DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2017.04.011

一类 Kirchhoff 型分数阶 p -拉普拉斯方程无穷解的存在性①

刘晓琪，　欧增奇

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：利用对称山路引理研究带有超线性非线性项的 Kirchhoff 型分数阶 p -拉普拉斯方程，获得了该方程无穷个解的存在性.

关 键 词：Kirchhoff 型方程；分数阶 p -拉普拉斯；无穷个解；对称山路引理

中图分类号：O176.3　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9868(2017)04-0070-06

考虑如下 Kirchhoff 型分数阶 p -拉普拉斯方程：

$$\begin{cases} M\left(\iint_{\mathbb{R}^{2N}} \dfrac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)(-\Delta)_p^s u(x) = f(x,u) & x\in\Omega \\ u=0 & x\in\mathbb{R}^N\backslash\Omega \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\Omega\subset\mathbb{R}^N(N\geqslant 3)$ 是一个非空有界开集，$\partial\Omega$ 满足 Lipshcitz 条件，$p_s^* = \dfrac{Np}{N-sp}$，$(-\Delta)_p^s$ 是分数阶 p -拉普拉斯算子，定义如下：

$$(-\Delta)_p^s u(x) = 2\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_\varepsilon(x)} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{N+ps}}\mathrm{d}y$$

其中 $x\in\mathbb{R}^N$，$0<s<1<p<N$，$sp<N$. M：$\mathbb{R}_0^+\longrightarrow\mathbb{R}_0^+$ 是连续函数（$\mathbb{R}_0^+$ 表示除去 0 以外的正实数集），且满足下面的条件：

（V）存在 $\theta>0$，使得 $M(t)t\leqslant\theta\rho(t)$，其中

$$\rho(t)=\int_0^t M(\nu)\mathrm{d}\nu \qquad t\in[0,\infty)$$

且存在 $0<m_1\leqslant m_2<\infty$ 与 $\alpha>1$，使得

$$m_1t^\alpha\leqslant\rho(t)\leqslant m_2t^\alpha$$

令 f：$\Omega\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ 是 Carathéodory 函数，设

$$F(x,\xi)=\int_0^\xi f(x,\tau)\mathrm{d}\tau$$

满足下列条件：

---

① 收稿日期：2016-09-13

基金项目：国家自然科学基金项目(11471267).

作者简介：刘晓琪(1990-)，女，河南台前人，硕士研究生，主要从事非线性分析的研究.

通信作者：欧增奇，副教授，硕士研究生导师.

(f_1) 对于所有的 $x \in \Omega$ 和 $\xi \in \mathbb{R}$, $f(x, -\xi) = -f(x, \xi)$;

(f_2) 对于所有的 $x \in \Omega$ 和 $\xi \in \mathbb{R}$, 存在 $a_1 > 0$ 且 $1 < q < p_s^*$, 使得

$$|f(x, \xi)| \leqslant a_1(1 + |\xi|^{q-1})$$

(f_3) 对于所有的 $x \in \Omega$, 都有

$$\lim_{|\xi| \to \infty} \frac{F(x, \xi)}{|\xi|^{\theta p}} = +\infty$$

(f_4) 对于所有的 $x \in \Omega$, 都有

$$\lim_{\xi \to 0} \frac{F(x, \xi)}{|\xi|^{\theta p}} = 0$$

(f_5) 对于所有的 $x \in \Omega$ 和 $\xi \in \mathbb{R}$, 存在 $\mu > \theta p$, $\gamma_0 \in L^1(\Omega)$ 且 $\gamma_1 \in L^{\frac{sp}{N}}(\Omega)$, 使得

$$\mu F(x, \xi) \leqslant \xi f(x, \xi) + \gamma_0(x) + \gamma_1(x)|\xi|^{\theta p}$$

(f_6) 对于所有的 $x \in \Omega$ 和 $\xi \in \mathbb{R}$, $F(x, \xi) \geqslant 0$.

最近有许多文献研究了 Kirchhoff 型分数阶方程. 文献[1]研究的是 $p = 2$ 的情况, 利用喷泉定理, 获得了方程无穷多个解的存在性. 文献[2-3]研究的是带有满足(AR)条件的非线性项的方程. 其中, 文献[3]利用山路引理, 获得了方程两个非平凡弱解的存在性; 文献[2]利用对称山路引理, 获得了方程无穷多个解的存在性. 受以上结果的启发, 本文把(AR)条件推广到一般的超二次条件, 并得到方程无穷多个解的存在性.

记 $Q = \mathbb{R}^{2N} \backslash \wp$, 其中 $\wp = C(\Omega) \times C(\Omega) \subset \mathbb{R}^{2N}$ 以及 $C(\Omega) = \mathbb{R}^N \backslash \Omega$. W 是 $\mathbb{R}^N$ 到 $\mathbb{R}$ 中的勒贝格可测函数的线性空间, 并且满足

$$\iint_Q \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+ps}} \mathrm{d}x \mathrm{d}y < \infty \qquad u \in W$$

考虑 W 的闭线性子空间 $W_0 = \{u \in W : u(x) = 0, \text{ a.e. } x \in \mathbb{R}^N \backslash \Omega\}$, 并且在 W_0 中定义范数为

$$\| u \|_{W_0} = \left(\iint_Q \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+ps}} \mathrm{d}x \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{p}}$$

由文献[3]可知, 当 $p \in [1, p_s^*]$ 时, 嵌入 $W_0 \hookrightarrow L^r(\Omega)$ 为连续嵌入; 当 $p \in [1, p_s^*)$ 时, 此嵌入为紧嵌入, 并且存在常数

$$C_0 = C_0(N, r, p, s) > 0$$

使得

$$\left(\int_\Omega |u|^r \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{r}} \leqslant C_0 \| u \|_{W_0}$$

定义 $I : W_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ 为方程(1)对应的能量泛函, 即

$$I(u) = \frac{1}{p} \rho \left(\iint_Q \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+ps}} \mathrm{d}x \mathrm{d}y \right) - \int_\Omega F(x, u) \mathrm{d}x \tag{2}$$

如果 $u \in W_0$ 满足

$$M\left(\iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+ps}} \mathrm{d}x \mathrm{d}y \right) \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2}(u(x) - u(y))(\varphi(x) - \varphi(y))}{|x - y|^{N+ps}} \mathrm{d}x \mathrm{d}y =$$

$$\int_\Omega f(x, u(x)) \varphi(x) \mathrm{d}x \qquad \forall \varphi \in W_0$$

则称 u 是方程(1)的弱解. 本文主要的结果是:

定理 1 假设 $0 < \theta < \dfrac{N}{N - ps}$, 条件(V)与($f_1$)-($f_6$)都成立, 若 $\theta p < q < p_s^*$, 则方程(1)有无穷多个解.

证　利用对称山路引理[4]. 由条件(f_1)可知 $F(x,\cdot)$ 是偶的，且 $I(0)=0$. 下面分两步来完成定理 1 的证明：

步骤 1　证明泛函 I 有山路结构.

由条件(f_4)可知，对任意的 $\varepsilon>0$，都存在 $\delta_1=\delta_1(\varepsilon)>0$，当 $|\xi|<\delta_1$ 时，对于所有的 $x\in\Omega$，都有

$$|F(x,\xi)|\leqslant\varepsilon|\xi|^{\theta p} \tag{3}$$

由条件(f_2)可知，对于所有的 $|\xi|\geqslant\delta_1$ 和 $x\in\Omega$，都存在

$$C_\varepsilon=2a_1\max\left\{\delta_1^{1-q},\frac{1}{q}\right\}$$

有

$$|F(x,\xi)|\leqslant a_1\left(|\xi|+\frac{|\xi|^q}{q}\right)\leqslant C_\varepsilon|\xi|^q \tag{4}$$

由(3)式和(4)式可知，对任意的 $\varepsilon>0$，对所有的 $x\in\Omega$ 和 $\xi\in\mathbb{R}$，都有

$$|F(x,\xi)|\leqslant\varepsilon|\xi|^{\theta p}+C_\varepsilon|\xi|^q \tag{5}$$

由条件(f_3)可知，对任意的 $K_1>\frac{1}{p}\rho(1)C_0^{-\theta}$，都存在 K_2，当 $|\xi|>K_2$ 时，对所有的 $x\in\Omega$，有

$$|F(x,\xi)|\geqslant K_1|\xi|^{\theta p} \tag{6}$$

由条件(V)可知，对于所有的 $t>0$，$M(t)>0$，并且：

$$\rho(t)\geqslant\rho(1)t^\theta\qquad t\in[0,1] \tag{7}$$

$$\rho(t)\leqslant\rho(1)t^\theta\qquad t\in[1,+\infty) \tag{8}$$

由(5)式和(7)式可知，对于满足 $\|u\|_{W_0}\leqslant1$ 的 u，有

$$\begin{aligned}I(u)\geqslant&\frac{1}{p}\rho\left(\iint_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)-\varepsilon\int_\Omega|u|^{\theta p}\mathrm{d}x-C_\varepsilon\int_\Omega|u|^q\mathrm{d}x\geqslant\\&\frac{1}{p}\rho(1)\|u\|_{W_0}^{\theta p}-\varepsilon C_0^{\theta p}\|u\|_{W_0}^{\theta p}-C_\varepsilon C_0^q\|u\|_{W_0}^q=\\&\|u\|_{W_0}^{\theta p}\left(\frac{1}{p}\rho(1)-\varepsilon C_0^{\theta p}-C_\varepsilon C_0^q\|u\|_{W_0}^{q-\theta p}\right)\end{aligned} \tag{9}$$

由(9)式可知，存在足够小的 r，当 $\|u\|_{W_0}=r$ 时，有

$$I(u)\geqslant r^{\theta p}\left(\frac{1}{p}\rho(1)-\varepsilon C_0^{\theta p}-C_\varepsilon C_0^q r^{q-\theta p}\right)=\alpha>0$$

令 E 是 W_0 中的有限维子空间，对满足 $\|u\|_{W_0}=1$ 的任意的 u，对于所有的 $t>\max\{K_2,1\}$，由(6)式和(8)式可知

$$\begin{aligned}I(tu)\leqslant&\frac{1}{p}\rho(t^p)-\int_\Omega K_1|tu|^{\theta p}\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{p}\rho(1)t^{\theta p}-K_1C_0^\theta t^{\theta p}=\\&\left(\frac{1}{p}\rho(1)-K_1C_0^\theta\right)\cdot t^{\theta p}\end{aligned}$$

由于 $K_1>\frac{1}{p}\rho(1)C_0^{-\theta}$，则存在足够大的 $\mathbb{R}_0>0$，当 $\|u\|_{W_0}=\mathbb{R}_0$ 时，有 $I(u)<0$.

步骤 2　证明 I 满足(PS)条件.

设$\{u_n\}\subset W_0$ 满足 $I(u_n)$ 有界，且当 $n\to\infty$ 时 $I'(u_n)\to0$. 则存在 $C>0$，有

$$|\langle I'(u_n),u_n\rangle|\leqslant C\|u_n\|_{W_0}$$

且

$$I(u_n)\leqslant C$$

首先证明$\{u_n\}$是有界的. 利用反证法，假设 $\|u_n\|_{W_0}\to\infty$，则由条件(V)和条件(f_5)可得

$$I(u_n)-\frac{1}{\mu}\langle I'(u_n),u_n\rangle=$$

$$\frac{1}{p}\rho(\|u_n\|_{W_0}^p)-\frac{1}{\mu}M(\|u_n\|_{W_0}^p)\|u_n\|_{W_0}^p-\frac{1}{\mu}\int_\Omega[\mu F(x,u_n-f(x,u_n)u_n)]\mathrm{d}x\geqslant$$

$$\left(\frac{1}{\theta p}-\frac{1}{\mu}\right)M(\|u_n\|_{W_0}^p)\|u_n\|_{W_0}^p-\frac{1}{\mu}\int_\Omega[\gamma_0(x)+\gamma_1(x)|u_n|^{\theta p}]\mathrm{d}x \tag{10}$$

因为 $I(u_n)$ 和 $|\langle I'(u_n),u_n\rangle|\leqslant C\|u_n\|_{W_0}$，且 $\|u_n\|_{W_0}$ 无界，可知

$$I(u_n)-\frac{1}{\mu}\langle I'(u_n),u_n\rangle+\int_\Omega\gamma_0(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\theta p}-\frac{1}{\mu}\right)M(\|u_n\|_{W_0}^p)\|u_n\|_{W_0}^p \tag{11}$$

则由(10)式和(11)式可知

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\theta p}-\frac{1}{\mu}\right)M(\|u_n\|_{W_0}^p)\|u_n\|_{W_0}^p\leqslant\int_\Omega\gamma_1(x)|u_n|^{\theta p}\mathrm{d}x \tag{12}$$

令

$$\omega_n=\frac{u_n}{\|u_n\|_{W_0}}$$

由于$\{\omega_n\}$有界，则存在一列子列，仍记为$\{\omega_n\}$，在 W_0 中 $\omega_n\rightharpoonup\omega$，在 $L^p(\Omega)$ 中 $\omega_n\to\omega$，且在 Ω 中 $\omega_n(x)\to\omega(x)$ 几乎处处成立. 由(12)式可知

$$M(\|u_n\|_{W_0}^p)\leqslant b\int_\Omega\gamma_1(x)|\omega_n|^{\theta p}\mathrm{d}x$$

则存在 $b>0$ 和 $r>0$，使得

$$b\int_\Omega\gamma_1(x)|\omega_n|^{\theta p}\mathrm{d}x\geqslant r$$

由文献[5]和条件(f_3)可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F(x,u_n)}{\|u_n\|_{W_0}^{\theta p}}=\lim_{n\to\infty}\frac{F(x,\|u_n\|_{W_0}\omega_n(x))}{\|u_n\|_{W_0}^{\theta p}|\omega_n(x)|^{\theta p}}|\omega_n|^{\theta p}=+\infty$$

由条件(f_6)和法图引理可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_\Omega F(x,u_n)\mathrm{d}x}{\|u_n\|_{W_0}^{\theta p}}=+\infty$$

由

$$0=\lim_{n\to\infty}\frac{I(u_n)}{\|u_n\|_{W_0}^{\theta p}}=$$

$$\frac{1}{p}\frac{\rho(\|u_n\|_{W_0}^p)}{\|u_n\|_{W_0}^{\theta p}}-\frac{\int_\Omega F(x,u_n)\mathrm{d}x}{\|u_n\|_{W_0}^{\theta p}}\leqslant$$

$$\frac{1}{p}\frac{\rho(1)\|u_n\|_{W_0}^{\theta p}}{\|u_n\|_{W_0}^{\theta p}}-\frac{\int_\Omega F(x,u_n)\mathrm{d}x}{\|u_n\|_{W_0}^{\theta p}}=$$

$$\frac{1}{p}\rho(1)-\frac{\int_\Omega F(x,u_n)\mathrm{d}x}{\|u_n\|_{W_0}^{\theta p}}\to-\infty$$

推出矛盾. 由此可得$\{u_n\}$在 W_0 中是有界的.

下证在W_0中$u_n\to u$. 由于W_0是自反的巴拿赫空间，因为$\{u_n\}$有界，所以存在一列子列，仍记为$\{u_n\}$，在 W_0 中 $u_n\rightharpoonup u$，在 $L^p(\Omega)$ 中 $u_n\to u$，且在 Ω 中 $u_n(x)\to u(x)$ 几乎处处成立. 记

$$A_\psi(v)=\iint_{\mathbb{R}^{2N}}\frac{|\psi(x)-\psi(y)|^{p-2}(\psi(x)-\psi(y))}{|x-y|^{N+ps}}(v(x)-v(y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y\qquad v\in W_0$$

由 Hölder 不等式可知

$$|A_\psi(v)|\leqslant\|\psi\|_{W_0}^{p-1}\|v\|_{W_0}\qquad v\in W_0$$

则有

$$\lim_{n\to\infty}A_u(u_n-u)=0\tag{13}$$

由 $u_n\rightharpoonup u$ 且在 W_0^* 中 $I'(u_n)\to 0$，可知

$$\langle I'(u_n),u_n-u\rangle\to 0$$

即当 $n\to\infty$ 时，有

$$\langle I'(u_n),u_n-u\rangle=M(\|u_n\|_{W_0}^p)A_{u_n}(u_n-u)-\int_\Omega f(x,u_n)(u_n-u)\mathrm{d}x\to 0\tag{14}$$

因为在 $L^p(\Omega)$ 中 $u_n\to u$，所以

$$f(x,u_n)(u_n-u)\to 0$$

由文献[3]可知，$\{f(x,u_n)(u_n-u)\}$ 在 $L^1(\Omega)$ 上是一致有界且等度连续的，则由维它利定理可得

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f(x,u_n)(u_n-u)\mathrm{d}x=0\tag{15}$$

由(14)式和(15)式可得

$$M(\|u\|_{W_0}^p)A_{u_n}(u_n-u)\to 0\qquad n\to\infty$$

又由 $M(\|u\|_{W_0}^p)$ 有界可得，当 $n\to\infty$ 时，有

$$A_{u_n}(u_n-u)\to 0\tag{16}$$

由(13)式和(16)式可得

$$|A_{u_n}(u_n-u)-A_u(u_n-u)|\to 0\qquad n\to\infty$$

下面由 Simon 不等式讨论强收敛性.

当 $p\geqslant 2$ 时，令 $n\to\infty$，则

$$\begin{aligned}&\|u_n-u\|_{W_0}^p\leqslant\\&C_p\iint_{\mathbb{R}^{2N}}[|u_n(x)-u_n(y)|^{p-2}(u_n(x)-u_n(y))-|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))]\times\\&(u_n(x)-u(x)-u_n(y)+u(y))|x-y|^{-(N+ps)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\\&C_p[A_{u_n}(u_n-u)-A_u(u_n-u)]=o(1)\end{aligned}\tag{17}$$

当 $1<p<2$ 时，令 $n\to\infty$，则

$$\begin{aligned}&\|u_n-u\|_{W_0}^p\leqslant\\&\widetilde{C}_p[A_{u_n}(u_n-u)-A_u(u_n-u)]^{\frac{p}{2}}(\|u_n\|_{W_0}^p+\|u\|_{W_0}^p)^{\frac{2-p}{2}}\leqslant\\&\widetilde{C}_p[A_{u_n}(u_n-u)-A_u(u_n-u)]^{\frac{p}{2}}\left(\|u_n\|_{W_0}^{\frac{p(2-p)}{2}}+\|u\|_{W_0}^{\frac{p(2-p)}{2}}\right)\leqslant\\&C[A_{u_n}(u_n-u)-A_u(u_n-u)]^{\frac{p}{2}}=o(1)\end{aligned}\tag{18}$$

其中 C 是正常数，C_p 和 $\widetilde{C}_p$ 是 Simon 不等式中只依赖于 p 的常数. 则由(17)式和(18)式可知

$$\|u_n-u\|_{W_0}^p\to 0\qquad n\to\infty$$

综上所述，可知 I 满足(PS)条件.

根据对称山路引理可知方程(1)存在无穷多个弱解.

参考文献:

[1] XIANG M Q, ZHANG B L, GUO X Y. Infinitely Many Solutions for a Fractional Kirchhoff Type Problem Via Fountain Theorem [J]. Nonlinear Anal, 2015, 120: 299-313.

[2] XIANG M Q, GIOVANNI M B, TIAN G H, et al. Infinitely Many Solutions for the Stationary Kirchhoff Problems Involving the Fractional p-Laplacian [J]. J Differential Equations, 2016, 29: 357-374.

[3] XIANG M Q, ZHANG B L, MASSIMILIANO F. Existence of Solutions for Kirchhoff Type Problem Involving the Non-Local Fractional p-Laplacian [J]. J Math Anal Appl, 2015, 424: 1021-1041.

[4] RABINOWITZ P H. Minmax Methods in Critical Piont Theory with Applications to Differential Equations [M]. Providence RI: American Mathmetical Society, 1985: 1-6.

[5] MARCO D, SERGIO L. Linking Over Cones and Nontrivial Solutions for p-Laplace Equations with p-Superlinear Nonlinearity [J]. Ann Inst H Poincaré Anal Non Linéaire, 2007, 24: 907-919.

[6] 刘芮琪,吴行平,唐春雷. 高维空间中一类奇异 Kirchhoff 型问题正解的存在性 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2016, 38(4): 67-71.

Existence of Infinitely Many Solutions for a Class of Kirchhoff-Type Problems Involving the Fractional p-Laplacian

LIU Xiao-qi,　OU Zeng-qi

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: In this article, the existence of infinitely many solutions for Kirchhoff problems involving the fractional p-Laplacian with superlinear nonlinearity are obtained by using the symmetric mountain pass theorem.

Key words: Kirchhoff-type problem; fractional p-Laplacian; infinitely many solutions; symmetric mountain pass theorem

责任编辑　廖　坤