第 39 卷第 4 期　　西南大学学报(自然科学版)　　2017 年 4 月
Vol. 39　No. 4　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Apr.　2017

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2017.04.013

多值 α-g-ψ 逼近压缩映象在 b-矩度量空间中的最佳逼近点定理[①]

令狐云龙

重庆广播电视大学 经贸学院 财经系，重庆 402160

摘要：在 b-矩度量空间中引进了多值 α-g-ψ 逼近压缩映象，并证明了该映象在 b-矩度量空间中最佳逼近点的存在性. 该结果推广和改进了近期的相关结果.

关　键　词：b-矩度量空间；多值 α-g-ψ 逼近压缩映象；最佳逼近点

中图分类号：**O177.91**　　**文献标志码**：**A**　　**文章编号**：1673-9868(2017)04-0082-07

2012 年，Samet 等介绍了 α-ψ 压缩映象，并证明了该映象在完备度量空间中的不动点定理. 随后，文献[1－3]研究了广义的单值和多值 α-ψ 压缩映象，并得到了一些不动点定理. 2013 年，文献[4]定义了 α-ψ 逼近压缩映象，并证明了一些最佳逼近点定理. 文献[5－6]介绍了多值 α-ψ 逼近压缩映象，并证明了该映象在某些度量空间中的最佳逼近点定理.

度量空间已在许多研究中被推广. 1906 年，文献[7]给出了度量空间的定义后，文献[8]提到了 b-度量空间的定义，并证明了该空间的最佳逼近点定理. 2000 年，文献[9]用四角不等式代替三角不等式，定义了广义(矩)度量空间. 2015 年，文献[10－11]给出了 b-矩度量空间的定义，并证明了该空间的一些公共不动点定理.

本文将文献[5]中的多值 α-ψ 逼近压缩映象推广为多值 α-g-ψ 逼近压缩映象，并引入到文献[10]的 b-矩度量空间中，证明了该映象在此空间中的最佳逼近点的存在性.

1　预备知识

定义 1[10]　设 X 是一非空集合，$s \geqslant 1$ 为常实数，映射 $d: X \times X \longrightarrow [0, \infty)$，若对于任意的 $x, y \in X$，不同的 $u, v \in X \backslash \{x, y\}$，满足：

(i) $d(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$；

(iii) $d(y, x) = d(x, y)$；

(v) $d(x, y) \leqslant s[d(x, u) + d(u, v) + d(v, y)]$.

则称 d 是 X 的 b-矩度量，称 (X, d) 是带有常数 s 的 b-矩度量空间.

设 (X, d) 是度量空间，$A, B \subset X$. 本文记：

$$\mathrm{dist}(A, B) = \inf\{d(a, b): a \in A, b \in B\}$$

$$D(x, B) = \inf\{d(x, b): b \in B\}$$

$$A_0 = \{a \in A: \text{对于某个 } b \in B, d(a, b) = \mathrm{dist}(A, B)\}$$

---

① 收稿日期：2016-02-02

基金项目：国家自然科学基金项目(11226228).

作者简介：令狐云龙(1963-)，男，重庆大足人，副教授，主要从事非线性泛函分析的研究.

$$B_0=\{b\in B:\text{对于某个 } a\in A,\ d(a,b)=\mathrm{dist}(A,B)\}$$

$2^X\backslash\varnothing$ 为 X 的所有非空子集，$CL(X)$ 为 X 的所有非空闭子集，$K(X)$ 为 X 的所有非空紧子集. 对于任意的 $A,B\subset CL(X)$，令

$$H(A,B)=\begin{cases}\max\{\sup\limits_{x\in A}d(x,B),\ \sup\limits_{y\in B}d(y,A)\} & \text{若最大值存在}\\ 0 & \text{否则}\end{cases}$$

映象 H 称为由 d 诱导的广义 Hausdorff 度量[5].

定义 2[5] 设多值映象 $T:A\longrightarrow 2^B\backslash\varnothing$，若存在 $x^*\in A_0$，使得 $D(x^*,Tx^*)=\mathrm{dist}(A,B)$，则称 x^* 为 T 的最佳逼近点. 显然，当 $A=B$ 时，最佳逼近点即为 T 的不动点[3].

定义 3 本文用 Ψ 表示所有满足以下条件的映射 $\psi:[0,\infty)\longrightarrow[0,\infty)$ 的集合：

(a) ψ 单调非减；

(b) 对于任意的 $t>0$ 和某常数 $s>1$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}s^n\psi^n(t)<\infty$.

定义 4[5] 设(A,B)是度量空间(X,d)的一对非空子集，且 $A_0\neq\varnothing$. 对于任意的 $x_1,x_2\in A$ 和 $y_1,y_2\in B$，

$$\begin{cases}d(x_1,y_1)=\mathrm{dist}(A,B)\\ d(x_2,y_2)=\mathrm{dist}(A,B)\end{cases}$$

可推出

$$d(x_1,x_2)\leqslant d(y_1,y_2)$$

则称(A,B)具有弱 P -性质.

定义 5 设 A,B 是度量空间(X,d)的非空子集，非自映象 $T:A\longrightarrow 2^B\backslash\varnothing$，自映象 $g:A\longrightarrow A$，$\alpha:A\times A\longrightarrow[0,\infty)$，对于 $x_1,x_2,u_1,u_2\in A$ 以及 $y_1\in T(gx_1)$，$y_2\in T(gx_2)$，

$$\begin{cases}\alpha(gx_1,gx_2)\geqslant 1\\ d(gu_1,y_1)=\mathrm{dist}(A,B)\\ d(gu_2,y_2)=\mathrm{dist}(A,B)\end{cases}$$

可推出

$$\alpha(gu_1,gu_2)\geqslant 1$$

则称映象 T 是 $\alpha-g$ 逼近相容的.

定义 6 设 A,B 是度量空间(X,d)的非空子集，非自映象 $T:A\longrightarrow CL(B)$，自映象 $g:A\longrightarrow A$，$\alpha:A\times A\longrightarrow[0,\infty)$. 若对于任意的 $x,y\in A$，有

$$\alpha(gx,gy)H(Tgx,Tgy)\leqslant\psi(d(gx,gy))$$

则称映象 T 是 $\alpha-g-\psi$ 逼近压缩的.

定义 7[5] 设$\{x_n\}\subseteq A$，若对于任意的 n，$\alpha(x_n,x_{n+1})\geqslant 1$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$，存在子序列$\{x_{n_k}\}\subseteq\{x_n\}$，使得对于任意的 k，$\alpha(x_{n_k},x)\geqslant 1$ 成立，则称 A 具有(C)性质.

引理 1[12] 设(X,d)是度量空间，$B\in CL(X)$，那么对于 $x\in X$ 且 $D(x,B)>0$，存在恰当的 $q>1$ 以及 $b\in B$，使得

$$d(x,b)<qD(x,B)$$

2 主要结果

定理 1 设 A,B 是完备 b -矩度量空间(X,d)的非空闭子集，$\alpha:A\times A\longrightarrow[0,\infty)$，$\psi\in\Psi$ 是严格递增的. 非自映象 $T:A\longrightarrow CL(B)$ 和自映象 $g:A\longrightarrow A$，满足以下条件：

(i) $T(A_0)\subset B_0$，$A_0\subset g(A)$，(A,B)具有弱 P -性质；

(ii) 映象 T 是 $\alpha-g$ 逼近相容的；

(iii) 存在 $x_0,x_1,x_2\in A_0$ 和 $y_1\in T(gx_0)$，$y_2\in T(gx_1)$，使得：

$$\begin{cases} d(gx_1, y_1)=\operatorname{dist}(A, B) & \alpha(gx_o, gx_1)\geqslant 1 \\ d(gx_2, y_2)=\operatorname{dist}(A, B) & \alpha(gx_1, gx_2)\geqslant 1, \alpha(gx_o, gx_2)\geqslant 1 \end{cases}$$

(iv) 映象 T 是连续 $\alpha-g-\psi$ 逼近压缩的；

(v) 对于常数 $q',q''>1$，$B\in CL(X)$ 以及 $x,y\in X$ 且 $D(x, B)>0$，$D(y, B)>0$，存在 $b\in B$，使得：

$$d(x, b)<q'D(x, B) \qquad d(y, b)<q''D(x, B)$$

则存在 $x^*\in A_0$，使得 $D(gx^*, Tgx^*)=\operatorname{dist}(A, B)$.

证　首先，由条件 (iii)，可知存在 $x_0,x_1\in A_0$ 和 $y_1\in T(gx_0)$，使得

$$d(gx_1, y_1)=\operatorname{dist}(A, B) \qquad \alpha(gx_o, gx_1)\geqslant 1 \tag{1}$$

假设 $y_1\notin T(gx_1)$，否则 x_1 即为最佳逼近点. 因为 T 是 $\alpha-g-\psi$ 逼近压缩的，所以

$$\begin{aligned} 0<D(y_1, T(gx_1))\leqslant H(T(gx_0), T(gx_1))\leqslant \\ \alpha(gx_o, gx_1)H(T(gx_0), T(gx_1))\leqslant \\ \psi(d(gx_0, gx_1)) \end{aligned} \tag{2}$$

对于 $y_2\in T(gx_1)$，由引理 1，存在某个 $q>1$，使得

$$0<d(y_1, y_2)\leqslant qD(y_1, T(gx_1)) \tag{3}$$

由(2) 和(3) 式，可得

$$0<d(y_1, y_2)\leqslant qD(y_1, T(gx_1))\leqslant q\psi(d(gx_0, gx_1)) \tag{4}$$

其次，由条件 (iii)，可知存在 $x_2\in A_0$，使得

$$d(y_2, gx_2)=\operatorname{dist}(A, B) \tag{5}$$

由(1),(5) 和(4) 式，以及(A, B)具有弱 P-性质，可得

$$d(gx_1, gx_2)<d(y_1, y_2)\leqslant q\psi(d(gx_0, gx_1)) \tag{6}$$

由于 $\psi\in\Psi$ 是严格递增的，所以

$$\psi(d(gx_1, gx_2))<\psi(q\psi(d(gx_0, gx_1)))$$

记

$$q_1'=\psi(q\psi(d(gx_0, gx_1)))/\psi(d(gx_1, gx_2)) \tag{7}$$

由条件 (iii)，可得

$$d(y_2, gx_2)=\operatorname{dist}(A, B) \qquad \alpha(gx_1, gx_2)\geqslant 1, \alpha(gx_o, gx_2)\geqslant 1 \tag{8}$$

重复上述步骤. 一方面，假设 $y_1,y_2\notin T(gx_2)$，由 T 是 $\alpha-g-\psi$ 逼近压缩的，所以

$$\begin{aligned} 0<D(y_2, T(gx_2))\leqslant H(T(gx_1), T(gx_2))\leqslant \\ \alpha(gx_1, gx_2)H(T(gx_1), T(gx_2))\leqslant \\ \psi(d(gx_1, gx_2)) \end{aligned} \tag{9}$$

和

$$\begin{aligned} 0<D(y_1, T(gx_2))\leqslant H(T(gx_0), T(gx_2))\leqslant \\ \alpha(gx_0, gx_2)H(T(gx_0), T(gx_2))\leqslant \\ \psi(d(gx_0, gx_2)) \end{aligned} \tag{10}$$

成立. 对于 $y_1,y_2\notin T(gx_2)$ 以及 $q_1',q>1$，由条件 (v)，存在 $y_3\in T(gx_2)$ 和 q_1，使得：

$$\begin{cases} 0<d(y_2, y_3)\leqslant q_1'D(y_2, T(gx_2)) \\ 0<d(y_1, y_3)\leqslant qD(y_1, T(gx_2)) \end{cases} \tag{11}$$

由(9),(10) 和(11) 式，可得

$$\begin{cases} 0<d(y_2, y_3)\leqslant q_1'D(y_2, T(gx_2))\leqslant q_1'\psi(d(gx_1, gx_2))=\psi(q\psi(d(gx_0, gx_1))) \\ 0<d(y_1, y_3)\leqslant qD(y_1, T(gx_2))\leqslant q\psi(d(gx_0, gx_2)) \end{cases} \tag{12}$$

另一方面，因为 $y_3\in T(gx_2)\subseteq B_0$ 且 $A_0\subset g(A)$，所以存在 $x_3\neq x_2$ 且 $gx_3\in A_0$，使得

$$d(y_3, gx_3)=\operatorname{dist}(A, B) \tag{13}$$

由(1),(8),(13)和(12)式，以及(A, B)具有弱 P -性质，可得：

$$\begin{cases} d(gx_2, gx_3) < d(y_2, y_3) \leqslant \psi(q\psi(d(gx_0, gx_1))) \\ d(gx_1, gx_3) < d(y_1, y_3) \leqslant q\psi(d(gx_0, gx_2)) \end{cases} \tag{14}$$

由 ψ 是严格递增的，可得

$$\psi(d(gx_2, gx_3)) \leqslant \psi^2(q\psi(d(x_0, gx_1)))$$

$$\psi(d(gx_1, gx_3)) \leqslant \psi(q\psi(d(x_0, gx_2)))$$

因此，记：

$$\begin{cases} q_2' = \psi^2(q\psi(d(gx_0, gx_1)))/\psi(d(gx_2, gx_3)) > 1 \\ q_1'' = \psi(q\psi(d(gx_0, gx_2)))/\psi(d(gx_1, gx_3)) > 1 \end{cases} \tag{15}$$

由(1),(8)和(13)式，以及 T 是$\alpha - g$ 逼近相容的，可得

$$d(y_3, gx_3) = \mathrm{dist}(A, B) \qquad \alpha(gx_2, gx_3) \geqslant 1, \alpha(gx_1, gx_3) \geqslant 1 \tag{16}$$

依次重复下去，可得序列$\{gx_n\} \subseteq A_0$ 和$\{y_n\} \subseteq B_0$，其中 $y_n \in T(gx_{n-1})$，使得：

$$d(y_{n+1}, gx_{n+1}) = \mathrm{dist}(A, B) \qquad \alpha(gx_n, gx_{n+1}) \geqslant 1, \alpha(gx_{n-1}, gx_{n+1}) \geqslant 1 \tag{17}$$

$$\begin{cases} d(y_{n+1}, y_{n+2}) < \psi^n(q\psi(d(gx_0, gx_1))) \\ d(y_n, y_{n+2}) < \psi^{n-1}(q\psi(d(gx_0, gx_2))) \end{cases} \tag{18}$$

成立. 因为 $y_{n+2} \in T(gx_{n+1}) \subseteq B_0$ 且 $A_0 \subset g(A)$，所以存在 $x_{n+2} \neq x_{n+1}$ 且 $gx_{n+2} \in A_0$，使得

$$d(y_{n+2}, gx_{n+2}) = \mathrm{dist}(A, B) \tag{19}$$

由(17),(19)和(18)式，以及(A, B)具有弱 P -性质，可得：

$$\begin{cases} d(gx_{n+1}, gx_{n+2}) < d(y_{n+1}, y_{n+2}) \leqslant \psi^n(q\psi(d(gx_0, gx_1))) \\ d(gx_n, gx_{n+2}) < d(y_n, y_{n+2}) \leqslant \psi^{n-1}(q\psi(d(gx_0, gx_2))) \end{cases} \tag{20}$$

下一步，证明序列$\{gx_n\} \subseteq A_0$ 和$\{y_n\} \subseteq B_0$ 为柯西列. 对于 $d(y_n, y_{n+p})$，分为 $p = 2m + 1$，$p = 2m$ 两种情况证明

$$\lim_{n \to \infty} d(y_n, y_{n+p}) = 0$$

当 $p = 2m + 1$ 时，由 b -矩度量空间的定义以及(18)式，有

$$\begin{aligned} d(y_n, y_{n+2m+1}) < {} & s[d(y_n, y_{n+1}) + d(y_{n+1}, y_{n+2}) + d(y_{n+2}, y_{n+2m+1})] < \\ & sd(y_n, y_{n+1}) + sd(y_{n+1}, y_{n+2}) + \\ & s^2[d(y_{n+2}, y_{n+3}) + d(y_{n+3}, y_{n+4}) + d(y_{n+4}, y_{n+2m+1})] < \\ & sd(y_n, y_{n+1}) + sd(y_{n+1}, y_{n+2}) + s^2 d(y_{n+2}, y_{n+3}) + \cdots + \\ & s^m[d(y_{n+2m-2}, y_{n+2m-1}) + d(y_{n+2m-1}, y_{n+2m}) + d(y_{n+2m}, y_{n+2m+1})] = \\ & \sum_{i=1}^{m} s^i[d(y_{n+2i-2}, y_{n+2i-1}) + d(y_{n+2i-1}, y_{n+2i})] + s^m d(y_{n+2m}, y_{n+2m+1}) < \\ & \sum_{i=1}^{m} s^i \psi^{n+2i-3}(q\psi(d(gx_0, gx_1))) + \sum_{i=1}^{m} s^i \psi^{n+i-2}(q\psi(d(gx_0, gx_1))) + \\ & s^m \psi^{n+2m-1}(q\psi(d(gx_0, gx_1))) \end{aligned} \tag{21}$$

当 $p = 2m$ 时，可得

$$\begin{aligned} d(y_n, y_{n+2m+1}) < {} & s[d(y_n, y_{n+1}) + d(y_{n+1}, y_{n+2}) + d(y_{n+2}, y_{n+2m})] < \\ & sd(y_n, y_{n+1}) + sd(y_{n+1}, y_{n+2}) + \\ & s^2[d(y_{n+2}, y_{n+3}) + d(y_{n+3}, y_{n+4}) + d(y_{n+4}, y_{n+2m})] < \\ & sd(y_n, y_{n+1}) + sd(y_{n+1}, y_{n+2}) + s^2 d(y_{n+2}, y_{n+3}) + \cdots + \\ & s^{m-1}[d(y_{n+2m-4}, y_{n+2m-3}) + d(y_{n+2m-3}, y_{n+2m-2}) + d(y_{n+2m-2}, y_{n+2m})] = \\ & \sum_{i=1}^{m-1} s^i[d(y_{n+2i-2}, y_{n+2i-1}) + d(y_{n+2i-1}, y_{n+2i})] + s^{m-1} d(y_{n+2m-2}, y_{n+2m}) < \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{m-1} s^i\psi^{n+2i-3}(q\psi(d(gx_0, gx_1)))+\sum_{i=1}^{m-1} s^i\psi^{n+i-2}(q\psi(d(gx_0, gx_1)))+$$

$$s^{m-1}\psi^{n+2m-3}(q\psi(d(gx_0, gx_2))) \tag{22}$$

由 $\psi\in\Psi$ 以及 $\sum_{n=1}^{\infty} s^n\psi^n(t)<\infty$，可得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m} s^i\psi^{n+2i-3}(q\psi(d(gx_0, gx_1)))<\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m} s^{n+2i-3}\psi^{n+2i-3}(q\psi(d(gx_0, gx_1)))=0 \tag{23}$$

因此，由(21)，(22)和(23)式可得，在 $p=2m+1$，$p=2m$ 两种情况下，均有 $\lim_{n\to\infty} d(y_n, y_{n+p})=0$ 成立.

综上所述，$\{y_n\}\subseteq B_0$ 为柯西列. 由(20)式，易知 $\{gx_n\}\subseteq A_0$ 也是柯西列. 因为 A，B 是完备 b-矩度量空间 (X, d) 的闭子集，所以存在 $x'\in A$ 和 $y^*\in B$，使得：

$$\lim_{n\to\infty} gx_n=x' \qquad \lim_{n\to\infty} y_n=y^*$$

在(19)式中，令 $n\to\infty$，可得

$$d(y^*, x')=\mathrm{dist}(A, B)$$

所以 $x'\in A_0$，再由 $A_0\subset g(A)$，所以存在 $x^*\in A$，使得 $gx^*=x'$. 这说明存在 $x'x^*\in A$，$y^*\in B$，使得：

$$\lim_{n\to\infty} gx_n=gx^*=x' \qquad \lim_{n\to\infty} y_n=y^*$$

且

$$d(y^*, x')=d(y^*, gx^*)=\mathrm{dist}(A, B)$$

由条件 (iv) 中 T 是连续的和 $y_n\in T(gx_{n-1})$，可得 $y^*\in T(gx^*)$. 故

$$\mathrm{dist}(A, B)\leqslant D(gx^*, T(gx^*))\leqslant d(gx^*, y^*)=\mathrm{dist}(A, B)$$

所以

$$D(gx^*, T(gx^*))=\mathrm{dist}(A, B)$$

即映象 T 存在最佳逼近点.

定理 2　设 A，B 是完备 b-矩度量空间 (X, d) 的非空闭子集，$\alpha: A\times A\longrightarrow[0, \infty)$，$\psi\in\Psi$ 是严格递增的. 非自映象 $T: A\longrightarrow CL(B)$ 和自映象 $g: A\longrightarrow A$，满足以下条件：

(i) $T(A_0)\subset B_0$，$A_0\subset g(A)$，(A, B) 具有弱 P-性质；

(ii) 映象 T 是 $\alpha-g$ 逼近相容的；

(iii) 存在 $x_0, x_1, x_2\in A_0$ 和 $y_1\in T(gx_0)$，$y_2\in T(gx_1)$，使得

$$\begin{cases} d(gx_1, y_1)=\mathrm{dist}(A, B) & \alpha(gx_o, gx_1)\geqslant 1 \\ d(gx_2, y_2)=\mathrm{dist}(A, B) & \alpha(gx_1, gx_2)\geqslant 1,\ \alpha(gx_o, gx_2)\geqslant 1 \end{cases}$$

(iv) A 具有(C)性质且映象 T 是 $\alpha-g-\psi$ 逼近压缩的；

(v) 对于常数 $q', q''>1$，$B\in CL(X)$ 以及 $x, y\in X$ 且 $D(x, B)>0$，$D(y, B)>0$，存在 $b\in B$，使得：

$$d(x, b)<q'D(x, B) \qquad d(y, b)<q''D(x, B)$$

则存在 $x^*\in A_0$，使得

$$D(gx^*, Tgx^*)=\mathrm{dist}(A, B)$$

证　同定理 1，可证得存在 $x', x^*\in A$，$y^*\in B$，使得：

$$\lim_{n\to\infty} gx_n=gx^*=x' \qquad \lim_{n\to\infty} y_n=y^*$$

且

$$d(y^*, x')=d(y^*, gx^*)=\mathrm{dist}(A, B)$$

由条件 (iv) 中的性质(C)，存在子列 $\{gx_{n_k}\}\subseteq\{gx_n\}$，使得对于任意的 k，$\alpha(gx_{n_k}, gx^*)\geqslant 1$ 成立. 由于 T 是 $\alpha-g-\psi$ 逼近压缩的，则对任意的 k，有

$$H(T(gx_{n_k}), Tgx^*)\leqslant\alpha(gx_{n_k}, gx^*)H(T(gx_{n_k}), Tgx^*)\leqslant$$

$$\psi(d(gx_{n_k}, gx^*)) \tag{24}$$

在(24)式中，令 $n \to \infty$，可得

$$\lim_{n\to\infty} T(gx_{n_k}) = T(gx^*)$$

由度量 d 的连续性，可得

$$d(gx^*, y^*) = \lim_{k\to\infty} d(gx_{n_k}, y_{n_k}) = \mathrm{dist}(A, B) \tag{25}$$

因为

$$y_{n_k+1} \in T(gx_{n_k})$$

且：

$$\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = y^* \qquad \lim_{k\to\infty} T(gx_{n_k}) = Tgx^*$$

所以 $y^* \in Tgx^*$，故

$$\mathrm{dist}(A, B) \leqslant D(gx^*, T(gx^*)) \leqslant d(gx^*, y^*) = \mathrm{dist}(A, B)$$

所以

$$D(gx^*, T(gx^*)) = \mathrm{dist}(A, B)$$

即映象 T 存在最佳逼近点.

推论 1 设 A,B 是完备 b-矩度量空间 (X, d) 的非空闭子集，$\alpha: A\times A \longrightarrow [0, \infty)$，$\psi \in \Psi$ 是严格递增的. 非自映象 $T: A \longrightarrow B$ 和自映象 $g: A \longrightarrow A$，满足以下条件：

(i) $T(A_0) \subset B_0$，$A_0 \subset g(A)$，(A, B) 具有弱 P-性质；

(ii) 映象 T 是 α-g 逼近相容的；

(iii) 存在 $x_0, x_1, x_2 \in A_0$ 和 $y_1 = T(gx_0)$，$y_2 = T(gx_1)$，使得：

$$\begin{cases} d(gx_1, y_1) = \mathrm{dist}(A, B) & \alpha(gx_o, gx_1) \geqslant 1 \\ d(gx_2, y_2) = \mathrm{dist}(A, B) & \alpha(gx_1, gx_2) \geqslant 1,\ \alpha(gx_o, gx_2) \geqslant 1 \end{cases}$$

(iv) 映象 T 是连续 α-g-ψ 逼近压缩的.

则存在 $x^* \in A_0$，使得

$$d(gx^*, Tgx^*) = \mathrm{dist}(A, B)$$

推论 2 设 A,B 是完备 b-矩度量空间 (X, d) 的非空闭子集，$\alpha: A\times A \longrightarrow [0, \infty)$，$\psi \in \Psi$ 是严格递增的. 非自映象 $T: A \longrightarrow B$ 和自映象 $g: A \longrightarrow A$，满足以下条件：

(i) $T(A_0) \subset B_0$，$A_0 \subset g(A)$，(A, B) 具有弱 P-性质；

(ii) 映象 T 是 α-g 逼近相容的；

(iii) 存在 $x_0, x_1, x_2 \in A_0$ 和 $y_1 = T(gx_0)$，$y_2 = T(gx_1)$，使得：

$$\begin{cases} d(gx_1, y_1) = \mathrm{dist}(A, B) & \alpha(gx_o, gx_1) \geqslant 1 \\ d(gx_2, y_2) = \mathrm{dist}(A, B) & \alpha(gx_1, gx_2) \geqslant 1,\ \alpha(gx_o, gx_2) \geqslant 1 \end{cases}$$

(iv) A 具有(C)性质且映象 T 是 α-g-ψ 逼近压缩的.

则存在 $x^* \in A_0$，使得

$$d(gx^*, Tgx^*) = \mathrm{dist}(A, B)$$

参考文献：

[1] GABELEH M. Best Proximity Points for Weak Proximal Contractions [J]. Bulletin des Sciences Mathématiques，2015，38(1)：143－154.

[2] AMIRI P，REZAPOUR S，SHAHZAD N. Fixed Points of Generalized α-ψ-Contractions [J]. Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas，2014，108(2)：519－526.

[3] CHOUDHURY B S，METIYA N，BANDYOPADHYAY C. Fixed Points of Multivalued α-Admissible Mappings and Stability of Fixed Point Sets in Metric Spaces [J]. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo，2015，64(1)：43－55.

[4] JLELI M，SAMET B. Best Proximity Points for α-ψ-Proximal Contractive Type Mappings and Applications [J]. Bulletin des Sciences Mathématiques，2013，137(8)：977－995.

[5] USMAN A M, TAYYAB K, NASEER S. Best Proximity Point for α-ψ-Proximal Contractive Multimaps [J]. Abstract and Applied Analysis, 2014, 2014: 1—6.

[6] NANTADILOK J. Coupled Best Proximity Point Theorems for α-ψ-Proximal Contractive Multimaps [J]. Fixed Point Theorems and Applications, 2015, 2015: 1—30.

[7] FRÉCHET M M. Sur Quelques Points du Calcul Fonctionnel [J]. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1906, 22(1): 1—74.

[8] PLEBANIAK R. On Best Proximity Point for Set-Valued Contractions of Nadler Type with Respect to b-Generalized Pseudodistances in b-Metric Spaces [J]. Fixed Point Theorems and Applications, 2014, 2014: 1—13.

[9] BRANCIARI A. A Fixed Point Theorem of Banach-Caccioppoli Type on a Class of Generalized Metric Spaces [J]. Publicationes Mathematicae-Debrecen, 2000, 57(1—2): 31—37.

[10] KADELBURG Z, RADENOVIC S. Pata-Type Common Fixed Point Results in b-Metric and b-Rectangular Metric Spaces [J]. Journal of Nonlinear Sciences and its Applications, 2015, 8(6): 944—954.

[11] ROSHAN J R, SHOBKOLAEI N, SEDGHI S. Extension of Almost Generalized Weakly Contractive Mappings in Rectangular b-Metric Spaces and Fixed Point Results [J]. Acta Mathematica Scientia, 2016, 2016(5): 1643—1654.

[12] QUANITA K, USMAN A M, TAYYAB K. Exitence of Best Proximity Point for Controlled Proximal Contraction [J]. Fixed Point Theorems and Applications, 2015, 2015: 1—9.

Best Proximity Point Theorems for $\alpha-g-\psi$-Proximity Contractive Multimaps in b-Rectangular Metric Spaces

LINGHU Yun-long

Department of Finance and Economics, College of Economics and Trade, Chongqing TV and Radio University, Chongqing 402160, China

Abstract: In this paper, we introduce the notion of $\alpha-g-\psi$ proximity contractive multimaps and obtain some best proximity point theorems for it in b-rectangular metric spaces. These results improve and extend some related results that have been published recently.

Key words: b-rectangular metric space; $\alpha-g-\psi$ proximity contractive multimap; best proximity point

责任编辑　廖　坤