第 39 卷第 4 期 西南大学学报(自然科学版) 2017 年 4 月
Vol. 39 No. 4 Journal of Southwest University (Natural Science Edition) Apr. 2017

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2017.04.012

一类 Klein-Gordon-Maxwell 系统的基态解[①]

张 勋, 唐春雷

西南大学 数学与统计学院, 重庆 400715

摘要: 利用变分方法研究了一类带有位势函数 V 的 Klein-Gordon-Maxwell 系统, 并且获得了该系统的基态解.

关 键 词: Klein-Gordon-Maxwell 系统; 位势函数; 基态解; 变分方法

中图分类号: O176.3 **文献标志码**: A **文章编号**: 1673-9868(2017)04-0076-06

本文研究如下 Klein-Gordon-Maxwell 系统:

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u - (2\omega + \phi)\phi u = f(x, u) & x \in \mathbb{R}^3 \\ \Delta\phi = (\omega + \phi)\, u^2 & x \in \mathbb{R}^3 \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\omega > 0$, u, ϕ: $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$. 这种类型的系统来源于一个非常有趣的物理情境, 文献[1]首次研究了这类系统. 随后, 文献[1-5]获得了这类系统非平凡解的存在性结果. 伴随着解的存在性研究, 一类带有位势函数 V 的 Klein-Gordon-Maxwell 系统的径向对称解被广泛研究[6]. 以上文献大多数都是在径向对称空间中研究解的存在性结果, 而对基态解的研究很少, 只有文献[2, 5] 研究了该系统的基态解. 因此本文将研究一类带有位势函数 V 的 Klein-Gordon-Maxwell 系统基态解的存在情况, 这里的非线性项满足的条件比一般 Ambrosetti-Rabinowitz 条件更弱. 为了得出我们的结论, 需要以下条件:

(V_0) $V \in C(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, 满足 $\inf\limits_{x \in \mathbb{R}^3} V(x) = V_0$, 并且对 $\forall M > 0$, 存在 $v_0 > 0$, 使得

$$\lim_{|y| \to +\infty} \operatorname{meas}\{x \in \mathbb{R}^3 : |x - y| \leqslant v_0, V(x) \leqslant M\} = 0$$

其中 $V_0 > 0$ 是正常数, meas 表示 $\mathbb{R}^3$ 中的勒贝格测度;

(f_1) $\lim\limits_{t \to 0+} \dfrac{f(x, t)}{t} = 0$ 关于 $x \in \mathbb{R}^3$ 一致成立;

(f_2) $f \in C(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, 存在 $C_0 > 0$, $4 \leqslant p < 2^*$, 使得对于 $t \in \mathbb{R}$, $|f(x, t)| \leqslant C_0(1 + |t|^{p-1})$ 关于 $x \in \mathbb{R}^3$ 一致成立, 其中 $2^* = 6$ 是临界指数;

(f_3) 存在 $0 \leqslant \sigma < V_0$, 使得对于 $t \in \mathbb{R}$, 有 $tf(x, t) - 4F(x, t) \geqslant -\sigma t^2$, 其中 $F(x, t) = \int_0^t f(x, s)\mathrm{d}s$.

本文主要的结果是:

定理 1 假设条件(V_0), (f_1), (f_2) 和 (f_3) 成立, 则系统(1) 有基态解.

注 1 一方面, 相比于文献[2, 5], 本文研究的是带非常值位势 V 的系统(1) 的基态解. 另一方面, 相比于文献[5], 本文研究的是非自治的系统(1) 的基态解, 且非线性项 f 的条件不同于文献[7-9] 的非线性

---

① 收稿日期: 2016-11-11
基金项目: 国家自然科学基金项目(11471267).
作者简介: 张 勋(1989-), 男, 陕西汉中人, 硕士研究生, 主要从事非线性分析的研究.
通信作者: 唐春雷, 教授, 博士研究生导师.

项 f 的条件，也不同于文献[10]的条件.

注2 条件(V_0)比强制位势条件(当 $|x|\to+\infty$ 时，$V(x)\to+\infty$)更弱，但是由它仍能得出 $E\hookrightarrow L^s(2\leqslant s<2^*)$ 是紧嵌入(详细可见文献[11]). 条件(f_3)比一般的 Ambrosetti-Rabinowitz 条件更弱. 满足假设条件(f_1),(f_2)和(f_3)的非线性项 f 是存在的，例如 $f(x,t)=|t|^{p-2}t$，其中 $4\leqslant p<6$.

1 预备知识

我们引入一些空间和对应的范数：

$$\begin{cases} H^1=\{u\in L^2(\mathbb{R}^3):|\nabla u|\in L^2(\mathbb{R}^3)\} \\ \|u\|_{H^1}=\left(\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u|^2+u^2)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} D^{1,2}=\{u\in L^{2^*}(\mathbb{R}^3):|\nabla u|\in L^2(\mathbb{R}^3)\} \\ \|u\|_{D^{1,2}}=\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

L^p 勒贝格空间的范数为

$$\|u\|_p=\left(\int_{\mathbb{R}^3}|u|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \forall p\in[1,+\infty)$$

我们引入 H^1 的子空间 E：

$$E=\left\{u\in H^1(\mathbb{R}^3):\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u|^2+V(x)u^2)\mathrm{d}x<+\infty\right\}$$

其范数为

$$\|u\|=\left(\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u|^2+V(x)u^2)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

令 C,C_i 是正常数.

容易得出 E 连续嵌入 H^1，因此 $s\in[2,2^*]$ 也连续嵌入 L^s，从而存在常数 $C_s>0$，使得

$$\|u\|_s\leqslant C_s\|u\|$$

定义 $F(u,\phi)$ 为系统(1)对应的能量泛函，即

$$F(u,\phi)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u|^2-|\nabla\phi|^2+[V(x)-(2\omega+\phi)\phi]u^2)\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3}F(x,u)\mathrm{d}x \tag{2}$$

由于 F 是强不定的，为了克服这种困难，我们将(2)式转化成只含有一个变量 u 的等式，这种方法已经在文献[1]中第一次被用到. 通过观察可得 $F\in C^1(E\times D^{1,2},\mathbb{R})$，它的临界点就是系统(1)的弱解.

引理1[1] 对于每一个 $u\in E$，存在唯一的 $\phi=\phi_u$，$\phi_u\in D^{1,2}$ 满足方程 $\Delta\phi=(\omega+\phi)u^2$. 并且对于$\{x:u(x)\neq 0\}$，当 $\omega>0$ 时，$-\omega\leqslant\phi_u\leqslant 0$.

通过引理1，我们定义 $\phi_u:E\longrightarrow D^{1,2}$，这个映射是 C^1 的，并且对 $\forall u\in E$，映射 ϕ_u 是 $\Delta\phi=(\omega+\phi)u^2$ 的唯一解. 从而有

$$-\Delta\phi_u+u^2\phi_u=-\omega u^2$$

因此系统(1)可以写成以下形式：

$$-\Delta u+V(x)u-(2\omega+\phi_u)\phi_u u=f(x,u) \qquad x\in\mathbb{R}^3 \tag{3}$$

现在考虑 $J:E\longrightarrow\mathbb{R}$，$J(u)=F(u,\phi_u)$，它是 C^1 的. 为了研究方程(3)的弱解，我们考虑

$$J(u)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u|^2+V(x)u^2)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\omega\phi_u u^2\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3}F(x,u)\mathrm{d}x \tag{4}$$

对 $\forall v\in E$，有

$$\langle J'(u),\ v\rangle = \int_{\mathbb{R}^3}(\nabla u \cdot \nabla v + V(x)uv)\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^3}(2\omega + \phi_u)\phi_u uv\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^3} f(x,\ u)v\mathrm{d}x \tag{5}$$

容易得出 F 和 J 之间的关系：若$(u,\ \phi) \in E \times D^{1,2}$，则以下 (i) 和 (ii) 等价：

(i) $(u,\ \phi)$ 是 F 的临界点；

(ii) u 是 J 的临界点，并且 $\phi = \phi_u$.

因此，为了得到方程(3) 的弱解，我们研究 J 的临界点.

2　解的存在性证明

证明解的存在性结果，是通过一系列引理来完成的，首先证明 J 满足山路结构.

引理 2　泛函 J 满足：

(i) 存在正常数 a,ρ，使得当 $\| u \| = \rho$ 时，$J(u) \geqslant a$；

(ii) 存在 $u_1 \in E$，使得当 $\| u_1 \| > \rho$ 时，$J(u_1) < 0$.

证　由条件(f_1) 和(f_2)，对 $\forall \varepsilon > 0$，存在 $C_\varepsilon > 0$，使得

$$F(x,\ t) \leqslant \varepsilon t^2 + C_\varepsilon |t|^p \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

根据引理 1 和 $4 \leqslant p < 6$ 可以得出

$$J(u) \geqslant \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u|^2 + V(x)u^2)\mathrm{d}x - \varepsilon\int_{\mathbb{R}^3} u^2\mathrm{d}x - C_\varepsilon\int_{\mathbb{R}^3}|u|^p\mathrm{d}x \geqslant$$
$$C_1\|u\|^2 - C_2\|u\|_p^p$$

从而存在正常数 a,ρ，使得

$$\inf_{\|u\|=\rho} J(u) > a$$

则 (i) 得证.

根据条件(f_1) 和(f_3)，存在 $C_3, C_4 > 0$，使得

$$F(x,\ t) \geqslant C_3 t^4 - C_4 t^2 \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

对 $\forall u \in E$，$t \geqslant 0$，通过引理 1，我们得出

$$J(tu) = \frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u|^2 + V(x)u^2 - \omega\phi_{tu}u^2)\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^3} F(x,\ tu)\mathrm{d}x \leqslant$$
$$\frac{t^2}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{2}t^2\omega^2\int_{\mathbb{R}^3} u^2\mathrm{d}x + C_4 t^2\int_{\mathbb{R}^3} u^2\mathrm{d}x - C_3 t^4\int_{\mathbb{R}^3} u^4\mathrm{d}x$$

当 $t \to +\infty$ 时，$J(tu) \to -\infty$. 从而存在 $u_1 \in E$，$u_1 = tu$，当 t 充分大时，使得

$$\|u_1\| > \rho \qquad J(u_1) < 0$$

则 (ii) 得证.

从而存在一个$(\mathrm{PS})_c$ 序列$\{u_n\} \subset E$，使得 $J(u_n) \to c$ 和 $J'(u_n) \to 0$，且

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma}\max_{t \in [0,\ 1]} J(\gamma(t)) \qquad c \geqslant a$$

其中

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,\ 1],\ E):\ \gamma(0) = 0,\ \gamma(1) = u_1\}$$

引理 3　$(\mathrm{PS})_c$ 序列$\{u_n\}$ 在 E 中有界.

证　对于 $M > 0$，$\{u_n\} \subset E$，使得：

$$|J(u_n)| \leqslant M \qquad -\langle J'(u_n),\ u_n\rangle \leqslant o_n(1)\|u_n\|$$

则根据(4),(5) 式和条件(f_3)，有

$$4M + o_n(1)\|u_n\| \geqslant 4J(u_n) - \langle J'(u_n),\ u_n\rangle =$$
$$\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u_n|^2 + V(x)u_n^2)\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^3}\phi_{u_n}^2 u_n^2\mathrm{d}x +$$

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^3}(f(x,u_n)u_n-4F(x,u_n))\mathrm{d}x\geqslant\\&\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u_n|^2+V(x)u_n^2)\,\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^3}(f(x,u_n)u_n-4F(x,u_n))\mathrm{d}x\geqslant\\&\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n|^2+(V(x)-\sigma)u_n^2\mathrm{d}x-\left(1-\frac{\sigma}{V_0}\right)\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u_n|^2+V(x)u_n^2)\,\mathrm{d}x+\\&\left(1-\frac{\sigma}{V_0}\right)\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u_n|^2+V(x)u_n^2)\,\mathrm{d}x\geqslant\\&\left(1-\frac{\sigma}{V_0}\right)\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u_n|^2+V(x)u_n^2)\,\mathrm{d}x\geqslant\\&C_5\|u_n\|^2\end{aligned}$$

所以$\{u_n\}$在E中有界. 从而，存在子列$\{u_n\}$，$u\in E$，使得

$$u_n\rightharpoonup u\qquad x\in E,\ n\to+\infty$$

又因为$E\hookrightarrow L^s(2\leqslant s<2^*)$是紧嵌入，则

$$u_n\to u\qquad x\in L^s,\ 2\leqslant s<2^*,\ n\to\infty$$

又因为

$$\begin{aligned}\|\phi_{u_n}\|_{D^{1,2}}^2\leqslant\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla\phi_{u_n}|^2\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^3}|\phi_{u_n}u_n^2|\,\mathrm{d}x=-\omega\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{u_n}u_n^2\mathrm{d}x\leqslant\\C_6\omega\|\phi_{u_n}\|_{D^{1,2}}\|u_n\|^2\end{aligned}$$

所以$\{\phi_{u_n}\}$在$D^{1,2}$中有界. 从而存在子列$\{\phi_{u_n}\}$，$\psi\in D^{1,2}$，使得当$n\to\infty$时，$\phi_{u_n}\rightharpoonup\psi$. 根据文献[12]得

$$\psi=\phi_u\qquad\phi_{u_n}\to\phi_u$$

类似于文献[2]中引理2.7的证明，我们可得

$$J'(u_n)\to J'(u)\qquad n\to+\infty\tag{6}$$

类似于文献[9]中引理3.2的证明，我们可证得$(\mathrm{PS})_c$条件成立. 即假设条件(V_0)，(f_1)，(f_2)和(f_3)成立，$\{u_n\}\subset E$是J的有界$(\mathrm{PS})_c$序列，则$u_n\to u(x\in E,\ n\to\infty)$. 则由(6)式可得：

$$J(u_n)\to J(u)=c>0\qquad J'(u_n)\to J'(u)=0$$

从而u是方程(3)的非平凡解.

设

$$W=\{u\in E\backslash\{0\}:J'(u)=0\}$$

接下来，我们证明：存在$C>0$，使得对$\forall u\in W$，都有

$$\|u\|\geqslant C\tag{7}$$

由条件(f_1)和(f_2)，任给$\varepsilon>0$，存在$C_\varepsilon>0$，使得

$$t\,f(x,t)\leqslant\varepsilon t^2+C_\varepsilon t^p\qquad\forall t\in\mathbb{R}$$

对$\forall u\in W$，得出

$$\langle J'(u),u\rangle=\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u|^2+V(x)u^2)\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3}(2\omega+\phi_u)\phi_u u^2\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3}f(x,u)u\,\mathrm{d}x=0$$

根据引理1，可得

$$\begin{aligned}0=\|u\|^2-\int_{\mathbb{R}^3}(2\omega+\phi_u)\phi_u u^2\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3}f(x,u)u\,\mathrm{d}x\geqslant\\\|u\|^2-C_\varepsilon\|u\|_p^p\geqslant\\\|u\|^2-C_7\|u\|^p\end{aligned}$$

因为$u\neq0$，从而存在$C>0$，使得$\|u\|\geqslant C$.

引理 4　假设 u_0 是方程(3) 的基态解，则(u_0，ϕ_{u_0}) 是系统(1) 的基态解.

证　设

$$B=\{(u,\phi)\in E\times D^{1,2}:(u,\phi)\text{ 满足系统}(1),(u,\phi)\neq 0\}$$

接下来证明：若 u_0 满足 $J(u_0)=\inf\limits_{u\in W}J(u)$，则 $F(u_0,\phi_{u_0})=\inf\limits_{(u,\phi)\in B}F(u,\phi)$.

一方面，

$$F(u_0,\phi_{u_0})\geqslant\inf_{(u,\phi)\in B}F(u,\phi)$$

另一方面，$\forall(u,\phi)\in B$，由引理 1 和文献[12] 得 $\phi=\phi_u$，则

$$F(u,\phi)=F(u,\phi_u)=J(u)\geqslant J(u_0)=F(u_0,\phi_{u_0})$$

因此

$$F(u_0,\phi_{u_0})=\inf_{(u,\phi)\in B}F(u,\phi)$$

3　定理 1 的证明

设 $\alpha=\inf\limits_{u\in W}J(u)$. 我们得到一个极小化序列$\{u_n\}\subset W$，可以看成$(\mathrm{PS})_\alpha$ 序列，使得：

$$J(u_n)\to\alpha\qquad J'(u_n)=0$$

从而存在一个子列(仍然用$\{u_n\}$ 表示) 和 $u_0\in E$，使得

$$u_n\rightharpoonup u_0\qquad x\in E,\ n\to+\infty$$

根据(6) 式和 $u_n\to u$，我们得到：

$$J(u_n)\to J(u_0)=\alpha\qquad J'(u_n)\to J'(u_0)=0$$

接下来，我们证明 $\alpha>0$ 和 $u_0\neq 0$.

对于 $u_n\in W$，我们得出

$$\langle J'(u_n),u_n\rangle=\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u_n|^2+V(x)u_n^2)\mathrm{d}x-$$
$$\int_{\mathbb{R}^3}(2\omega+\phi_{un})\phi_{un}u_n^2\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3}f(x,u_n)u_n\mathrm{d}x=0\tag{8}$$

由(8) 式，我们可得

$$2\omega\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{u_n}u_n^2\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u_n|^2+V(x)u_n^2)\mathrm{d}x-$$
$$\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{u_n}^2u_n^2\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3}f(x,u_n)u_n\mathrm{d}x\tag{9}$$

由(7) 式和(9) 式，我们得出

$$J(u_n)=\frac{1}{4}\|u_n\|^2+\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{u_n}^2u_n^2\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}(f(x,u_n)u_n-4F(x,u_n))\mathrm{d}x\geqslant$$
$$\frac{1}{4}\|u_n\|^2\geqslant\frac{1}{4}C>0$$

从而 $\alpha>0$. 所以我们得出 $u_0\neq 0$，因此 $u_0\in W$，故 u_0 是方程(3) 的基态解. 根据引理 4，(u_0，ϕ_{u_0}) 是系统(1) 的基态解. 所以定理 1 得证.

参考文献：

[1]　BENCI V, FORTUNATO D. Solitary Waves of the Nonlinear Klein-Gordon Equation Coupled with the Maxwell Equations [J]. Rev Math Phys, 2002, 14(4): 409－420.

[2]　AZZOLLINI A, POMPONIO A. Ground State Solutions for the Nonlinear Klein-Gordon-Maxwell Equations [J]. Topol Methods Nonlinear Anal, 2010, 35(1): 33－42.

[3] D'APRILE T, MUGNAI D. Solitary Waves for Nonlinear Klein-Gordon-Maxwell and Schrödinger-Maxwell Equations [J]. Proc Roy Soc Edinburgh Sect, 2004, 134(5): 893-906.

[4] D'APRILE T, MUGNAI D. Non-Existence Results for the Coupled Klein-Gordon-Maxwell Equations [J]. Adv Nonlinear Stud, 2004, 4(3): 307-322.

[5] WANG F. Ground-State Solutions for the Electrostatic Nonlinear Klein-Gordon-Maxwell System [J]. Nonlinear Anal, 2011, 74: 4796-4803.

[6] CHEN S J, SONG S Z. Multiple Solutions for Nonhomogeneous Klein-Gordon-Maxwell Equations on $\mathbb{R}^3$ [J]. Nonlinear Anal Real World Appl, 2015, 22: 259-271.

[7] HE X. Multiplicity of Solutions for a Nonlinear Klein-Gordon-Maxwell System [J]. Acta Appl Math, 2014, 130(1): 237-250.

[8] DING L, LI L. Infinitely Many Standing Wave Solutions for the Nonlinear Klein-Gordon-Maxwell System with Sign-Changing Potential [J]. Comput Math Appl, 2014, 68(5): 589-595.

[9] LI L, TANG C L. Infinitely Many Solutions for a Nonlinear Klein-Gordon-Maxwell System [J]. Nonlinear Anal, 2014, 110(3): 157-169.

[10] 赵荣胜,唐春雷. 一类 Kirchhoff 型方程解的多重性 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2015, 37(2): 60-63.

[11] WILLEM M. Minimax Theorems [M]. Boston: Birkhäuser, 1996.

[12] CASSANI D. Existence and Non-Existence of Solitary Waves for the Critical Klein-Gordon Equation Coupled with Maxwell's Equations [J]. Nonlinear Anal, 2004, 58(7-8): 733-747.

Ground State Solutions for the Klein-Gordon-Maxwell System

ZHANG Xun, TANG Chun-lei

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: In this article, we study a class of the nonlinear Klein-Gordon-Maxwell system with potential function V. With the variational method, the existence of its ground state solutions is obtained.

Key words: Klein-Gordon-Maxwell system; potential function; ground state solution; variational method

责任编辑 廖 坤