

含参集值强向量均衡问题近似解的连续性^①

熊昀暄¹, 陈剑尘²

1. 南昌工学院 基础教学部, 南昌 330108; 2. 南昌航空大学 数学与信息科学学院, 南昌 330063

摘要: 研究了含参集值向量均衡问题近似解解集的连续性. 通过提出严格近似 C 包含性质, 在不需要解映射信息的条件下, 得到了近似解解集的下半连续性, 并在一定条件下得到了解集的上半连续性, 从而解集是连续的.

关键词: 参数集值强向量均衡问题; 近似解; 连续性

中图分类号: O224

文献标志码: A

文章编号: 1673-9868(2017)04-0089-06

向量均衡问题已被许多学者研究, 其中包含向量优化问题、不动点问题、变分不等式问题、向量相补问题、鞍点问题等许多问题, 而且在经济领域有着广泛的应用. 向量均衡问题解的稳定性是一个重要的研究课题. 解的稳定性的研究包括研究解映射的下半连续性、上半连续性、连续性、Lipschitz 连续性以及 Hölder 连续性等. 近些年来, 许多学者对均衡问题、含参均衡问题解的连续性进行了较为广泛的研究^[1-9].

向量均衡模型通常是在对实际问题做出简化假设的基础上建立的, 模型反映往往与实际存在问题误差, 因此得到的往往是实际问题的近似解, 并且在计算过程中, 数值算法通常产生的也是该问题的近似解. 故对近似解的研究具有一定的现实意义. 目前, 已有一些学者对含参均衡问题近似解的连续性进行了研究. 其中, 文献[10]研究了两种含参集值变分不等式近似解的连续性; 文献[11]对集值拟均衡问题建立了不同的近似解, 并研究了其解集的各种半连续性; 文献[12]利用标量化函数研究了单值的含参均衡问题近似解的连续性; 文献[13]利用文献[12]的方法研究了集值含参均衡问题近似解的连续性; 文献[14]同样利用标量化的方法研究了集值的含参弱向量均衡问题近似解的连续性; 文献[15]通过线性标量化函数及致密性定理研究了含参均衡问题近似解的半连续性.

基于文献[10-15]的启发(它们大多利用标量化的方法处理近似解的连续性), 本文既不需要利用标量化函数及致密性定理, 也不需要单调性的假设, 而是利用关键假设的方法, 研究了强向量集值均衡问题近似解解集的连续性.

1 预备知识

设 X 和 Y 为 Hausdorff 拓扑线性空间, Λ 和 Γ 为 Hausdorff 拓扑空间, C 为 Y 中的闭凸点锥, $K: \Lambda \longrightarrow 2^X$ 与 $F: X \times X \times \Gamma \longrightarrow 2^Y$ 都为集值映射.

含参集值强向量均衡问题(PSSVEP)如下:

① 收稿日期: 2015-12-16

基金项目: 国家自然科学基金项目(11061023); 江西省自然科学基金项目(2010GZS0176).

作者简介: 熊昀暄(1984-), 男, 江西南昌人, 讲师, 主要从事向量优化、向量均衡理论的研究.

$\forall (\lambda, u) \in (\Lambda, \Gamma)$, 找到 $\bar{x} \in X$, 使得 $\bar{x} \in K(\lambda)$, $F(\bar{x}, y, u) \subset C (\forall y \in K(\lambda))$. 其解集记为 $S(\lambda, u)$.

ϵ -含参集值强向量均衡问题(ϵ -PSSVEP) 如下:

$\forall (\lambda, u) \in (\Lambda, \Gamma)$, 找到 $\bar{x} \in X$, 使得 $\bar{x} \in K(\lambda)$, $F(\bar{x}, y, u) + \epsilon \subset C (\forall y \in K(\lambda))$. 其对应的近似解集记为 $S(\epsilon, \lambda, u)$. 显然有 $S(0, \lambda, u) = S(\lambda, u)$.

定义 1^[16] 设 X, Y 为拓扑线性空间, $F: X \longrightarrow 2^Y$ 是集值映射.

(i) 令 $x \in X$, 若对 Y 中的任意开集 O , 有 $F(x) \subset O$, 且存在 x 的开邻域 $N(x) \subset X$, 使得对 $\forall x' \in N(x)$, 有 $F(x') \subset O$, 则称 F 在 x 处是上半连续的;

(ii) 令 $x \in X$, 若对 Y 中的任意开集 O , 有 $F(x) \cap O \neq \emptyset$, 存在 x 的开邻域 $N(x) \subset X$, 使得对 $\forall x' \in N(x)$, 有 $F(x') \cap O \neq \emptyset$, 则称 F 在 x 处是下半连续的;

(iii) 若 F 既是下半连续的又是上半连续的, 则称 F 在 $x \in X$ 点处是连续的.

引理 1^[17] 设 X, Y 为拓扑线性空间, $F: X \longrightarrow 2^Y$ 是集值映射.

(i) 若 $F(x)$ 是紧集, F 在 $x \in X$ 处是上半连续的当且仅当对于 X 中任意的网 $\{x_a\}$, $x_a \rightarrow x$, Y 中任意的网 $\{y_a\}$, $y_a \in F(x_a)$, 均存在 $y \in F(x)$ 和 $\{y_a\}$ 的一个子网 $\{y_\beta\}$, 使得 $y_\beta \rightarrow y$;

(ii) F 在 $x \in X$ 处是下半连续的当且仅当 $\forall y \in F(x)$, 对于 X 中的任意网 $\{x_a\}$, $x_a \rightarrow x$, 均存在 Y 中的网 $\{y_a\}$, $y_a \in F(x_a)$, 使得 $y_a \rightarrow y$.

2 ϵ -PSSVEP 解集的下半连续性

在本节中, 我们主要讨论 ϵ -PSSVEP 的近似解集 $S(\epsilon, \lambda, u)$ 的下半连续性.

定义 2 设 X 为 Hausdorff 拓扑空间, Y 为 Hausdorff 拓扑线性空间, C 为 Y 中的锥, $\forall \epsilon \in Y$, 若 $\forall x_a \rightarrow x_0$, $\forall \epsilon_a \rightarrow \epsilon$, $H(x_0) + \epsilon \subset C$, 存在 $\bar{a}$, 满足 $H(x_{\bar{a}}) + \epsilon_{\bar{a}} \subset C$, 则称 H 在 x_0 处具有严格近似 C 包含性质.

定理 1 设 X 为 Hausdorff 拓扑线性空间, 对 $\forall (\epsilon, \lambda, u) \in (Y, \Lambda, \Gamma)$, 若有:

(i) $K(\cdot)$ 在 Λ 上是连续的, 且具有紧值;

(ii) $F(\cdot, \cdot, \cdot)$ 在 $X \times X \times \Gamma$ 上是上半连续的;

(iii) $\forall \bar{x} \in S(\epsilon, \lambda, u)$, $\forall y \in K(\lambda)$, $F(\bar{x}, y, u) + \epsilon \subset \text{int } C$.

则 $S(\epsilon, \lambda, u)$ 是下半连续的.

证 假设 $S(\epsilon, \lambda, u)$ 不是下半连续的, 于是存在 $x_0 \in S(\epsilon, \lambda, u)$, $(\epsilon_a, \lambda_a, u_a) \rightarrow (\epsilon, \lambda, u)$, 对 $\forall x_a \in S(\epsilon_a, \lambda_a, u_a)$, 有 $x_a \not\rightarrow x_0$.

因为 $K(\cdot)$ 是下半连续的, 所以存在网 $\{\bar{x}_a\} \in K(\lambda_a)$, 则 $\bar{x}_a \rightarrow x_0$.

由上述假设知, 存在子网 $\{\bar{x}_\beta\} \subset \{\bar{x}_a\}$, 使得 $\bar{x}_\beta \rightarrow x_0$, 且 $\bar{x}_\beta \notin S(\epsilon_\beta, \lambda_\beta, u_\beta)$. 于是存在 $y_\beta \in K(\lambda_\beta)$, 使得

$$F(\bar{x}_\beta, y_\beta, u_\beta) + \epsilon_\beta \not\subset C \quad (1)$$

因为 $K(\cdot)$ 在 Λ 上是上半连续的, 且具有紧值, 于是存在 $y_0 \in K(\lambda)$, 使得 $y_\beta \rightarrow y_0$ (如有必要可取子网). 又由条件 (iii), 对于 $x_0 \in S(\epsilon, \lambda, u)$, $y_0 \in K(\lambda)$, 有

$$F(x_0, y_0, u) + \epsilon \subset \text{int } C$$

因为 $\text{int } C$ 是开集, 且 $F(\cdot, \cdot, \cdot)$ 是上半连续的, 所以存在 β_0 , 对 $\forall \beta \geq \beta_0$, 有

$$F(\bar{x}_\beta, y_\beta, u_\beta) + \epsilon_\beta \subset \text{int } C$$

成立, 这与 (1) 式矛盾. 所以结论成立.

下面给出例子说明条件 (iii) 是必要的:

例 1 令 $X=Y=\mathbb{R}$, $\Lambda \equiv \Gamma=[0, 1]$, $C=\mathbb{R}_+$, $K(\lambda)=[-\lambda, 1-\lambda]$, $\epsilon=1$,

$$F(x, y, \lambda) = \{\lambda(x-y) - 1\}$$

显然定理 1 中的条件 (i) 与条件 (ii) 成立. 当 $\epsilon=1$ 时, 计算

$$S_\epsilon(\lambda) = S_1(\lambda) = \begin{cases} [0, 1] & \lambda = 0 \\ \{1-\lambda\} & \lambda \neq 0 \end{cases}$$

此时, 显然 $S_1(\lambda)$ 在 $\lambda=0$ 处不是下半连续的. 于是 $S(\cdot, \cdot, \cdot)$ 在 (Y, Λ, Γ) 处不是下半连续的. 通过计算可以知道

$$F(x, y, 0) + \epsilon = 0 \notin \text{int } C$$

不满足条件 (iii).

因此, 在定理 1 中条件 (iii) 是必要的, 不可或缺的.

注 1 通过例 1 可以发现, 条件 (iii) 不能去掉, 但条件 (ii) 与条件 (iii) 可以被严格近似 C 包含性质所代替. 在定理 1 的条件 (iii) 中包含了解集的信息, 下面定理 2 在关键假设——严格近似 C 包含性质的条件下, 就有效避免了条件中解集信息的出现.

定理 2 设 X 为 Hausdorff 拓扑线性空间, 对 $\forall (\epsilon, \lambda, u) \in (Y, \Lambda, \Gamma)$, 若有:

(i) $K(\cdot)$ 在 Λ 上是连续的, 且具有紧值;

(ii) $F(\cdot, \cdot, \cdot)$ 在 $X \times X \times \Gamma$ 上具有严格近似 C 包含性质.

则 $S(\epsilon, \lambda, u)$ 是下半连续的.

证 假设 $S(\epsilon, \lambda, u)$ 不是下半连续的, 于是存在 $x_0 \in S(\epsilon, \lambda, u)$, 存在 $(\epsilon_\alpha, \lambda_\alpha, u_\alpha) \rightarrow (\epsilon, \lambda, u)$, 对 $\forall x_\alpha \in S(\epsilon_\alpha, \lambda_\alpha, u_\alpha)$, 有 $x_\alpha \not\rightarrow x_0$.

因为 $K(\cdot)$ 是下半连续的, 所以存在 $\{\overline{x_\alpha}\} \in K(\lambda_\alpha)$, 则 $\overline{x_\alpha} \rightarrow x_0$.

由上述的假设知, 存在子网 $\{\overline{x_\beta}\} \subset \{\overline{x_\alpha}\}$, 使得 $\overline{x_\beta} \rightarrow x_0$, 且 $\overline{x_\beta} \notin S(\epsilon_\beta, \lambda_\beta, u_\beta)$. 于是存在 $y_\beta \in K(\lambda_\beta)$, 使得

$$F(\overline{x_\beta}, y_\beta, u_\beta) + \epsilon_\beta \not\subset C \quad (2)$$

又因为 $K(\cdot)$ 在 Λ 上是上半连续的, 且具有紧值, 于是存在 $y_0 \in K(\lambda)$, 使得 $y_\beta \rightarrow y_0$ (如有必要可取子网). 因为 $x_0 \in S(\epsilon, \lambda, u)$, 所以有

$$F(x_0, y, u) + \epsilon \subset C$$

由条件 (ii), 存在 $\overline{\beta}$, 使得

$$F(\overline{x_\beta}, y_\beta, u_\beta) + \epsilon_\beta \subset C$$

这与 (2) 式矛盾, 所以结论成立.

下面给出例子说明定理 2 中条件 (ii) 也是必要的:

例 2 令 $X=Y=\mathbb{R}$, $\Lambda \equiv \Gamma=[0, 1]$, $C=\mathbb{R}_+$, $K(\lambda)=[0, 1]$, $\epsilon=\frac{1}{2}$,

$$F(x, y, \lambda) = \left[-\frac{1}{2}, \lambda + 1 \right)$$

于是当 $\lambda=0$ 时,

$$F(x, y, 0) = \left[-\frac{1}{2}, 1 \right)$$

易知 F 在 $(x, y, 0)$ 处不是上半连续的. 事实上, 可取开集

$$(-1, 1) \supset \left[-\frac{1}{2}, 1 \right) = F(x, y, 0)$$

对于任意的 $(x, y, 0)$ 邻域 N , $F(N) \subset (-1, 1)$ 不一定成立. 于是 F 在 $(x, y, 0)$ 处不是上半连续的,

且有

$$F(x, y, 0) + \epsilon = \left[0, \frac{3}{2}\right) \not\subset \text{int } C$$

则定理 1 中的条件 (iii) 不满足. 而显然定理 2 中的条件 (ii) 是成立的.

通过计算有 $S_\epsilon(\lambda) = S_{\frac{1}{2}}(\lambda) = [0, 1]$, 显然关于参数 λ 的解集是下半连续的.

在例 2 中, 定理 1 是不可用的, 但定理 2 可用.

3 ϵ -PSSVEP 解集的上半连续性

在本节中, 我们主要讨论 ϵ -PSSVEP 的近似解集 $S(\epsilon, \lambda, u)$ 的上半连续性.

定理 3 设 X 为 Hausdorff 拓扑线性空间, 对于 $\forall (\epsilon, \lambda, u) \in (Y, \Lambda, \Gamma)$, 若有:

- (i) $K(\cdot)$ 在 Λ 上是连续的, 且具有紧值;
- (ii) $F(\cdot, \cdot, \cdot)$ 在 $X \times X \times \Gamma$ 上是下半连续的.

则:

(I) $S(\epsilon, \lambda, u)$ 是上半连续的;

(II) $S(\lambda, u)$ 是闭集.

证 (I) 若 $S(\epsilon, \lambda, u)$ 不是上半连续的, 则存在 $S(\epsilon, \lambda, u)$ 的零元邻域 O , 满足 $S(\epsilon, \lambda, u) \subset O$, 使得对 $\forall (\epsilon_a, \lambda_a, u_a) \rightarrow (\epsilon, \lambda, u)$, 都有 $S(\epsilon_a, \lambda_a, u_a) \not\subset O$, 即存在 $x_a \in S(\epsilon_a, \lambda_a, u_a)$, 使得

$$x_a \notin O \quad (3)$$

由 $x_a \in S(\epsilon_a, \lambda_a, u_a)$, 有:

$$x_a \in K(\lambda_a) \quad (4)$$

$$F(x_a, y_a, u_a) + \epsilon_a \subset C \quad \forall y_a \in K(\lambda_a) \quad (5)$$

由(4)式及 K 是上半连续的且具有紧值, 利用引理 1 有 $x_a \rightarrow x_0 \in K(\lambda)$ (如有必要可取子网).

下面证明 $x_0 \in S(\epsilon, \lambda, u)$. 事实上, 若 $x_0 \notin S(\epsilon, \lambda, u)$, 则存在 $y_0 \in K(\lambda)$, 使得

$$F(x_0, y_0, u) + \epsilon \not\subset C$$

于是存在 $z_0 \in F(x_0, y_0, u)$, 使得

$$z_0 + \epsilon \notin C \quad (6)$$

由于 K 是下半连续的且 $y_0 \in K(\lambda)$, 故存在 $\overline{y_a} \in K(\lambda_a)$, 使得 $\overline{y_a} \rightarrow y_0$.

由(5)式, 对于上述的 $\overline{y_a} \in K(\lambda_a)$, 有

$$F(x_a, \overline{y_a}, u_a) + \epsilon_a \subset C$$

又因为 F 是下半连续的且 $z_0 \in F(x_0, y_0, u)$, 故存在 $z_a \in F(x_a, \overline{y_a}, u_a)$, 使得 $z_a \rightarrow z_0$.

那么 $z_a + \epsilon_a \in C$. 由 C 是闭的, 且 $z_a + \epsilon_a \rightarrow z_0 + \epsilon$, 于是有 $z_0 + \epsilon \in C$. 与(6)式矛盾! 所以

$$x_0 \in S(\epsilon, \lambda, u)$$

又由 $S(\epsilon, \lambda, u) \subset O$ 与 $x_0 \in S(\epsilon, \lambda, u)$ 成立, 故有 $x_0 \in O$, 与(3)式矛盾.

故 $S(\epsilon, \lambda, u)$ 是上半连续的.

(II) 设 $x_a \in S(\lambda, u)$, 于是有:

$$x_a \in K(\lambda) \quad (7)$$

$$F(x_a, y_a, u_a) \subset C \quad \forall y_a \in K(\lambda_a) \quad (8)$$

设 $x_a \rightarrow x_0$. 由(7)式及 K 是上半连续的且具有紧值, 故有 $x_0 \in K(\lambda)$.

对 $\forall y_0 \in K(\lambda)$, 由 K 是下半连续的, 故存在 $y'_a \in K(\lambda)$, 使得 $y'_a \rightarrow y_0$.

对 $\forall z \in F(x_0, y_0, u)$, 由 F 是下半连续的, 故存在 $z_a \in F(x_a, y'_a, u_a)$, 使得 $z_a \rightarrow z$.

由(8)式得, $z_a \in C$. 利用 C 的闭性有 $z \in C$. 于是有

$$F(x_0, y_0, u) \subset C \quad \forall y_0 \in K(\lambda)$$

故有 $x_0 \in S(\lambda, u)$, 即得 $S(\lambda, u)$ 是闭集.

4 ϵ -PSSVEP 解集的连续性

综合得到 ϵ -PSSVEP 的近似解集 $S(\epsilon, \lambda, u)$ 的连续性.

定理 4 设 X 为 Hausdorff 拓扑线性空间, 对于 $\forall (\epsilon, \lambda, u) \in (Y, \Lambda, \Gamma)$, 若有:

- (i) $K(\cdot)$ 在 Λ 是连续的, 且具有紧值;
- (ii) $F(\cdot, \cdot, \cdot)$ 在 $X \times X \times \Gamma$ 上是连续的;
- (iii) $\forall \bar{x} \in S(\epsilon, \lambda, u), \forall y \in K(\lambda, x), F(\bar{x}, y, u) + \epsilon \subset \text{int } C$.

则 $S(\epsilon, \lambda, u)$ 是连续的.

证 综合定理 1、定理 3 可得.

定理 5 设 X 为 Hausdorff 拓扑线性空间, 对于 $\forall (\epsilon, \lambda, u) \in (Y, \Lambda, \Gamma)$, 若有:

- (i) $K(\cdot)$ 在 Λ 上是连续的, 且具有紧值;
- (ii) $F(\cdot, \cdot, \cdot)$ 在 $X \times X \times \Gamma$ 上是下半连续的;
- (iii) $F(\cdot, \cdot, \cdot)$ 在 $X \times X \times \Gamma$ 上具有严格近似 C 包含性质.

则 $S(\epsilon, \lambda, u)$ 是连续的.

证 综合定理 2、定理 3 可得.

参考文献:

- [1] CHENG Y H, ZHU D L. Global Stability Results for the Weak Vector Variational Inequality [J]. Journal of Global Optimization, 2005, 32(4): 543—550.
- [2] HUANG N J, LI J, THOMPSON H B. Stability for Parametric Implicit Vector Equilibrium Problems [J]. Mathematical and Computer Modelling, 2006, 43(11): 1267—1274.
- [3] GONG X H. Continuity of the Solution Set to Parametric Weak Vector Equilibrium Problems [J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2008, 139(1): 35—46.
- [4] GONG X H, YAO J C. Lower Semicontinuity of the Set of Efficient Solutions for Generalized Systems [J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2008, 138(2): 197—205.
- [5] ANH L Q, KHANH P Q. On the Stability of the Solution Sets of General Multivalued Vector Quasiequilibrium Problems [J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2007, 135(2): 271—284.
- [6] LI S J, FANG Z M. Lower Semicontinuity of the Solution Mappings to a Parametric Generalized Ky Fan Inequality [J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2010, 147(3): 507—515.
- [7] LI S J, LIU H M, ZHANG Y, et al. Continuity of the Solution Mappings to Parametric Generalized Strong Vector Equilibrium Problems [J]. Journal of Global Optimization, 2013, 55(3): 597—610.
- [8] CHEN B, HUANG N J. Continuity of the Solution Mapping to Parametric Generalized Vector Equilibrium Problems [J]. Journal of Global Optimization, 2013, 56(4): 1515—1528.
- [9] 岳瑞雪, 陈荣波, 高 英. 变分不等式的解与非光滑向量优化问题拟近似解的关系 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2016, 38(1): 98—102.
- [10] ANH L Q, KHANH P Q. Semicontinuity of the Approximate Solution Sets of Multivalued Quasiequilibrium Problems [J]. Numerical Functional Analysis and Optimization, 2008, 29(1—2): 24—42.
- [11] ANH L Q, KHANH P Q. Continuity of Solution Maps of Parametric Quasiequilibrium Problems [J]. Journal of Global Optimization, 2010, 46(2): 247—259.
- [12] LI X B, LI S J. Continuity of Approximate Solution Mappings for Parametric Equilibrium Problems [J]. Journal of Glob-

- al Optimization, 2011, 51: 541—548.
- [13] PENG Z Y, ZHAO Y, YANG X M. Semicontinuity of Approximate Solution Mappings to Parametric Set-Valued Weak Vector Equilibrium Problems [J]. Numerical Functional Analysis and Optimization, 2015, 36(4): 481—500.
- [14] WANGKEEREE R, BOONMAN P, PREECHASIL P. Lower Semicontinuity of Approximate Solution Mappings for Parametric Generalized Vector Equilibrium Problems [J]. Journal of Inequalities and Application, 2014(1): 421—430.
- [15] HAN Y, HUANG N J. Some Characterizations of the Approximate Solutions to Generalized Vector Equilibrium Problems [J]. Journal of Industrial and Management Optimization, 2016, 12(3): 1135—1151.
- [16] AUBIN J P, EKLAND I. Applied Nonlinear Analysis [M]. New York: John Wiley and Sons, 1984.
- [17] FERRO F. A Minimax Theorem for Vector-Valued Functions [J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1989, 60(1): 19—31.

On Continuity of the Approximate Solution Sets for Parametric Set-Valued Strong Vector Equilibrium Problems

XIONG Yun-xuan¹, CHEN Jian-chen²

1. Basic Teaching Department, Nanchang Institute of Science & Technology, Nanchang 330108, China;

2. College of Mathematics and Information Science, Nanchang Hangkong University, Nanchang 330063, China

Abstract: This paper studies the continuity of approximate solution sets for parametric set-valued strong vector equilibrium problems. By the strict approximate C-inclusion property, the lower-semicontinuity is obtained without any information of the solution mappings, and the upper-semicontinuity of approximate solution sets is obtained in some suitable condition. Thus the continuity of the solution sets is proved.

Key words: parametric set-valued strong vector equilibrium problem; approximate solution; continuity

责任编辑 廖 坤

