第 39 卷第 4 期　　西 南 大 学 学 报 (自然科学版)　　2017 年 4 月
Vol. 39　No. 4　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Apr.　2017

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2017.04.001

具有特殊旗曲率性质的芬斯勒度量的若干定理[①]

程新跃，　李婷婷，　殷　丽，　刘树华

重庆理工大学 理学院，重庆 400054

摘要：首先研究了 $n(\geqslant 3)$ 维流形上具有弱迷向旗曲率 $\boldsymbol{K}=\dfrac{3\theta}{F}+\sigma$ 的芬斯勒度量 F，得到了 θ 和 σ 所满足的一个偏微分方程组，其中 $\theta=\theta_i(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}^i$ 是一个 1-形式，$\sigma=\sigma(\boldsymbol{x})$ 是流形上的一个标量函数. 其次，证明了具有常数平均 Berwald 曲率的芬斯勒度量的 H-曲率必然为零. 进一步地，讨论了具有标量旗曲率且具有常数平均 Berwald 曲率的芬斯勒度量，得到了旗曲率 $\boldsymbol{K}$ 所满足的一个恒等式，并在维数 n 大于 2 的条件下，证明了此时芬斯勒度量具有常数旗曲率.

关　键　词：芬斯勒度量；旗曲率；平均 Berwald 曲率；H-曲率

中图分类号：O186.13　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9868(2017)04-0001-07

芬斯勒几何中的旗曲率是黎曼几何中截面曲率的自然推广，它是由文献[1－2]首次引进的. 旗曲率直接反映了芬斯勒空间的弯曲程度. 研究并刻画具有特殊旗曲率性质的芬斯勒度量是芬斯勒几何中最重要的课题之一. 2003 年，沈忠民教授在文献[3]中分类刻画了射影平坦且具有常数旗曲率的 Randers 度量(在芬斯勒几何中，这是第一个没有“流形是闭的”这一条件限制的分类定理). 同年，沈忠民教授在文献[4]中给出了一般芬斯勒度量为射影平坦且具有常数旗曲率的充分条件，利用此方法，我们可以构造出很多射影平坦且具有常数旗曲率的芬斯勒度量. 2005 年，莫小欢教授和沈忠民教授在文献[5]中证明了：在 $n(\geqslant 3)$ 维紧致流形上具有负标量旗曲率的芬斯勒度量一定是 Randers 度量. 进一步，2009 年，本文第一作者与沈忠民教授在文献[6]中分类了 $n(\geqslant 3)$ 维流形上具有弱迷向旗曲率的 Randers 度量.

芬斯勒几何学家们在芬斯勒空间中引进了若干重要的非黎曼几何量(如 Cartan 张量 $\boldsymbol{C}$、Berwald 曲率 $\boldsymbol{B}$、H-曲率 $\boldsymbol{H}$、S-曲率 $\boldsymbol{S}$ 等). 非黎曼几何量在黎曼空间中均为零. 如果说黎曼几何量(如旗曲率、Ricci 曲率等)刻画了空间的弯曲和形状，那么，非黎曼几何量则描述了芬斯勒空间的色彩的变化程度. 2003 年，文献[7]证明了：具有标量旗曲率且具有迷向 S-曲率的芬斯勒度量一定具有弱迷向旗曲率. 文献[8]讨论了具有弱迷向旗曲率的 Randers 度量，证明了对 Randers 度量而言，具有弱迷向旗曲率的 Randers 度量一定具有迷向 S-曲率. 此外，文献[7]还对于具有标量旗曲率且具有相对迷向平均 Landsberg 曲率的芬斯勒度量，给出了旗曲率 $\boldsymbol{K}$ 和平均 Cartan 张量 $\boldsymbol{I}$ 满足的一个微分方程组. 这些成果充分表明：在芬斯勒空间中，旗曲率与非黎曼几何量有着紧密的联系. 2010 年，文献[9]研究了非 Randers 型的 (α,β)-度量 F，并证明了：F 具有标量旗曲率且具有常数 S-曲率等价于 F 是旗曲率为零的 Berwald 度量，在此情形下，F 是局部 Minkowski

① 收稿日期：2016-12-14
基金项目：国家自然科学基金项目(11371386)；欧盟 FP7(SEVENTH FRAMEWORK PROGRAMME)资助项目(PIRSES-GA-2012-317721).
作者简介：程新跃(1958-)，男，重庆人，教授，主要从事微分几何及其应用的研究.

度量. 因此，刻画具有特殊非黎曼曲率性质的芬斯勒度量也是芬斯勒几何中的重要课题.

1988年，文献[10]首次提出了非黎曼几何量H-曲率，并证明了：对于具有标量旗曲率的芬斯勒度量 F，旗曲率仅为流形上的标量函数等价于 F 的H-曲率为零.

在本文中，我们首先讨论了具有弱迷向旗曲率的芬斯勒度量 F，利用相关的Bianchi恒等式，结合 F 的旗曲率表达式，得到了 θ 和 σ 满足的一个偏微分方程组，其中 $\theta=\theta_i(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}^i$ 是一个1-形式，$\sigma=\sigma(\boldsymbol{x})$ 是流形上的一个标量函数(见本文定理1). 其次，根据H-曲率的定义，我们证明了具有常数平均Berwald曲率的芬斯勒度量的H-曲率必然为零，并进一步地讨论了具有标量旗曲率且具有常数平均Berwald曲率的芬斯勒度量，得到了关于旗曲率 $\boldsymbol{K}$ 的两个结论(见本文定理2与定理3).

1 预备知识

定义1[11] 设 M 是一个 n 维光滑流形，$F: TM\longrightarrow[0,+\infty)$ 是定义在其切丛上的非负函数. 如果 F 满足如下条件：

(f_1) 光滑性：在带孔切丛 $TM\backslash\{0\}$ 上，$F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 是 C^∞ 函数；

(f_2) 正齐次性：$F=F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 满足

$$F(\boldsymbol{x},\lambda\boldsymbol{y})=\lambda F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \qquad \forall\lambda>0$$

(f_3) 正则性：对于任意 $\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{0}$，

$$\boldsymbol{g}_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\frac{1}{2}\frac{\partial^2F^2}{\partial\boldsymbol{y}^i\partial\boldsymbol{y}^j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\frac{1}{2}[F^2]_{\boldsymbol{y}^i\boldsymbol{y}^j}$$

构成一个正定矩阵.

则称 F 为 M 上的一个芬斯勒度量.

F 的基本张量定义为

$$\boldsymbol{g}=\boldsymbol{g}_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{x}^i\otimes\mathrm{d}\boldsymbol{x}^j$$

正如在黎曼几何中一样，测地线是芬斯勒几何中的一个重要的基本概念，它可以由下述2阶微分方程组来刻画：

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}^i}{\mathrm{d}t^2}+2G^i\left(\boldsymbol{x},\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}^i}{\mathrm{d}t}\right)=0$$

其中

$$G^i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\frac{1}{4}g^{il}\{[F^2]_{\boldsymbol{x}^k\boldsymbol{y}^l}\boldsymbol{y}^k-[F^2]_{\boldsymbol{x}^l}\}$$

$G^i=G^i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 称为 F 的测地系数[11].

由芬斯勒度量的测地系数，我们可确定度量的黎曼曲率，其定义如下：

$$\boldsymbol{R}_y=\boldsymbol{R}^i_k\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{x}^i}\otimes\mathrm{d}\boldsymbol{x}^k$$

其中

$$\boldsymbol{R}^i_k=2\frac{\partial G^i}{\partial\boldsymbol{x}^k}-\frac{\partial^2G^i}{\partial\boldsymbol{x}^m\partial\boldsymbol{y}^k}\boldsymbol{y}^m+2G^m\frac{\partial^2G^i}{\partial\boldsymbol{y}^m\partial\boldsymbol{y}^k}-\frac{\partial G^i}{\partial\boldsymbol{y}^m}\frac{\partial G^m}{\partial\boldsymbol{y}^k}$$

令 $\boldsymbol{R}^{\ i}_{j\ kl}$ 表示芬斯勒度量关于Berwald联络的黎曼曲率张量，$\boldsymbol{R}^{\ i}_{\ kl}=\boldsymbol{y}^j\boldsymbol{R}^{\ i}_{j\ kl}$，则：

$$\boldsymbol{R}^{\ i}_{j\ kl}=\frac{1}{3}\left\{\frac{\partial^2\boldsymbol{R}^i_k}{\partial\boldsymbol{y}^j\partial\boldsymbol{y}^l}-\frac{\partial^2\boldsymbol{R}^i_l}{\partial\boldsymbol{y}^j\partial\boldsymbol{y}^k}\right\} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{R}^{\ i}_{\ k\,l}=\frac{1}{3}\left\{\frac{\partial\boldsymbol{R}^i_k}{\partial\boldsymbol{y}^l}-\frac{\partial\boldsymbol{R}^i_l}{\partial\boldsymbol{y}^k}\right\} \tag{2}$$

芬斯勒度量中的角度量张量定义为：

$$\boldsymbol{h}_y = \boldsymbol{h}_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{x}^i \otimes \mathrm{d}\boldsymbol{x}^j$$

$$\boldsymbol{h}_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{g}_{ij} - l_i l_j$$

其中

$$l_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = F_{y^i}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

定义 2　对一个包含切向量 $\boldsymbol{y}$ 的二维切子空间 $P = \mathrm{span}\{\boldsymbol{y}, \boldsymbol{u}\} \subset T_x M$，旗曲率 $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}(P, \boldsymbol{y})$ 定义为

$$\boldsymbol{K}(P, \boldsymbol{y}) = \frac{\boldsymbol{R}_{jk}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\boldsymbol{u}^j\boldsymbol{u}^k}{F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^2 \boldsymbol{h}_{jk}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\boldsymbol{u}^j\boldsymbol{u}^k}$$

即旗曲率 $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}(P, \boldsymbol{y})$ 可以看作是“旗面”$P = \mathrm{span}\{\boldsymbol{y}, \boldsymbol{u}\} \subset T_x M$ 和“旗杆”$\boldsymbol{y} \in P\backslash\{0\}$ 的函数.

特别地，若旗曲率 $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}(P, \boldsymbol{y})$ 是切丛 $TM_0 = TM\backslash\{0\}$ 上的标量函数，即 $\boldsymbol{K}(P, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{K}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$，则称 F 具有标量旗曲率；若 $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}(P, \boldsymbol{y})$ 满足

$$\boldsymbol{K} = \frac{3\theta}{F} + \sigma \tag{3}$$

其中 $\theta = \theta_i(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}^i$ 是一个 1-形式，$\sigma = \sigma(\boldsymbol{x})$ 是流形上的一个标量函数，则称 F 具有弱迷向旗曲率；若 $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}(P, \boldsymbol{y})$ 是流形 M 上的标量函数，即 $\boldsymbol{K}(P, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{K}(\boldsymbol{x})$，则称 F 具有迷向旗曲率. 根据 Schur 引理[12]，当 $n \geqslant 3$ 时，若 F 具有迷向旗曲率，即 $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}(\boldsymbol{x})$，则 $\boldsymbol{K}$ 为常数，此时称 F 具有常数旗曲率.

我们知道，对于黎曼度量，其测地系数 $G^i = \frac{1}{2}\Gamma^i_{jk}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}^j\boldsymbol{y}^k$ 是切向量 $\boldsymbol{y} \in T_x M$ 的二次齐次式，其中 Γ^i_{jk} 是 Christoffel 记号. 然而，对于一般的芬斯勒度量，$G^i = G^i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 并不一定是切向量 $\boldsymbol{y} \in T_x M$ 的二次齐次式. 因此，为了刻画芬斯勒度量中 G^i 的齐次性，我们给出如下的几何量：

$$\boldsymbol{B}_y = \boldsymbol{B}^i_{j\,kl}\mathrm{d}\boldsymbol{x}^j \otimes \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^i} \otimes \mathrm{d}\boldsymbol{x}^k \otimes \mathrm{d}\boldsymbol{x}^l$$

其中

$$\boldsymbol{B}^i_{j\,kl}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{\partial^3 G^i}{\partial \boldsymbol{y}^j \partial \boldsymbol{y}^k \partial \boldsymbol{y}^l}$$

$\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{B}_y \mid \boldsymbol{y} \in T_x M\backslash\{0\}\}$ 称为 Berwald 曲率. 当 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$ 时，芬斯勒度量 F 称为 Berwald 度量. 易见：芬斯勒度量 F 是 Berwald 度量的充分必要条件为测地系数 G^i 是关于 $\boldsymbol{y}$ 的二次型.

通过 Berwald 曲率，我们可以定义如下的 Landsberg 曲率：

$$\boldsymbol{L}_y = \boldsymbol{L}_{ijk}\mathrm{d}\boldsymbol{x}^i \otimes \mathrm{d}\boldsymbol{x}^j \otimes \mathrm{d}\boldsymbol{x}^k$$

其中

$$\boldsymbol{L}_{ijk} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{y}^m \boldsymbol{g}_{ml}\boldsymbol{B}^l_{i\,jk} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{y}^m \boldsymbol{g}_{ml}\ \frac{\partial^3 G^l}{\partial \boldsymbol{y}^i \partial \boldsymbol{y}^j \partial \boldsymbol{y}^k}$$

进一步，我们还可以定义平均 Berwald 曲率：

$$\boldsymbol{E}_y = \boldsymbol{E}_{ij}\mathrm{d}\boldsymbol{x}^i \otimes \mathrm{d}\boldsymbol{x}^j$$

其中

$$\boldsymbol{E}_{ij} = \frac{1}{2}\ \frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{y}^i \partial \boldsymbol{y}^j}\left(\frac{\partial G^m}{\partial \boldsymbol{y}^m}\right) = \frac{1}{2}\boldsymbol{B}^m_{m\,ij} \tag{4}$$

定义 3　设 F 是 n 维的芬斯勒度量，若 F 满足

$$\boldsymbol{E}_{ij} = \frac{n+1}{2}cF^{-1}\boldsymbol{h}_{ij}$$

则称 F 是具有迷向平均 Berwald 曲率的芬斯勒度量，其中 $c = c(\boldsymbol{x})$ 是流形上的一个标量函数. 当 c 为常数时，我们称 F 是具有常数平均 Berwald 曲率的芬斯勒度量.

通过平均 Berwald 曲率，我们又可以给出非黎曼几何量 H-曲率的定义[10]：

$$\boldsymbol{H}_y = H_{ij}\mathrm{d}\boldsymbol{x}^i \otimes \mathrm{d}\boldsymbol{x}^j$$

其中

$$H_{ij} = \boldsymbol{E}_{ij|m}\boldsymbol{y}^m \tag{5}$$

“|”表示芬斯勒度量在 Berwald 联络下的水平协变导数. H-曲率刻画了度量的平均 Berwald 曲率 $\boldsymbol{E}$ 沿测地线的变化率，它是带孔切丛 $TM\backslash\{0\}$ 上关于 $\boldsymbol{y}$ 的零阶正齐次标量函数.

2 主要结论及证明

在本节中，我们利用 Berwald 联络讨论相关问题.

首先，在 Berwald 联络下，关于黎曼曲率张量 $\boldsymbol{R}^i_{j\,kl}$ 和 Berwald 曲率 $\boldsymbol{B}^i_{j\,kl}$ 有如下重要的 Bianchi 等式[13]：

$$\boldsymbol{R}^i_{j\,kl|m} + \boldsymbol{R}^i_{j\,lm|k} + \boldsymbol{R}^i_{j\,mk|l} = -\boldsymbol{B}^i_{j\,kr}\boldsymbol{R}^r_{lm} - \boldsymbol{B}^i_{j\,lr}\boldsymbol{R}^r_{mk} - \boldsymbol{B}^i_{j\,mr}\boldsymbol{R}^r_{kl} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{R}^i_{j\,kl\cdot m} = \boldsymbol{B}^i_{j\,ml|k} - \boldsymbol{B}^i_{j\,km|l} \tag{7}$$

$$\boldsymbol{B}^i_{j\,kl\cdot m} = \boldsymbol{B}^i_{j\,km\cdot l} \tag{8}$$

对(6)式用 $\boldsymbol{y}^i$ 和 $\boldsymbol{y}^l$ 缩并，我们可以得到一个新的 Bianchi 等式如下：

$$\boldsymbol{R}^i_{k|m} - \boldsymbol{R}^i_{m|k} + \boldsymbol{R}^i_{mk|l}\boldsymbol{y}^l = \boldsymbol{0} \tag{9}$$

在(6)式中，关于 i,j 求迹，并利用(4)式，我们又可以得到一个新的 Bianchi 等式：

$$\boldsymbol{R}^j_{j\,kl|m} + \boldsymbol{R}^j_{j\,lm|k} + \boldsymbol{R}^j_{j\,mk|l} = -2\boldsymbol{E}_{kr}\boldsymbol{R}^r_{lm} - 2\boldsymbol{E}_{lr}\boldsymbol{R}^r_{mk} - 2\boldsymbol{E}_{mr}\boldsymbol{R}^r_{kl} \tag{10}$$

现在，设 F 是具有标量旗曲率的芬斯勒度量，即 $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$，在局部坐标下，

$$\boldsymbol{R}^i_k = \boldsymbol{K}F^2 h^i_k = \boldsymbol{K}\{F^2\delta^i_k - \boldsymbol{g}_{kq}\boldsymbol{y}^q\boldsymbol{y}^i\} \tag{11}$$

其中

$$h^i_k = \delta^i_k - F^{-1}F_{\cdot k}\boldsymbol{y}^i$$

将(11)式两边求水平协变导数，可得

$$\boldsymbol{R}^i_{k|l} = \boldsymbol{K}_{|l}F^2 h^i_k \tag{12}$$

再将(11)式分别代入(2)式和(1)式，我们又可以得到：

$$\boldsymbol{R}^i_{kl} = \frac{1}{3}\boldsymbol{K}_{\cdot l}F^2 h^i_k - \frac{1}{3}\boldsymbol{K}_{\cdot k}F^2 h^i_l + \boldsymbol{K}F\{F_{\cdot l}\delta^i_k - F_{\cdot k}\delta^i_l\} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}^i_{j\,kl} = {} & \boldsymbol{K}(\boldsymbol{g}_{jl}\delta^i_k - \boldsymbol{g}_{jk}\delta^i_l) + \boldsymbol{K}_{\cdot j}F(F_{\cdot l}\delta^i_k - F_{\cdot k}\delta^i_l) + \\ & \frac{F^2}{3}(\boldsymbol{K}_{\cdot j\cdot l}h^i_k - \boldsymbol{K}_{\cdot j\cdot k}h^i_l) + \frac{\boldsymbol{K}_{\cdot l}}{3}(2FF_{\cdot j}\delta^i_k - FF_{\cdot k}\delta^i_j - \boldsymbol{g}_{jk}\boldsymbol{y}^j) - \\ & \frac{\boldsymbol{K}_{\cdot k}}{3}(2FF_{\cdot j}\delta^i_l - FF_{\cdot l}\delta^i_j - \boldsymbol{g}_{jl}\boldsymbol{y}^i)\end{aligned} \tag{14}$$

由(14)式计算可得

$$\boldsymbol{R}^m_{m\,ij} = \frac{n+1}{3}F(\boldsymbol{K}_{\cdot i}F_{\cdot j} - \boldsymbol{K}_{\cdot j}F_{\cdot i}) \tag{15}$$

将(13)式两边求水平协变导数，并用 $\boldsymbol{y}^m$ 缩并，得

$$\boldsymbol{R}^i_{kl|m}\boldsymbol{y}^m = \frac{1}{3}\boldsymbol{K}_{\cdot l|m}\boldsymbol{y}^m F^2 h^i_k - \frac{1}{3}\boldsymbol{K}_{\cdot k|m}\boldsymbol{y}^m F^2 h^i_l + \boldsymbol{K}_{|m}\boldsymbol{y}^m\{FF_{\cdot l}\delta^i_k - FF_{\cdot k}\delta^i_l\} \tag{16}$$

将(12)式和(16)式代入 Bianchi 等式(9)，可得

$$\boldsymbol{K}_{|l}h^i_k - \boldsymbol{K}_{|k}h^i_l - \frac{1}{3}\boldsymbol{K}_{\cdot l|m}\boldsymbol{y}^m h^i_k + \frac{1}{3}\boldsymbol{K}_{\cdot k|m}\boldsymbol{y}^m h^i_l - \boldsymbol{K}_{|m}\boldsymbol{y}^m\{F^{-1}F_{\cdot l}\delta^i_k - F^{-1}F_{\cdot k}\delta^i_l\} = \boldsymbol{0} \tag{17}$$

进一步，我们考虑具有弱迷向旗曲率的芬斯勒度量，此时

$$\boldsymbol{K} = \frac{3\theta}{F} + \sigma$$

其中，$\theta=\theta_i(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}^i$ 是一个 1-形式，$\sigma=\sigma(\boldsymbol{x})$ 是流形上的一个标量函数. 利用上述获得的一系列 Bianchi 等式，我们可以得到下面定理：

定理 1　设(M, F)是 $n(\geqslant 3)$ 维芬斯勒流形. 若 F 具有弱迷向旗曲率，即

$$\boldsymbol{K}=\frac{3\theta}{F}+\sigma$$

则

$$3F\theta_{|l}+F^2\sigma_{|l}-2F_{\cdot l}\theta_{|m}\boldsymbol{y}^m-FF_{\cdot l}\sigma_{|m}\boldsymbol{y}^m-F\theta_{\cdot l|m}\boldsymbol{y}^m=0 \tag{18}$$

其中 $\theta=\theta_i(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}^i$ 是一个 1-形式，$\sigma=\sigma(\boldsymbol{x})$ 是流形上的一个标量函数.

证

设 F 是具有弱迷向旗曲率的芬斯勒度量. 由 $\boldsymbol{K}=\dfrac{3\theta}{F}+\sigma$ 得：

$$\boldsymbol{K}_{|l}=\frac{3\theta_{|l}}{F}+\sigma_{|l}$$

$$\boldsymbol{K}_{\cdot l|m}=\frac{3\theta_{\cdot l|m}F-\theta_{|m}F_{\cdot l}}{F^2}$$

其中：

$$\sigma_{|l}=\sigma_{x^i}\qquad\qquad \theta_{|l}=\theta_{x^l}-\theta_{y^m}N_l^m$$

结合(17)式，得

$$\left(\frac{3\theta_{|l}}{F}+\sigma_{|l}\right)h_k^i-\left(\frac{3\theta_{|k}}{F}+\sigma_{|k}\right)h_l^i-\frac{(\theta_{\cdot l|m}F-\theta_{|m}F_{\cdot l})\boldsymbol{y}^m h_k^i+(\theta_{\cdot k|m}F-\theta_{|m}F_{\cdot k})\boldsymbol{y}^m h_l^i}{F^2}-$$
$$\left(\frac{3\theta_{|m}}{F}+\sigma_{|m}\right)\boldsymbol{y}^m\{F^{-1}F_{\cdot l}\delta_k^i-F^{-1}F_{\cdot k}\delta_l^i\}=0$$

关于 i, k 求迹，可直接得到

$$(n-2)(3F\theta_{|l}-2F_{\cdot l}\theta_{|m}\boldsymbol{y}^m-F\theta_{\cdot l|m}\boldsymbol{y}^m+F^2\sigma_{|l}-FF_{\cdot l}\sigma_{|m}\boldsymbol{y}^m)=0$$

这里，我们已用到

$$\theta_{\cdot l|m}=\theta_{|m\cdot l},\ \theta_{|s}h_l^s=\theta_{|s}(\delta_l^s-l^s l_l)=\theta_{|l}-F^{-1}F_{\cdot l}\theta_{|m}\boldsymbol{y}^m$$

易知，当 $n\geqslant 3$ 时，(18) 式成立.

接下来，我们考虑具有标量旗曲率的芬斯勒度量. 在此条件之下，如果芬斯勒度量还具有常数平均 Berwald 曲率，那么，我们可以得到如下定理：

定理 2　设(M, F)是 n 维芬斯勒流形，若 F 具有常数平均 Berwald 曲率，即

$$\boldsymbol{E}_{ij}=\frac{n+1}{2}cF^{-1}\boldsymbol{h}_{ij}$$

其中 c 是常数，则 $H=0$. 进一步地，若 F 具有标量旗曲率 $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$，则旗曲率 $\boldsymbol{K}$ 满足

$$\boldsymbol{K}_{\cdot i}F_{\cdot j}+\boldsymbol{K}_{\cdot j}F_{\cdot i}+\boldsymbol{K}_{\cdot i\cdot j}F=\boldsymbol{0} \tag{19}$$

证

设 F 是具有标量旗曲率和常数平均 Berwald 曲率的芬斯勒度量. 首先证明 $H=0$. 利用 Berwald 联络，我们知道：

$$g_{ij|k}=-2L_{ijk}\qquad\qquad l_{i|j}=0$$

由

$$\boldsymbol{E}_{ij}=\frac{n+1}{2}cF^{-1}\boldsymbol{h}_{ij}$$

其中 c 是一个常数，可得

$$\boldsymbol{E}_{ij|k}=\frac{n+1}{2}c(F^{-1}h_{ij})_{|k}=$$

$$\frac{n+1}{2}cF^{-1}(g_{ij|k}-l_{i|k}l_j-l_il_{j|k})=$$

$$-(n+1)cF^{-1}L_{ijk}$$

由

$$H_{ij}=\boldsymbol{E}_{ij|k}\boldsymbol{y}^k$$

得

$$H_{ij}=-(n+1)cF^{-1}L_{ijk}\boldsymbol{y}^k=0$$

现在，对 Bianchi 等式(7) 两边用 $\boldsymbol{y}^k$ 缩并，得

$$\boldsymbol{R}^i_{j\,kl\cdot m}\boldsymbol{y}^k=\boldsymbol{B}^i_{j\,ml|k}\boldsymbol{y}^k$$

再由(14) 式可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}^i_{j\,ml|k}\boldsymbol{y}^k=&2\boldsymbol{K}C_{jlm}\boldsymbol{y}^i-\\&\frac{\boldsymbol{K}_{\cdot j}}{3}\{FF_{\cdot l}\delta^i_m+FF_{\cdot m}\delta^i_l-2g_{lm}\boldsymbol{y}^i\}-\\&\frac{\boldsymbol{K}_{\cdot l}}{3}\{FF_{\cdot j}\delta^i_m+FF_{\cdot m}\delta^i_j-2g_{jm}\boldsymbol{y}^i\}-\\&\frac{\boldsymbol{K}_{\cdot m}}{3}\{FF_{\cdot j}\delta^i_l+FF_{\cdot l}\delta^i_j-2g_{jl}\boldsymbol{y}^i\}-\\&\frac{\boldsymbol{K}_{\cdot j\cdot m}}{3}F^2h^i_l-\frac{\boldsymbol{K}_{\cdot j\cdot l}}{3}F^2h^i_m-\frac{\boldsymbol{K}_{\cdot l\cdot m}}{3}F^2h^i_j\end{aligned}$$

结合：

$$\boldsymbol{B}^m_{i\,jm}=2\boldsymbol{E}_{ij}\qquad H_{ij}=\boldsymbol{E}_{ij|k}\boldsymbol{y}^k$$

可得

$$H_{ij}=-\frac{(n+1)}{6}F\{\boldsymbol{K}_{\cdot i}F_{\cdot j}+\boldsymbol{K}_{\cdot j}F_{\cdot i}+\boldsymbol{K}_{\cdot i\cdot j}F\}\tag{20}$$

由 $H=0$ 及(20) 式可知(19) 式成立.

事实上，(19) 式等价于$(\boldsymbol{K}F)_{\cdot j\cdot l}=\boldsymbol{K}F_{\cdot j\cdot l}$. 根据 Hopf 极大值原理，我们可以证明，此时 $\boldsymbol{K}$ 只能是仅依赖于 $\boldsymbol{x}$ 的函数，即 $\boldsymbol{K}=\sigma(\boldsymbol{x})$. 根据 Schur 定理，当 $n\geqslant 3$ 时，$\boldsymbol{K}$ 是常数，即 F 此时具有常数旗曲率. 所以，我们实际上证明了下面定理：

定理 3 设(M,F)是 $n(\geqslant 3)$ 维芬斯勒流形. 若 F 是具有标量旗曲率和常数平均 Berwald 曲率的芬斯勒度量，则 F 具有常数旗曲率.

参考文献：

[1] BERWALD L. Untersuchung der Krummung Allgemeiner Metrischer Raume auf Grund des in Ihnen Hersc-Henden Parallelismus [J]. Math Z，1926，25：40－73.

[2] BERWALD L. Parallelubertragung in Allgemeinen Raumen，Atti Congr [J]. Intern Mat Bologna，1928(4)：263－270.

[3] SHEN Z M. Projectively Flat Randers Metrics of Constant Flag Curvature [J]. Math Ann，2003，325：19－30.

[4] SHEN Z M. Projectively Flat Finsler Metrics of Constant Flag Curvature [J]. Trans Amer Math Soc，2003，355(4)：1713－1728.

[5] MO X H，SHEN Z M. On Negatively Curved Finsler Manifolds of Scalar Curvature [J]. Canad Math Bull，2005，48(1)：112－120.

[6] CHENG X Y，SHEN Z M. Randers Metrics of Scalar Flag Curvature [J]. Aust Math Soc，2009，87：359－370.

[7] CHENG X Y，MO X H，SHEN Z M. On the Flag Curvature of Finsler Metrics of Scalar Curvature [J]. Journal of the London Mathematical Society，2003，68(3)：762－780.
[8] SHEN Z M，YILDIRIM C G. A Characterization of Randers Metrics of Scalar Flag Curvature [J]. Recent Developments in Geometry and Analysis，2013，23：345－358.
[9] CHENG X Y. On (α，β)-Metrics of Scalar Flag Curvature with Constant S-Curvature [J]. Acta Math Sin，2010，26(9)：1701－1708.
[10] AKBAR-ZADEH H. Sur Les Espaces de Finsler A Courbures Sectionnelles [J]. Acad Roy Belg Bull Cl Sci，1988，74(5)：271－322.
[11] CHERN S S，SHEN Z M. Rieman-Finsler Geometry [M]. Singapore：World Scientific，2005.
[12] BERWALD L. Ueber Finslersche und Cartansche Geometrie IV：Projektivkrummung Allgemeiner Affiner Raume und Finslersche Raume Scalarer Krummung [J]. Ann Math，1947，48：755－781.
[13] SHEN Z M. Differential Geometry of Spray and Finsler Spaces [M]. Boston：Kluwer Academic Publishers，2001.

Some Theorems of Finsler Metrics with Special Flag Curvature Properties

CHENG Xin-yue，LI Ting-ting，YIN Li，LIU Shu-hua
School of Science，Chongqing University of Technology，Chongqing 400054，China

Abstract：In this paper，we first study the Finsler metric F of weakly isotropic flag curvature with $\boldsymbol{K}=\frac{3\theta}{F}+\sigma$ on a manifold M of dimension $n(\geqslant 3)$，where $\theta=\theta_i(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}^i$ is a 1-form and $\sigma=\sigma(\boldsymbol{x})$ is a scalar function on manifold M. We obtain a system of partial differential equations that θ and σ satisfy. Next，we prove that the H-curvature vanishes when F is of constant mean Berwald curvature. Finally，we discuss Finsler metrics of scalar flag curvature and of constant mean Berwald curvature. In this case，we find an identity that the flag curvature $\boldsymbol{K}$ satisfies and prove that $\boldsymbol{K}$ is actually a constant when n is greater than 2.

Key words：Finsler metric；flag curvature；mean Berwald curvature；H-curvature

责任编辑　廖　坤