捕食-食饵模型. 首先利用分支理论研究了模型在半平凡解曲线附近的分支解的存在条件和稳定性条件，其次利用以上结论并结合拓扑度理论得到了模型正解的多重性条件. 此结论推广并完善了文献[8] 中的相关结果.

参考文献：

[1] SHIGEDADA N，KAWASAKI K，TERAMOTO. Spatial Segregation of Interacting Species [J]. J Theore Biol，1979(79)：83－99.

[2] CHOI Y S，LUI R，YAMADA Y. Existence of Global Solution for the Shigesada-Kawasaki-Teramoto Model with Strongly Coupled Cross-Diffusion [J]. Discrete Contin Dyn Syst，2004(10)：719－730.

[3] KUTO K. Bifurcation Branch of Stationary Solutions for a Lotka-Volterra Cross-Diffusion System in a Spatially Heterogeneous Environment [J]. Nonlinear Anal Real World Appl，2009(2)：943－965.

[4] KUTO K，YAMADA Y. Positive Solutions for Lotka-Volterra Competition Systems with Large Cross-Diffusion [J]. Appl Anal，2010，89(7)：1037－1066.

[5] KUTO K，YAMADA Y. Multiple Coexistence States for a Prey-Predator System with Cross-Diffusion [J]. J Differential Equations，2004，197(2)：315－348.

[6] LOU Y，NI W M，YOTSUTANI S. On a Limiting System in the Lotka-Volterra Competition with Cross-Diffusion [J]. Discrete Contin Dyn Syst，2004，10：435－458.

[7] ODA K. Stationary Patterns for a Lotka-Volterra Cooperative Model with a Density-Dependent Diffusion term [J]. Funkcial Ekvac，2006，52(1)：93－112.

[8] ZHOU J，KIM C G. Positive Solutions for a Lotka-Volterra Prey-Predator Model with Cross-Diffusion of Fractional Type [J]. Results in Mathematics，2013，65(3)：293－320.

[9] DANCER E N. On Positive Solutions of Some Pairs of Differential Equations [J]. Trans Am Math Soc，1984，284(2)：729－743.

[10] 李海霞. 一类捕食-食饵模型共存解的多重性 [J]. 西北师范大学学报(自然科学版)，2015，51(4)：6－9.

[11] PENG R，WANG M X. On Multiplicity and Stability of a Diffusive Prey-Predator model [J]. J Math Anal Appl，2006，

316：256－268.

[12] ZHOU J，SHI J P. The Existence，Bifurcation and Stability of Positive Stationary Solution of a Diffusive Leslie-Gower Predator-Prey Model with Holling-Type II Functional Responses [J]. J Math Anal Appl，2013，405：618－630.

[13] ZHOU J，KIM C G，SHI J P. Positive Steady State Solutions of a Diffusive Leslie-Gower Predator-Prey Model with Holling Type II Functional Response and Cross-Diffusion [J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems，2014，34：3875－3899.

[14] ZHOU J. Positive Solutions for a Modified Leslie-Gower Prey-Predator model with Crowley-Martin Functional Response [J]. Nonlinear Differ Equ Appl，2014，21：621－661.

[15] CRANDALL M G，RABNOWTIZ P H. Bifurcation from Simple Eigenvalues [J]. J Funct Anal，1971，8(2)：321－340.

[16] CRANDALL M G，RABNOWTIZ P H. Bifurcation，Perturbation of Simple Eigenvalues，and Its Linearized Stability [J]. Arch Ration Mech Anal，1973，52(2)：161－180.

[17] SHI J P. Persistence and Bifurcation of Degenerate Solutions [J]. J Funct Anal，1999，169(2)：494－531.

[18] KATO T. Perturbation Theory for Linear Operators [M]. New York：Spring，1966.

[19] 王明新. 非线性椭圆型方程 [M]. 北京：科学出版社，2010.

The Multiplicity of Positive Solutions to a Predator-Prey Model with Cross-Diffusion of Fractional Type

LUO Li-rong，　ZHOU　Jun

School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：In this article，we consider a predator-prey model with cross-diffusion of fractional type，which is used to investigate the habitat segregation phenomenon between two species. By analyzing the eigenvalue problem of the linearized system and using the degree theory and the bifurcation theory，we study the properties of the positive solutions to the model and obtain the multiplicity of the positive solutions，which promote and improve the existing results.

Key words：cross-diffusion of fractional type；predator-prey model；positive solution；multiplicity

责任编辑　张　枸