第 39 卷第 4 期　　西南大学学报(自然科学版)　　2017 年 4 月
Vol. 39　No. 4　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Apr.　2017

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2017.04.009

模糊集上的广义模糊积分①

曹周斌，　吴健荣

苏州科技学院 数理学院，江苏 苏州 215009

摘要：引进了模糊集上的广义模糊积分的概念，讨论了该积分的一些基本性质，进一步得到了该积分的单调收敛定理及 Fatou 引理等重要结论，并给出一类由该积分表示的积分方程的求解条件.

关　键　词：模糊集；广义模糊积分；收敛定理；积分方程

中图分类号：O172.2；O159　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9868(2017)04-0056-08

1974 年，文献[1]首次用比较弱的单调性和连续性来代替可加性，定义了模糊测度的概念，在此基础上给出了非负可测函数关于模糊测度的积分(通常称为(S)模糊积分). 1981 年，文献[2]用普通乘法代替(S)模糊积分中的取小算子“$\wedge$”，对非负可测函数定义了(N)模糊积分. 1991 年，文献[3]用广义三角模将上述两种积分作了推广，给出了非负可测函数的广义模糊积分的概念，并讨论了一些性质. 1996 年，文献[4]给出了广义模糊积分的广义收敛定理. 2003 年，文献[5]将(S)模糊积分中的非负可测函数推广到一般的广义实值可测函数. 随后，文献[6]进一步讨论了广义实值可测函数模糊积分的刻划定理和积分转化定理，文献[7]讨论了 Fuzzy 值函数序列 Sugeno 积分的一些收敛性质. 2009 年，文献[8]在给定的 K-拟可加模糊测度空间上，获得了广义(S)模糊积分的一些新的性质. 2011 年，文献[9]给出了一般可测函数的广义模糊积分，并研究了这类积分的基本性质. 文献[10]通过研究模糊测度的可测区间值函数定义了区间广义模糊积分. 文献[11]则在模糊测度空间上引进了模糊 Choquet 积分的概念，进一步扩大了模糊积分的范围.

以上积分都是定义在分明集上的，对模糊集上的模糊积分研究相对较少. 其中，文献[12-14] 和文献[15]分别将(S)模糊积分和(N)模糊积分推广到模糊集和格模糊集上. 文献[16]则研究了复模糊集值复模糊积分的收敛问题，得到了这种拓广到复模糊集值上的复模糊积分的单调收敛定理、法都定理和控制收敛定理等重要的收敛定理.

在以上文献基础上，本文将给出模糊集上广义模糊积分的概念，讨论此种积分的基本性质与收敛定理，并给出一类由该积分表示的积分方程的求解条件.

1　预备知识

设 X 是非空集合，$F(X)=\{\widetilde{A}\mid\widetilde{A}: X\longrightarrow[0,1]\}$ 表示 X 的所有模糊子集组成的集合. 为区别起见，

---

① 收稿日期：2015-08-10
基金项目：国家自然科学基金项目(11371013).
作者简介：曹周斌(1990-)，男，江苏苏州人，硕士研究生，主要从事模糊分析学的研究.
通信作者：吴健荣，教授.

称 X 中的一般子集为分明子集或分明集. $F(X)$ 上由非空子类组成的模糊 σ-代数 $\widetilde{F}$ 以及定义在 $\widetilde{F}$ 上的模糊测度 $\widetilde{\mu}$ 等概念参见文献[13].

除非特别注明，以下讨论都在模糊测度空间 $(X, \widetilde{F}, \widetilde{\mu})$ 上进行，并将该空间简记为 X. 记[17]

$$M^{+}=\{f \mid X \longrightarrow [0, \infty]\}$$

注 1 对函数 $f: X \longrightarrow [0, \infty]$，由于：

$$f_{\bar{\alpha}}=\{x \in X \mid f(x) \geqslant \alpha\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{x \in X \,\middle|\, f(x)>\alpha-\frac{1}{n}\right\}=\bigcap_{n=1}^{\infty} f_{\alpha-\frac{1}{n}}$$

$$f_{\alpha}=\{x \mid f(x)>\alpha\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{x \in X \,\middle|\, f(x) \geqslant \alpha+\frac{1}{n}\right\}=\bigcup_{n=1}^{\infty} f_{\overline{\alpha+\frac{1}{n}}}$$

可知 $f \in M^{+}$ 当且仅当 $f_{\alpha}=\{x \mid f(x)>\alpha\} \in \widetilde{F}$ 对任意的 $\alpha \geqslant 0$ 成立.

定义 1 设 $\widetilde{A} \in \widetilde{F}$，$f \in M^{+}$，$f$ 在 $\widetilde{A}$ 上关于模糊测度 $\widetilde{\mu}$ 的广义模糊积分定义为

$$\int_{\widetilde{A}} f \mathrm{d} \widetilde{\mu}=\sup_{\alpha \geqslant 0} S(\alpha, \widetilde{\mu}(f_{\bar{\alpha}} \cap \widetilde{A}))$$

其中，映射 $S: D \longrightarrow [0, +\infty]$ 是广义三角模[3]，

$$f_{\bar{\alpha}}=\{x \in X \mid f(x) \geqslant \alpha\} \qquad \alpha \in (0, \infty)$$

注 2 当广义三角模分别取 $S(x, y)=\min(x, y)$ 和 $S(x, y)=k x y\ (k>0)$ 时，定义 1 中的积分即分别为 (S) 模糊积分 $(\mathrm{S})\int_{\widetilde{A}} f \mathrm{d} \widetilde{\mu}$ 和 (N) 模糊积分 $(\mathrm{N})\int_{\widetilde{A}} f \mathrm{d} \widetilde{\mu}$.

注 3 显然定义 1 中的积分等价于 $\int_{\widetilde{A}} f \mathrm{d} \widetilde{\mu}=\sup_{\alpha>0} S(\alpha, \widetilde{\mu}(f_{\bar{\alpha}} \cap \widetilde{A}))$.

2 主要结果

定理 1 设 $\widetilde{\mu}(\widetilde{A})<\infty$，对于广义模糊积分，有

$$\int_{\widetilde{A}} f \mathrm{d} \widetilde{\mu}=\sup_{\alpha>0} S(\alpha, \widetilde{\mu}(f_{\bar{\alpha}} \cap \widetilde{A}))=\sup_{\alpha>0} S(\alpha, \widetilde{\mu}(f_{\alpha} \cap \widetilde{A}))$$

其中 $f_{\alpha}=\{x \in X \mid f(x)>\alpha\}$，$\alpha \in (0, \infty)$.

证 由于 $f_{\bar{\alpha}} \supset f_{\alpha}$，所以只需证明

$$\sup_{\alpha>0} S(\alpha, \widetilde{\mu}(f_{\bar{\alpha}} \cap \widetilde{A})) \leqslant \sup_{\alpha>0} S(\alpha, \widetilde{\mu}(f_{\alpha} \cap \widetilde{A}))$$

首先，注意到

$$f_{\bar{\alpha}}=\{x \in X \mid f(x) \geqslant \alpha\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{x \in X \,\middle|\, f(x)>\alpha-\frac{1}{n}\right\}=\bigcap_{n=1}^{\infty} f_{\alpha-\frac{1}{n}}$$

而集合列 $\{f_{\alpha-\frac{1}{n}}\}$ 为单调减，$\widetilde{\mu}(\widetilde{A})<\infty$，于是由 $\widetilde{\mu}$ 的上半连续性知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \widetilde{\mu}(f_{\alpha-\frac{1}{n}} \cap \widetilde{A})=\widetilde{\mu}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} f_{\alpha-\frac{1}{n}} \cap \widetilde{A}\right)=\widetilde{\mu}(f_{\bar{\alpha}} \cap \widetilde{A})$$

且

$$\widetilde{\mu}(f_{\alpha-\frac{1}{n}} \cap \widetilde{A}) \geqslant \widetilde{\mu}(f_{\bar{\alpha}} \cap \widetilde{A}) \qquad \forall n=1,2,\cdots$$

再由广义三角模的性质知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(\alpha, \widetilde{\mu}(f_{\alpha-\frac{1}{n}} \cap \widetilde{A}))=S(\alpha, \widetilde{\mu}(f_{\bar{\alpha}} \cap \widetilde{A})) \tag{1}$$

若 $M=\sup_{\alpha>0} S(\alpha, \widetilde{\mu}(f_{\bar{\alpha}} \cap \widetilde{A}))<\infty$，则 $\forall \varepsilon>0$，存在 $\alpha>0$，使得

$$S(\alpha, \widetilde{\mu}(f_{\bar{\alpha}} \cap \widetilde{A}))>M-\varepsilon$$

由(1) 式，存在 n_0，使得 $\alpha_0=\alpha-\dfrac{1}{n_0}>0$，且

$$S(\alpha_0, \tilde{\mu}(f_{\alpha_0} \cap \tilde{A})) > M - \varepsilon$$

从而

$$\sup_{\alpha>0} S(\alpha, \tilde{\mu}(f_\alpha \cap \tilde{A})) > M - \varepsilon$$

由 ε 的任意性得到

$$\sup_{\alpha>0} S(\alpha, \tilde{\mu}(f_\alpha \cap \tilde{A})) \geqslant M$$

即

$$\sup_{\alpha>0} S(\alpha, \tilde{\mu}(f_{\bar{\alpha}} \cap \tilde{A})) \leqslant \sup_{\alpha>0} S(\alpha, \tilde{\mu}(f_\alpha \cap \tilde{A}))$$

若$\sup\limits_{\alpha>0} S(\alpha, \tilde{\mu}(f_{\bar{\alpha}} \cap \tilde{A})) = \infty$，由(1)式知

$$\lim_{n\to\infty} S(\alpha, \tilde{\mu}(f_{\alpha-\frac{1}{n}} \cap \tilde{A})) = \infty$$

于是

$$\sup_{\alpha>0} S(\alpha, \tilde{\mu}(f_\alpha \cap \tilde{A})) = \infty = \sup_{\alpha>0} S(\alpha, \tilde{\mu}(f_{\bar{\alpha}} \cap \tilde{A}))$$

定理 2　模糊集上的广义模糊积分有如下性质：

(1°)　若 $f_1 \leqslant f_2$，则$\int_{\tilde{A}} f_1 \mathrm{d}\tilde{\mu} \leqslant \int_{\tilde{A}} f_2 \mathrm{d}\tilde{\mu}$；

(2°)　若 $\tilde{\mu}(\tilde{A}) = 0$，则$\int_{\tilde{A}} f \mathrm{d}\tilde{\mu} = 0$；

(3°)　若 $\tilde{A} \subset \tilde{B}$，则$\int_{\tilde{A}} f \mathrm{d}\tilde{\mu} \leqslant \int_{\tilde{B}} f \mathrm{d}\tilde{\mu}$；

(4°)　$\int_{\tilde{A}} c \mathrm{d}\tilde{\mu} = S(c, \tilde{\mu}(\tilde{A}))$，其中 $c > 0$；

(5°)　$\int_{\tilde{A}} c \vee f \mathrm{d}\tilde{\mu} = \int_{\tilde{A}} c \mathrm{d}\tilde{\mu} \vee \int_{\tilde{A}} f \mathrm{d}\tilde{\mu}$ 其中 $c > 0$；

(6°)　$\int_{\tilde{A}} f_1 \mathrm{d}\tilde{\mu} \vee \int_{\tilde{A}} f_2 \mathrm{d}\tilde{\mu} \leqslant \int_{\tilde{A}} (f_1 \vee f_2) \mathrm{d}\tilde{\mu}$；

(7°)　$\int_{\tilde{A}} f_1 \mathrm{d}\tilde{\mu} \wedge \int_{\tilde{A}} f_2 \mathrm{d}\tilde{\mu} \geqslant \int_{\tilde{A}} (f_1 \wedge f_2) \mathrm{d}\tilde{\mu}$；

(8°)　$\int_{\tilde{A}} f_1 \mathrm{d}\tilde{\mu} \vee \int_{\tilde{B}} f_2 \mathrm{d}\tilde{\mu} \leqslant \int_{\tilde{A}\cup\tilde{B}} (f_1 \vee f_2) \mathrm{d}\tilde{\mu}$；

(9°)　$\int_{\tilde{A}} f_1 \mathrm{d}\tilde{\mu} \wedge \int_{\tilde{B}} f_2 \mathrm{d}\tilde{\mu} \geqslant \int_{\tilde{A}\cap\tilde{B}} (f_1 \wedge f_2) \mathrm{d}\tilde{\mu}$.

证　只证(4°)和(5°)，其它性质由积分定义易证.

(4°)　对 $\forall \alpha > 0$，均有

$$c_{\bar{\alpha}} = \begin{cases} X & \alpha \leqslant c \\ \phi & \alpha > c \end{cases}$$

所以由积分定义可知

$$\int_{\tilde{A}} c \mathrm{d}\tilde{\mu} = \sup_{\alpha>0} S(\alpha, \tilde{\mu}(c_{\bar{\alpha}} \cap \tilde{A})) = S(c, \tilde{\mu}(\tilde{A}))$$

(5°)　由于对 $\forall \alpha > 0$ 均有

$$(f \vee c)_{\bar{\alpha}} = \begin{cases} X & \alpha \leqslant c \\ f_{\bar{\alpha}} & \alpha > c \end{cases}$$

故

$$\int_{\tilde{A}} c \vee f \mathrm{d}\tilde{\mu} = \sup_{\alpha>0} S(\alpha, \tilde{\mu}((f \vee c)_{\bar{\alpha}} \cap \tilde{A})) =$$

$$\sup_{\alpha\leqslant c} S(\alpha, \tilde{\mu}((f \vee c)_{\bar{\alpha}} \cap \tilde{A})) \vee \sup_{\alpha>c} S(\alpha, \tilde{\mu}(f_{\bar{\alpha}} \cap \tilde{A})) =$$

$$S(c, \tilde{\mu}(\tilde{A})) \vee \sup_{\alpha>c} S(\alpha, \tilde{\mu}(f_{\bar{\alpha}} \cap \tilde{A}))$$

又因为

$$\sup_{\alpha\leqslant c} S(\alpha, \tilde{\mu}(f_{\bar{\alpha}} \cap \tilde{A})) \leqslant S(c, \tilde{\mu}(\tilde{A}))$$

所以结论成立.

定理 3 可测函数 $f_1, f_2 \in M^+$, $\tilde{A} \in \tilde{F}$, 在 $\tilde{A}$ 中 $f_1 \overset{\text{a.e.}}{=} f_2$, 则 $\int_{\tilde{A}} f_1 \mathrm{d}\tilde{\mu} = \int_{\tilde{A}} f_2 \mathrm{d}\tilde{\mu}$ 当且仅当 $\tilde{\mu}$ 是分明零可减的[17].

证 充分性 令

$$D = \{x \in X \mid f_1(x) = f_2(x)\}$$

由 $f_1 \overset{\text{a.e.}}{=} f_2$ 可知, 存在分明集 $E \in \tilde{F}$, $\tilde{\mu}(E)=0$, 使得 $\tilde{A} \cap E^c \subset D$. 又因 $(f_2)_\alpha \cap D \subset (f_1)_\alpha$, 所以

$$\tilde{A} \cap (f_1)_\alpha \supset \tilde{A} \cap (f_2)_\alpha \cap D \supset \tilde{A} \cap (f_2)_\alpha \cap E^c$$

由 $\tilde{\mu}$ 的单调性及分明零可减性, 有

$$\tilde{\mu}(\tilde{A} \cap (f_1)_\alpha) \geqslant \tilde{\mu}(\tilde{A} \cap (f_2)_\alpha \cap E^c) = \tilde{\mu}(\tilde{A} \cap (f_2)_\alpha)$$

因此有 $\int_{\tilde{A}} f_1 \mathrm{d}\tilde{\mu} \geqslant \int_{\tilde{A}} f_2 \mathrm{d}\tilde{\mu}$. 类似可证 $\int_{\tilde{A}} f_1 \mathrm{d}\tilde{\mu} \leqslant \int_{\tilde{A}} f_2 \mathrm{d}\tilde{\mu}$.

必要性 若存在分明集 $E \in \tilde{F}$, $\tilde{\mu}(E)=0$, 令:

$$f_1(x) = \begin{cases} e & x \in \operatorname{supp} \tilde{A} \\ 0 & x \notin \operatorname{supp} \tilde{A} \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} e & x \in \operatorname{supp}(\tilde{A} \cap E^c) \\ 0 & x \notin \operatorname{supp}(\tilde{A} \cap E^c) \end{cases}$$

其中 e 为 S 单位元, 且:

$$\operatorname{supp} \tilde{A} = \{x \in X \mid \tilde{A}(x) > 0\}$$

$$\operatorname{supp}(\tilde{A} \cap E^c) = \{x \in X \mid (\tilde{A} \cap E^c)(x) > 0\}$$

显然有

$$\tilde{A} \cap E^c \subset \operatorname{supp}(\tilde{A} \cap E^c) \subset \{x \in X \mid f_1(x) = f_2(x)\}$$

从而 $f_1 \overset{\text{a.e.}}{=} f_2$. 于是 $\int_{\tilde{A}} f_1 \mathrm{d}\tilde{\mu} = \int_{\tilde{A}} f_2 \mathrm{d}\tilde{\mu}$. 但:

$$(f_1)_{\bar{\alpha}} = \begin{cases} \operatorname{supp}(\tilde{A}) & 0 < \alpha \leqslant e \\ \phi & \alpha > e \end{cases}$$

$$(f_2)_{\bar{\alpha}} = \begin{cases} \operatorname{supp}(\tilde{A} \cap E^c) & 0 < \alpha \leqslant e \\ \phi & \alpha > e \end{cases}$$

所以有

$$\int_{\tilde{A}} f_1 \mathrm{d}\tilde{\mu} = \sup_{\alpha>0} S(\alpha, \tilde{\mu}((f_1)_{\bar{\alpha}} \cap \tilde{A})) = \sup_{0<\alpha\leqslant e} S(\alpha, \tilde{\mu}(\operatorname{supp} \tilde{A} \cap \tilde{A})) =$$

$$\sup_{0<\alpha\leqslant e} S(\alpha, \tilde{\mu}(\tilde{A})) = S(e, \tilde{\mu}(\tilde{A})) = \tilde{\mu}(\tilde{A})$$

及

$$\int_{\tilde{A}} f_2 \mathrm{d}\tilde{\mu} = \sup_{\alpha>0} S(\alpha, \tilde{\mu}((f_2)_{\bar{\alpha}} \cap \tilde{A})) = \sup_{0<\alpha\leqslant e} S(\alpha, \tilde{\mu}(\operatorname{supp}(\tilde{A} \cap E^c) \cap \tilde{A})) =$$

$$\sup_{0<\alpha\leqslant e} S(\alpha,\tilde{\mu}(\tilde{A}\cap E^c))=S(e,\tilde{\mu}(\tilde{A}\cap E^c))=\tilde{\mu}(\tilde{A}\cap E^c)$$

由$\int_{\tilde{A}} f_1 \mathrm{d}\tilde{\mu}=\int_{\tilde{A}} f_2 \mathrm{d}\tilde{\mu}$ 得到$\tilde{\mu}(\tilde{A})=\tilde{\mu}(\tilde{A}\cap E^c)$.

下面给出模糊积分的单调收敛定理：

定理 4　设 $f, f_n \in M^+$，且 $f_n \leqslant f_{n+1}(n=1,2,3,\cdots)$，$\tilde{A}\in\tilde{F}$，若 $f_n \to f$，则

$$\int_{\tilde{A}} f_n \mathrm{d}\tilde{\mu} \uparrow \int_{\tilde{A}} f \mathrm{d}\tilde{\mu}$$

证　因为 $f_n \leqslant f(n=1,2,\cdots)$，故由广义模糊积分的性质有

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\tilde{A}} f_n \mathrm{d}\tilde{\mu} \leqslant \int_{\tilde{A}} f \mathrm{d}\tilde{\mu}$$

下面证明

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\tilde{A}} f_n \mathrm{d}\tilde{\mu} \geqslant \int_{\tilde{A}} f \mathrm{d}\tilde{\mu}$$

令 $c=\int_{\tilde{A}} f \mathrm{d}\tilde{\mu}$，分 3 种情况讨论：

情况 1　若 $c=0$，结论显然成立.

情况 2　若 $0<c<\infty$，则由 $c=\sup_{\alpha>0} S(\alpha,\tilde{\mu}(f_\alpha\cap\tilde{A}))$ 知，存在 $\alpha_k>0$，使得

$$S(\alpha_k,\tilde{\mu}(\tilde{A}\cap f_{\alpha_k}))>c-\frac{1}{k}\qquad k=1,2,\cdots$$

另外，由 $f_n\uparrow f$，有$(f_n)_\alpha\uparrow f_\alpha$，所以 $\tilde{A}\cap(f_n)_\alpha\uparrow\tilde{A}\cap f_\alpha$. 由 $\tilde{\mu}$ 的下连续性知

$$\lim_{n\to\infty}\tilde{\mu}(\tilde{A}\cap(f_n)_\alpha)=\tilde{\mu}(\tilde{A}\cap f_\alpha)$$

再利用广义三角模性质，存在 n_k，当 $n\geqslant n_k$ 时，有

$$S(\alpha_k,\tilde{\mu}(\tilde{A}\cap(f_n)_{\alpha_k}))>c-\frac{1}{k}\qquad k=1,2,\cdots$$

从而当 $n\geqslant n_k$ 时，有

$$\int_{\tilde{A}} f_n \mathrm{d}\tilde{\mu}>c-\frac{1}{k}\qquad k=1,2,\cdots$$

于是

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\tilde{A}} f_n \mathrm{d}\tilde{\mu}>c-\frac{1}{k}$$

再由 k 的任意性便知$\lim_{n\to+\infty}\int_{\tilde{A}} f_n \mathrm{d}\tilde{\mu}\geqslant c$.

情况 3　若 $c=\infty$，存在 $\alpha_k>0$，使得

$$S(\alpha_k,\tilde{\mu}(\tilde{A}\cap f_{\alpha_k}))>k\qquad k=1,2,\cdots$$

类似可知，存在 n_k，当 $n\geqslant n_k$ 时，有

$$S(\alpha_k,\tilde{\mu}(\tilde{A}\cap(f_n)_{\alpha_k}))>k\qquad k=1,2,\cdots$$

从而当 $n\geqslant n_k$ 时，有

$$\int_{\tilde{A}} f_n \mathrm{d}\tilde{\mu}>k\qquad k=1,2,\cdots$$

所以有$\lim_{n\to+\infty}\int_{\tilde{A}} f_n \mathrm{d}\tilde{\mu}=\infty$.

定理 5(Fatou 引理)　设 $f_n\in M^+(n=1,2,3,\cdots)$，$\tilde{A}\in\tilde{F}$，则

$$\int_{\widetilde{A}} \varliminf_{n\to\infty} f_n \mathrm{d}\widetilde{\mu} \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_{\widetilde{A}} f_n \mathrm{d}\widetilde{\mu}$$

证 令 $g = \varliminf_{n\to\infty} f_n$，$g_n = \bigwedge_{k=n}^{\infty} f_k$，则 $g_n \uparrow g$，且 $g_n, g \in M^+$. 由定理 4 可知

$$\int_{\widetilde{A}} \varliminf_{n\to\infty} f_n \mathrm{d}\widetilde{\mu} = \int_{\widetilde{A}} g \mathrm{d}\widetilde{\mu} = \lim_{n\to\infty} \int_{\widetilde{A}} g_n \mathrm{d}\widetilde{\mu} = \lim_{n\to\infty} \int_{\widetilde{A}} \bigwedge_{k=n}^{\infty} f_k \mathrm{d}\widetilde{\mu} \leqslant$$

$$\lim_{n\to\infty} \bigwedge_{k=n}^{\infty} \int_{\widetilde{A}} f_k \mathrm{d}\widetilde{\mu} = \varliminf_{n\to\infty} \int_{\widetilde{A}} f_n \mathrm{d}\widetilde{\mu}$$

下面的定理 6 中，恒设广义三角模 S 满足条件 $\lim_{n\to\infty} S\left(\frac{1}{n}, \infty\right) = 0$，$\widetilde{\mu}(X) < \infty$.

定理 6 设 $\beta \in (0, \infty)$，则 X 上几乎处处有限[17]的非负可测函数 $f(x)$ 满足 $\int_{\widetilde{A}} f(x) \mathrm{d}\widetilde{\mu} = \beta$ 当且仅当对 $\forall \alpha > 0$ 均有 $S(\alpha, \widetilde{\mu}(f_\alpha \cap \widetilde{A})) \leqslant \beta$，且存在 $\alpha_0 \in (0, \infty)$，使得 $S(\alpha_0, \widetilde{\mu}(f_{\alpha_0} \cap \widetilde{A})) = \beta$.

证 必要性 由 $\int_{\widetilde{A}} f \mathrm{d}\widetilde{\mu} = \sup_{\alpha>0} S(\alpha, \widetilde{\mu}(f_\alpha \cap \widetilde{A})) = \beta$ 可知，对 $\forall \alpha > 0$，均有

$$S(\alpha, \widetilde{\mu}(f_\alpha \cap \widetilde{A})) \leqslant \beta$$

并且存在正数列 $\{\alpha_n\}$，使得

$$\lim_{n\to\infty} S(\alpha_n, \widetilde{\mu}(f_{\alpha_n} \cap \widetilde{A})) = \beta$$

取 $\{\alpha_{n_k}\}$ 为 $\{\alpha_n\}$ 的单调增子列且收敛于 $\alpha_0 \in [0, \infty]$.

若 $\alpha_0 = \infty$，即 $\alpha_{n_k} \uparrow \infty$，则由 $\widetilde{\mu}$ 的定义及 f 是几乎处处有限的，可知

$$\lim_{k\to\infty} \widetilde{\mu}(\{x \mid f(x) > \alpha_{n_k}\}) = \widetilde{\mu}(\bigcap_{k=1}^{\infty} \{x \mid f(x) > \alpha_{n_k}\}) = \widetilde{\mu}\{x \mid f(x) = \infty\} = 0$$

从而

$$\lim_{k\to\infty} \widetilde{\mu}(f_{\alpha_{n_k}} \cap \widetilde{A}) = 0$$

由 $\lim_{n\to\infty} S\left(\frac{1}{n}, \infty\right) = 0$ 知

$$\beta = \lim_{k\to\infty} S(\alpha_{n_k}, \widetilde{\mu}(f_{\alpha_{n_k}} \cap \widetilde{A})) = 0$$

与 $\beta \in (0, \infty)$ 矛盾.

若 $\alpha_0 = 0$，即 $\alpha_{n_k} \downarrow 0$，则由 $\widetilde{\mu}(X) < \infty$ 知

$$\beta = \lim_{k\to\infty} S(\alpha_{n_k}, \widetilde{\mu}(f_{\alpha_{n_k}} \cap \widetilde{A})) \leqslant \lim_{k\to\infty} S(\alpha_{n_k}, \widetilde{\mu}(X)) = 0$$

与 $\beta \in (0, \infty)$ 矛盾，所以必有 $\alpha_0 \in (0, \infty)$. 注意到 $f_{\alpha_{n_k}} \supset f_{\alpha_{n_{k+1}}}$ 且 $\bigcap_{k=1}^{\infty} f_{\alpha_{n_k}} = f_{\alpha_0}$，可得

$$\lim_{k\to\infty} \widetilde{\mu}(f_{\alpha_{n_k}} \cap \widetilde{A}) = \widetilde{\mu}(\bigcap_{k=1}^{\infty} f_{\alpha_{n_k}} \cap \widetilde{A}) = \widetilde{\mu}(f_{\bar{\alpha}_0} \cap \widetilde{A})$$

从而

$$\beta = \lim_{k\to\infty} S(\alpha_{n_k}, \widetilde{\mu}(f_{\alpha_{n_k}} \cap \widetilde{A})) = S(\alpha_0, \widetilde{\mu}(f_{\bar{\alpha}_0} \cap \widetilde{A})) \leqslant$$

$$\sup_{\alpha>0} S(\alpha, \widetilde{\mu}(f_{\bar{\alpha}} \cap \widetilde{A})) = \sup_{\alpha>0} S(\alpha, \widetilde{\mu}(f_\alpha \cap \widetilde{A})) = \beta$$

从而

$$S(\alpha_0, \widetilde{\mu}(f_{\bar{\alpha}_0} \cap \widetilde{A})) = \beta$$

充分性 因对 $\forall \alpha > 0$ 均有 $S(\alpha, \widetilde{\mu}(f_\alpha \cap \widetilde{A})) \leqslant \beta$，所以 $\int_{\widetilde{A}} f \mathrm{d}\widetilde{\mu} \leqslant \beta$. 因为

$$\beta = S(\alpha, \widetilde{\mu}(f_{\alpha_0} \cap \widetilde{A})) \leqslant \sup_{\alpha>0} S(\alpha, \widetilde{\mu}(f_\alpha \cap \widetilde{A})) = \int_{\widetilde{A}} f \mathrm{d}\widetilde{\mu}$$

故

$$\int_{\widetilde{A}} f(x)\,\mathrm{d}\widetilde{\mu}=\beta$$

推论 1　设 $f(x)$ 为 X 上的几乎处处有限的非负可测函数，$\beta\in(0,\infty)$，则(S)$\int_{\widetilde{A}} f(x)\,\mathrm{d}\widetilde{\mu}=\beta$ 当且仅当 $\widetilde{\mu}(f_\alpha\cap\widetilde{A})\leqslant\beta$ 对 $\forall\alpha>\beta$ 成立，且 $\widetilde{\mu}(f_\beta\cap\widetilde{A})\geqslant\beta$.

证　必要性　由定理 6 可知，对 $\forall\alpha>0$，均有 $\alpha\wedge\widetilde{\mu}(f_\alpha\cap\widetilde{A})\leqslant\beta$，故对 $\forall\alpha>\beta$，有 $\widetilde{\mu}(f_\alpha\cap\widetilde{A})\leqslant\beta$. 同时存在 $\alpha_0\in(0,+\infty)$，使得

$$\alpha_0\wedge\widetilde{\mu}(f_{\alpha_0}\cap\widetilde{A})=\beta$$

此时必有 $\alpha_0\geqslant\beta$.

若 $\alpha_0=\beta$，由 $\alpha_0\wedge\widetilde{\mu}(f_{\alpha_0}\cap\widetilde{A})=\beta$ 直接可得 $\widetilde{\mu}(f_\beta\cap\widetilde{A})\geqslant\beta$.

若 $\alpha_0>\beta$，则有

$$\widetilde{\mu}(f_\beta\cap\widetilde{A})\geqslant\widetilde{\mu}(f_{\alpha_0}\cap\widetilde{A})=\beta$$

充分性　此时易见，对 $\forall\alpha>0$，均有 $\alpha\wedge\widetilde{\mu}(f_\alpha\cap\widetilde{A})\leqslant\beta$，且 $\beta\wedge\widetilde{\mu}(f_\beta\cap\widetilde{A})=\beta$，从而由定理 6 可知结论.

定理 7　设 $k(x)$ 为固定的非负可测函数，$\beta\in(0,\infty)$，则存在几乎处处有限的非负可测函数 f 满足 $\int_{\widetilde{A}}(k(x)\wedge f(x))\,\mathrm{d}\widetilde{\mu}=\beta$ 的充要条件是存在非负可测函数 $h(x)\leqslant k(x)$（$\forall x\in X$），使得对 $\forall\alpha>0$ 均有 $S(\alpha,\widetilde{\mu}(h_\alpha\cap\widetilde{A}))\leqslant\beta$，且存在 α_0 使得 $S(\alpha_0,\widetilde{\mu}(h_{\alpha_0}\cap\widetilde{A}))=\beta$.

证　必要性　若存在函数 $f(x)$ 满足 $\int_{\widetilde{A}}(k\wedge f)\,\mathrm{d}\widetilde{\mu}=\beta$，令 $f\wedge k=h$，则由定理 6 知结论成立.

充分性　若存在函数 $h(x)$ 满足条件，则

$$\int_{\widetilde{A}}(k\wedge h)\,\mathrm{d}\widetilde{\mu}=\int_{\widetilde{A}} h\,\mathrm{d}\widetilde{\mu}$$

再由定理 6 可知 $\int_{\widetilde{A}} h\,\mathrm{d}\widetilde{\mu}=\beta$. 令 $f=h$，结论也成立.

推论 2　对(S)模糊积分，存在非负可测函数 f，使得(S)$\int_{\widetilde{A}}(k(x)\wedge f(x))\,\mathrm{d}\widetilde{\mu}=\beta$ 的充要条件为存在非负可测函数 $h(x)\leqslant k(x)$（$\forall x\in X$），使得 $\widetilde{\mu}(h_\beta\cap\widetilde{A})\geqslant\beta$，且对 $\forall\alpha>\beta$ 均有 $\widetilde{\mu}(h_\alpha\cap\widetilde{A})\leqslant\beta$.

证　由推论 1 即得.

参考文献：

[1]　SUGENO M. Theory of Fuzzy Integrals and Its Applications [D]. Tokyo: Tokyo Institute of Technology, 1974.

[2]　赵汝怀. (N)模糊积分 [J]. 数学研究与评论，1981，4(2)：55－72.

[3]　吴从炘，马　明. 模糊分析学基础 [M]. 北京：国防工业出版社，1991.

[4]　GUO C M, ZHANG D L. Generalized Convergence Theorem of Generalized Fuzzy Integrals [J]. J Fuzzy Math, 1996, 4(2): 413－420.

[5]　WU C X, MAMADOU T. An Extension of Sugeno Integral [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2003, 138(3): 537－550.

[6]　孔芳弟. 广义实值函数的模糊积分 [J]. 西北师范大学学报(自然科学版)，2004，40(2)：18－22.

[7]　成和平，闵　兰. Fuzzy 值函数的 Sugeno 积分的注记 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2005，30(3)：418－421.

[8]　李艳红，梁晓俐. 关于广义 Sugeno 模糊积分的补充性质 [J]. 辽东学院学报(自然科学版)，2009，16(1)：40－43.

[9]　夏　阳，吴健荣. 一般可测函数的(G)模糊积分 [J]. 模糊系统与数学，2011，25(1)：96－102.

[10] JANG L C. A Note on the Interval-Valued Generalized Fuzzy Integral by Means of an Interval-Representable Pseudo-Multiplication and Their Convergence Properties [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2013, 222: 45-57.

[11] 吴健荣，蒋诚钢. 模糊 Choquet 积分的性质与 Minkowski 型不等式 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2012，34(12)：101-105.

[12] QIAO Z. Fuzzy Integral on L-Fuzzy Sets [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1990, 38(1): 61-79.

[13] QIAO Z. On Fuzzy Measure and Fuzzy Integral on Fuzzy Set [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1990, 37(1): 77-92.

[14] WANG Z Y, QIAO Z. Transformation Theorems for Fuzzy Integrals on Fuzzy Set [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1990, 34(3): 355-364.

[15] 黄　艳. 不可加测度上的模糊积分 [D]. 哈尔滨：哈尔滨工业大学，2006.

[16] 马生全，李生刚. 复模糊集值复模糊积分及其收敛性定理 [J]. 江西师范大学学报(自然科学版)，2015，39(1)：20-26.

[17] HUANG Y, WU C X. (N) Fuzzy Integral on Fuzzy Set [J]. 黑龙江大学自然科学学报，2003，20(3)：1-5.

Generalized Fuzzy Integral on a Fuzzy Set

CAO Zhou-bin, WU Jian-rong

College of Mathematics and Physics, Suzhou University of Science and Technology, Suzhou Jiangsu 215009, China

Abstract: In this paper, the definition of the generalized fuzzy integral on a fuzzy set is introduced. Based on a discussion of the basic properties of this integral, some important results such as the monotone convergence theorem and Fatou lemma are proved. Some conditions for the solution of the integral equations are also given.

Key words: fuzzy set; generalized fuzzy integral; convergence theorem; integral equation

责任编辑　廖　坤