第 39 卷第 4 期　　西南大学学报(自然科学版)　　2017 年 4 月
Vol. 39　No. 4　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Apr.　2017

DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2017.04.008

非循环子群的共轭类个数为 7 的有限 p -群[①]

杨东芳，　赵　冲，　吕　恒

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：设 G 为有限 p -群，给出了非循环子群共轭类个数为 7 的有限 p -群 G 的完全分类.

关　键　词：有限 p -群；幂零群；非循环子群；共轭类

中图分类号：O152.1　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673－9868(2017)04－0052－04

在群论中，常常借助子群的性质去研究大群的结构和性质，其中有一类问题就是根据群的非循环子群的共轭类个数去研究大群.

设 G 是有限群，$\delta(G)$ 表示有限群 G 的非循环子群的共轭类个数. 显然，当 $\delta(G)=0$ 时，G 为循环群. 文献[1－7]研究了满足 $\delta(G)\leqslant 7$ 的有限群. 文献[5－7]给出了满足 $5\leqslant\delta(G)\leqslant 7$ 的有限幂零群的分类，遗憾的是，这 3 篇论文都有一个错误，即证明方法是通过分类极大子群的个数，再考虑极大子群的非循环子群的共轭类个数来证明的，然而极大子群中的非循环子群在群 G 中可能共轭，这个错误似乎只能从证明方法上做修正. 本文只对文献[7]的证明做出修改，给出非循环子群共轭类个数为 7 的有限 p -群的完全分类，并且给出了不同的证明方法. 为便于本文证明，下面给出相关的引理：

引理 1[8]　设 G 是 p^n 阶初等交换 p -群，$0\leqslant m<n$，则 G 中 p^m 阶子群个数为

$$d=\begin{cases}\dfrac{(p^n-1)(p^{n-1}-1)\cdots(p^{n-m+1}-1)}{(p^m-1)(p^{m-1}-1)\cdots(p-1)} & m>0\\ 1 & m=0\end{cases}\tag{1}$$

引理 2[8]　有限 2 -群 G 是极大类 2 -群当且仅当 $|G:G'|=4$.

引理 3[8]　设 G 是有限 p -群，若 $d(G)=2$ 且 $|G'|=p$，则 G 是内交换群，其中 $d(G)$ 表示生成元个数.

引理 4[8](N/C 定理)　设 $H\leqslant G$，则 $N_G(H)/C_G(H)$ 同构于 $\mathrm{Aut}(H)$ 的一个子群.

引理 5[9]　设 G 是有限 p -群，G 存在指数是 p 的交换子群，则

$$|G|=p\,|Z(G)|\,|G'|$$

引理 6[9]　设 G 是有限 p -群，N 是 G 的正规子群，若 N 中不存在 G 的正规子群 $N_1\cong C_p\times C_p$. 则 N 是循环群，或者 $p=2$，N 同构于下列 3 种群之一：

(1°) 二面体群：$\langle a,b\mid a^{2^{n-1}}=b^2=1,\ a^b=a^{-1}\rangle$，$n\geqslant 3$；

① 收稿日期：2016－05－21
基金项目：国家自然科学基金项目(11471266，11271301)；中央高校基本业务费专项资金项目(XDJK2015B033).
作者简介：杨东芳(1991－)，女，四川省平昌人，硕士研究生，主要从事群论的研究.
通信作者：吕　恒，教授.

(2°) 广义四元数群：$\langle a, b \mid a^{2^{n-1}}=1, b^2=a^{2^{n-2}}, a^b=a^{-1}\rangle, n\geqslant 3$；

(3°) 半二面体群：$\langle a, b \mid a^{2^{n-1}}=b^2=1, a^b=a^{-1+2^{n-2}}\rangle, n\geqslant 4$.

定理 1 设 G 是 p-群，且 $\delta(G)=7$，则 G 同构于下列群之一：

(1°) $G\cong C_{p^7}\times C_p$；

(2°) $G\cong\langle a, b \mid a^{p^7}=1, b^p=1, a^b=a^{1+p^6}\rangle, p\neq 2$；

(3°) $G\cong\langle a, b \mid a^{2^4}=1, b^2=1, a^b=a^{-1}\rangle=D_{2^5}$；

(4°) $G\cong\langle a, b \mid a^{2^5}=1, b^2=a^{2^4}, a^b=a^{-1}\rangle=Q_{2^6}$；

(5°) $G\cong\langle a, b \mid a^{2^7}=1, b^2=1, a^b=a^{1+2^6}\rangle$；

(6°) $G\cong\langle a, b, c \mid a^5=b^5=c^5=1, [a, b]=c, [a, c]=1, [b, c]=1\rangle$；

(7°) $G\cong\langle a, b \mid a^3=b^9=1, [b, a]=c, c^3=1, [c, a]=b^3, [b^3, a]=[b, c]=1\rangle$.

证 因为 p-群的每个极大子群都正规，所以 G 的每个极大子群自成一个共轭类.

(Ⅰ) 若 G 存在循环极大子群，且 G 不为循环群，由文献[6]知 G 只能同构于下列群之一：

(a) $G\cong C_{p^7}\times C_p$；

(b) $G\cong\langle a, b \mid a^{p^7}=1, b^p=1, a^b=a^{1+p^6}\rangle, p\geqslant 3$；

(c) $G\cong\langle a, b \mid a^{2^5}=1, b^2=1, a^b=a^{-1}\rangle=D_{2^5}$；

(d) $G\cong\langle a, b \mid a^{2^5}=1, b^2=a^{2^4}, a^b=a^{-1}\rangle=Q_{2^6}$；

(e) $G\cong\langle a, b \mid a^{2^7}=1, b^2=1, a^b=a^{1+2^6}\rangle$.

(Ⅱ) 若 p-群 G 的极大子群均为非循环群，我们断言 G 是二元生成的 p-群，否则 $|G/\Phi(G)|=p^n\geqslant p^3$. 因为 $G/\Phi(G)$ 是 p^n 阶初等交换 p-群，由引理 1 可得 $G/\Phi(G)$ 的极大子群个数大于或者等于 7，矛盾. 设 $M_1, M_2, \cdots, M_s$ 是 G 的所有极大非循环正规子群，则 p-群 G 的极大子群的个数大于或者等于 $p+1$，当 p-群 G 是极大类群时，G 的极大子群个数为 $p+1$. 又考虑到 $\delta(G)=7$，则只能是 $p=2,3,5$. 由引理 6，G 中存在正规子群 $N\cong C_p\times C_p$.

情况 1 若 $p=5$，G 的极大子群个数为 6，易得 N 是群 G 的极大子群，此时 $|G|=5^3$. 又因 G 没有极大子群是循环群，因此 G 的方次数是 5，即对任意 $g\in G$ 都满足 $g^5=1$. 显然 G 不是交换群. 故

$$G\cong\langle a, b, c \mid a^5=b^5=c^5=1, [a, b]=c, [a, c]=1, [b, c]=1\rangle$$

情况 2 若 $p=3$，容易得到 $|G|\geqslant 3^3$. 令特征子群

$$\Omega_1(G)=\langle g\in G \mid g^3=1\rangle$$

若 $\Omega_1(G)=N$，考虑商群 G/N. 当 G/N 循环时，即存在 $x\in G$，使得 $G/N=\langle xN\rangle$. 由 $\Omega_1(G)=N$ 可知 $\langle x\rangle\cap N\neq 1$，因此 $\langle x\rangle$ 是群 G 的一个极大子群，这类情况前面已经讨论. 因此设 G/N 不是循环子群. 再由引理 6，G/N 存在阶是 3^2 的正规初等交换子群. 不妨设 $M\trianglelefteq G$，使得 $N\leqslant M$，且 M/N 是阶为 3^2 的初等交换子群，显然 M/N 存在 4 个 3 阶子群，且有一个 3 阶子群正规于 G/N. 于是可得 G 的所有非循环的 3^3 阶子群一定存在至少 2 个共轭类. 从而可得 $M/N=G/N$，即 $G=M$ 且 $\Phi(G)=N$. 此时可得 G 的非循环的共轭类是 6，矛盾.

因此 $\Omega_1(G)\neq N$. 必存在 3 阶元 $x\in\Omega_1(G)-N$，若不然，则有 $\Omega_1(G)=N$，矛盾. 取

$$y\in N\cap Z(G)$$

由 N 正规可得 N 与 $N_1=\langle x, y\rangle=\langle x\rangle\times\langle y\rangle$ 不在同一个共轭类里面. 显然非循环子群 $\langle N, x\rangle$ 的阶为 3^3. 此时易得子群 $\langle N, x\rangle$ 是群 G 的一个极大子群. 因此 $|G|=3^4$，且 G 存在一个极大子群 M_1 是交换群. 由 N/C 定理知 $|G:C_G(N)|\leqslant 3$. 当 $|G:C_G(N)|=1$ 时，结论显然成立；当 $|G:C_G(N)|=3$ 时，$C_G(N)$ 是群 G 的交换极大子群. 又由于 M_1 非循环，则

$$M_1 \cong C_3 \times C_3 \times C_3$$

或者

$$M_1 \cong C_9 \times C_3$$

若 $M_1 \cong C_3 \times C_3 \times C_3$，则 M_1 中的 3^2 阶子群有 13 个，且一定存在一个 3^2 阶子群正规. 对任意 $H \leqslant M_1$，有 $|G : C_G(H)| \leqslant 3$，于是可得 M_1 中的 3^2 阶子群包含了至少 5 个共轭类，这与题设矛盾. 因此

$$M_1 \cong C_9 \times C_3$$

取 3 阶元 $a \in \Omega_1(G) - M_1$，则 $G = M_1 \rtimes \langle a \rangle$. 易得此时 G 的幂零类是 3，若不然，即 G 的幂零类为 2 时，则 $|G'| = 3$，由引理 3，G 为内交换群，与 G 中存在真子群 $C_2 \times C_2 \rtimes C_2$ 矛盾. 此时 G 是极大类 3 -群，且

$$G = \langle a, b \mid a^3 = b^9 = 1, [b, a] = c, c^3 = 1, [c, a] = b^3, [b^3, a] = [b, c] = 1 \rangle$$

情况 3　若 $p = 2$，G 的极大子群个数为 3. 考虑正规子群列

$$N < N_1 < N_2 < N_3 < \cdots < N_k < G$$

且满足

$$|N_1 : N| = |N_2 : N_1| = |N_k : N_{k-1}| = 2$$

其中 N_k 是极大子群. 则易得 $k \leqslant 3$.

若 $k = 3$，则 $|G| = 2^6$. 如果

$$\Omega_1(G) = \langle g \in G \mid g^2 = 1 \rangle \neq N$$

那么存在 2 阶元 $x \in \Omega_1(G) - N$，取 $1 \neq y \in N \cap Z(G)$，则子群 $K_1 = \langle x, y \rangle = \langle x \rangle \times \langle y \rangle$ 与 N 不是同一个共轭类，于是可得 $\delta(G) \geqslant 8$，矛盾. 因此

$$\Omega_1(G) = \langle g \in G \mid g^2 = 1 \rangle = N$$

若商群 G/N 中的 2 阶子群个数大于 1，同理可得 G 的阶为 2^3 的且包含 N 的子群至少含有 2 个共轭类，于是又可得 $\delta(G) \geqslant 8$，矛盾. 因此 G/N 是循环群或者同构于 Q_{16}. 若 G/N 是循环群，则由 $\Omega_1(G) = N$ 可得 G 存在一个极大循环子群，这类群已经讨论. 若 $G/N \cong Q_{16}$，由于 Q_{16} 中 4 阶子群共轭类至少 2 类，因此 G 中含有 N 的阶是 2^4 的子群至少有 2 个共轭类. 从而可得 $\delta(G) \geqslant 8$，矛盾. 即 $k = 3$ 不成立.

若 $k = 2$，则 $|G| = 2^5$，断言 G 为非极大类 2 -群. 若不然，则 G 为 2^5 阶二面体群、广义四元数群或者半二面体群，显然这 3 种群都有循环的极大子群，与 G 不存在循环的极大子群矛盾. 由引理 2，$|G : G'| \geqslant 2^3$，此时 $|G'| = 1, 2, 2^2$.

若 $|G'| = 1$，G 为交换群. 又由 $d(G) = 2$，因此 $G \cong C_4 \times C_8$，此时易得 $\delta(G) > 7$.

若 $|G'| = 2$. 由引理 3 知 G 为内交换群. 当 $|\Omega_1(G)| \geqslant 2^3$ 时，存在 2 阶元 $z \in \Omega_1(G) - N$，不然，则有 $\Omega_1(G) = N$，矛盾. 从而易得 G 存在正规子群

$$N_0 = \langle z \rangle \times N \cong C_2 \times C_2 \times C_2$$

类似 N_0 中的 4 阶子群个数是 7，对任意 4 阶子群 $K \leqslant N_0$，有 $|G : C_G(K)| \leqslant 2$. 于是 G 中 2^2 阶子群的共轭类个数大于或者等于 3，可得 $\delta(G) > 7$，矛盾. 因此 $|\Omega_1(G)| = 2^2$，此时 G 是亚循环群且 $G' \leqslant N = \Omega_1(G)$. 同时 G/N 中存在子群同构于 $C_2 \times C_2$，类似前面 G 中含有 N 的阶是 2^3 的子群有 3 个共轭类，从而得到 $\delta(G) > 7$.

若 $|G'| = 2^2$，由 $d(G) = 2$，故 $G/G' \cong C_4 \times C_2$.

若 $G' \cong C_2 \times C_2$，由于 G/G' 为 8 阶交换群，则可得 G/G' 存在子群同构于 $C_2 \times C_2$，类似于前面讨论可证得矛盾.

若 $G' \cong C_4$，注意 $|G/N| = 2^3$，且 G/N 无子群同构于 $C_2 \times C_2$，由 $N = C_2 \times C_2$，则 $G/N \cong Q_8$. 又因 $|G : C_G(N)| \leqslant 2$，且 $C_G(N)$ 中不存在子群同构于 $C_2 \times C_2 \times C_2$，即对任意的 $x \in C_G(N) - N$ 都有 $\langle x \rangle \cap N \neq 1$，于是可得 $C_G(N) \cong C_8 \times C_2$ 或者 $C_G(N) = G$. 若 $C_G(N) \cong C_8 \times C_2$，即 G 有指数为 2 的

交换子群，由引理5可得$Z(G)\leqslant C_G(N)$是阶为4的子群. 显然$Z(G)\neq N$，因此$Z(G)=G'=\mho_1(C_G(N))$是循环群. 又因$G/G'\cong C_4\times C_2$，即$G=\langle a,b\rangle$，$b^2\in Z(G)$，这与G'是4阶循环群相矛盾. 因此$N\leqslant Z(G)$，此时同样易得满足G'是4阶循环群的群G是不存在的.

若$k=1$，则$|G|=2^4$，易得$\Phi(G)=N$，于是可得$\delta(G)=6$.

综上所述，满足$\delta(G)=7$且所有极大子群皆为非循环群的2-群不存在.

故定理1得证.

参考文献：

[1] MILLER G A，MORENO H C. Non-Abelian Groups in Which Every Subgroup is Abelian [J]. Trans Amer Math Soc，1903，4(4)：398－404.

[2] LI S R，ZHAO X B. Finite Groups with Few Non-Cyclic Subgroups [J]. Journal of Group Theory，2007(10)：225－233.

[3] MENG W，LU J K，LI S R. Finite Groups with Few Non-Cyclic Subgroups II [J]. Algebra Colloquium，2013，20(1)：81－88.

[4] 郭凯艳，曹洪平，陈贵云. 非循环子群共轭类个数为5的有限幂零群 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2012，37(4)：12－15.

[5] 孟 伟，卢家宽，李世荣. 恰有4个非循环子群共轭类的有限幂零群 [J]. 广西大学学报(自然科学版)，2009，34(6)：845－848.

[6] 王同洲. 非循环子群共轭类个数为6的有限幂零群 [D]. 苏州：苏州大学，2013.

[7] 赵 冲，吕 恒. 非循环子群的共轭类个数为7的有限幂零群 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2015，37(10)：89－92.

[8] 徐明曜. 有限群导引 [M]. 北京：科学出版社，2001.

[9] BERKOVICH Y. Groups of Prime Power Order(Vol. 1) [M]. Berlin：Walter de Gruyter，2008.

Finite p-Groups with 7 Conjugacy Classes of Noncyclic Subgroups

YANG Dong-fang， ZHAO Chong， LV Heng

School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：Let G be a finite p-group. The classification of G with 7 conjugacy classes of noncyclic subgroups is given in this paper.

Key words：finite p-group；nilpotent group；noncyclic subgroup；conjugacy class

责任编辑 廖 坤