

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2017.04.025

# 分数阶 $RL_\alpha - C_\beta$ 并联谐振<sup>①</sup>

王廷江

西南大学 荣昌校区基础部, 重庆 荣昌 402460

**摘要:** 分析了分数阶  $RL_\alpha - C_\beta$  并联谐振的基本特性, 推导出谐振频率、品质因数、导纳和阻抗、相位及支路电流的表达式并进行了简化处理. 对相频特性、阻抗模幅频特性及支路电流幅频特性进行了仿真分析, 得到一些基本结论. 采用电感和电容的等效分数阶电路模型, 设计了实现该系统的仿真电路, Multisim 仿真结果验证了理论分析的正确性.

**关键词:** 分数阶; 并联谐振; 品质因数; 相频特性; 幅频特性

**中图分类号:** TM131.4; TP391.9

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1673-9868(2017)04-0163-08

分数阶微积分与整数阶微积分几乎同时产生, 但因其复杂性、实际应用背景缺乏等原因而发展缓慢, 直到 Mandelbort<sup>[1]</sup> 指出在自然界及诸多技术领域中存在大量分维数的事实, 才逐步引起关注. 由于分数阶微积分积累了函数在一定范围内的整体信息, 具有良好的“记忆”和“遗传”特性, 所建系统的数学模型能更准确地反映其物理本质, 所以近年来在诸多领域有很好应用, 由分数阶电感和电容构成的网络的研究就是其中之一, 研究十分活跃<sup>[2-15]</sup>.

LC 并联谐振应用十分广泛, 是由电感和电容并联实现, 因实际电感有电阻, 便构成  $RL - C$  并联谐振. 本文将推广到分数阶, 对分数阶  $RL_\alpha - C_\beta$  并联谐振的特性和规律进行了较为系统研究和总结, 得到谐振态相关量的简易表达式; 还对谐振前后状态全貌进行了仿真分析, 发现了一些奇特现象, 如对奇数附近阶次具有高度敏感性、每跨越一个整数阶电路感性和容性出现调换现象、在部分阶次范围电路感性和容性发生突变等特性. 同时建立基于分数阶电感和电容的仿真电路, 进行 Multisim 仿真, 对理论分析进行了验证.

## 1 谐振态特性

### 1.1 谐振频率

$RL_\alpha - C_\beta$  并联电路如图 1 所示. 图中  $R, L_\alpha, C_\beta$  为电路元件,  $\alpha, \beta$  分别为电感、电容的分数阶数, 其值为:  $n - 1 < \alpha < n, m - 1 < \beta < m, n, m$  为整数.

① 收稿日期: 2015-06-06

基金项目: 西南大学实验技术研究项目(SYJ2016058); 国家自然科学基金资助项目(31201807).

作者简介: 王廷江(1969-), 男, 四川阆中人, 副教授, 硕士, 主要从事电工理论与新技术、生物电子电路、非线性电路与系统的研究.

在频率为  $\omega$  的正弦交流电源作用下, 图 1 所示电路导纳为

$$Y(j\omega, \alpha, \beta) = \left\{ \frac{R + \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\omega^\alpha L}{\left[R + \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\omega^\alpha L\right]^2 + \left[\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\omega^\alpha L\right]^2} + \cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)\omega^\beta C \right\} + j \left\{ \frac{-\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\omega^\alpha L}{\left[R + \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\omega^\alpha L\right]^2 + \left[\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\omega^\alpha L\right]^2} + \sin\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)\omega^\beta C \right\} \quad (1)$$

当(1)式虚部为零时, 电路发生谐振。

取  $\alpha = \beta$ , 且当  $\frac{CR^2}{L} \ll 1$ , 可得谐振频率

$$\omega_0 \approx \left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (2)$$

当  $\alpha = 1$  时(即整数阶),  $\omega_0 \approx \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , 这与整数阶  $RL - C$  并联谐振频率相吻合。

## 1.2 品质因数

由(1)式可得品质因数

$$Q = \frac{\left[R^2 + 2R\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\omega_0^\alpha L + \omega_0^{2\alpha} L^2\right] \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\omega_0^\alpha C}{R + \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\omega_0^\alpha L + \left[R^2 + 2R\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\omega_0^\alpha L + \omega_0^{2\alpha} L^2\right] \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\omega_0^\alpha C} \quad (3)$$

当  $\frac{CR^2}{L} \ll 1$  时, 上式可简化为

$$Q \approx \frac{\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\sqrt{\frac{CR^2}{L} + 2\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}} \quad (4)$$

当  $\alpha = 1$ , 则  $Q \approx \sqrt{\frac{L}{CR^2}}$ , 这正是整数阶  $RL - C$  并联谐振在近似处理后的品质因数。

## 1.3 谐振态导纳、阻抗

图 1 所示电路发生谐振时, 可得导纳

$$Y_0(j\omega_0, \alpha, \alpha) = \frac{1}{R} \times \left[ \frac{1 + \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\omega_0^\alpha \left(\frac{L}{R}\right)}{1 + 2\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\omega_0^\alpha \left(\frac{L}{R}\right) + \left(\omega_0^\alpha \frac{L}{R}\right)^2} + \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\omega_0^\alpha RC \right] \quad (5)$$

当  $\frac{CR^2}{L} \ll 1$  时, 上式可简化为

$$Y_0(j\omega_0, \alpha, \alpha) \approx \frac{CR}{L} + 2\sqrt{\frac{C}{L}} \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \quad (6)$$

由(6)式, 当  $\alpha = 1$ ,  $Y_0(j\omega_0, \alpha, \alpha) \approx \frac{CR}{L}$ , 这正是整数阶  $RL - C$  并联在谐振态的电导。

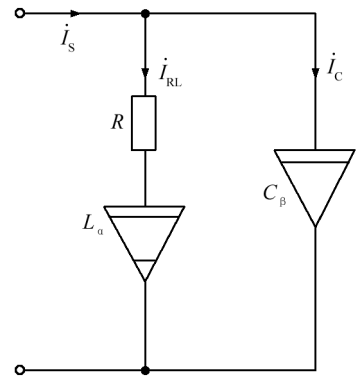


图 1  $RL_\alpha - C_\beta$  并联电路示意图

由(6)式及(4)式, 可得谐振态导纳与品质因数关系

$$Y_0(j\omega_0, \alpha, \alpha) \approx \frac{1}{Q} \times \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \sqrt{\frac{C}{L}} \quad (7)$$

由(7)式可得谐振态阻抗与品质因数的关系

$$Z_0(j\omega_0, \alpha, \alpha) \approx \frac{Q}{\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (8)$$

#### 1.4 谐振态支路电流

图 1 所示电路在有效值为  $I_s$  的正弦交流电流源作用下发生谐振,  $RL_\alpha$  支路阻抗模为

$$|Z_{0RL}(j\omega_0, \alpha, \alpha)| \approx \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (9)$$

$RL_\alpha$  支路电流为

$$I_{0RL} = \frac{I_s |Z_0(j\omega_0, \alpha, \alpha)|}{|Z_{0RL}(j\omega_0, \alpha, \alpha)|} \approx \frac{Q}{\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} I_s \quad (10)$$

同理可得  $C$  支路电流

$$I_{0C} \approx \frac{Q}{\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} I_s \quad (11)$$

由(10), (11) 式可得

$$\frac{I_{0RL}}{I_s} \approx \frac{I_{0C}}{I_s} \approx \frac{Q}{\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} \quad (12)$$

(12) 式可作为该谐振品质因数的定义式. 当  $\alpha = 1$  时,  $\frac{I_{0RL}}{I_s} \approx \frac{I_{0C}}{I_s} \approx Q$ , 与整数阶  $RL - C$  并联谐振所得结果相吻合.

## 2 相频特性

由(1)式可得相位表达式

$$\varphi(Y(j\omega, \alpha, \beta)) = \tan^{-1} \left\{ \frac{-\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \omega^\alpha L + \sin\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) \omega^\beta C \left[ R^2 + 2R \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \omega^\alpha L + (\omega^\alpha L)^2 \right]}{R + \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \omega^\alpha L + \cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) \omega^\beta C \left[ R^2 + 2R \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \omega^\alpha L + (\omega^\alpha L)^2 \right]} \right\} \quad (13)$$

取  $\alpha = \beta$ ,  $\eta = \frac{\omega}{\omega_0}$ , 并作适当变换可得

$$\varphi(Y(j\omega, \alpha, \alpha)) \approx \tan^{-1} \left[ \frac{-\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \eta^\alpha + \sqrt{\frac{CR^2}{L}} \sin(\alpha\pi) \eta^{2\alpha} + \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \eta^{3\alpha}}{\sqrt{\frac{CR^2}{L}} + \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \eta^\alpha + 2\cos^2\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \sqrt{\frac{CR^2}{L}} \eta^{2\alpha} + \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \eta^{3\alpha}} \right] \quad (14)$$

由(14)式, 取  $\sqrt{\frac{CR^2}{L}} = 0.001$ , 不同阶次范围内相频特性如图 2 所示.

由图 2 可知, 在  $\eta = 1$ ,  $\varphi(Y(j\omega, \alpha, \alpha)) \approx 0$ , 各图中  $\alpha$  分别为 0.9、1.1 时, 阶次越靠近奇数, 偏离

谐振态时电路感性(或容性)越强,各图中 $\alpha$ 分别为0.1、1.9时,越靠近偶数,偏离谐振态时电路感性(或容性)越弱.仿真还发现,每跨越一个整数阶次,偏离谐振态电路的感性和容性就发生调换;在一些阶次范围内会出现感性和容性突变情况,如图2(b)所示.通过对其他阶次范围相频特性的研究发现也有上述类似特征.

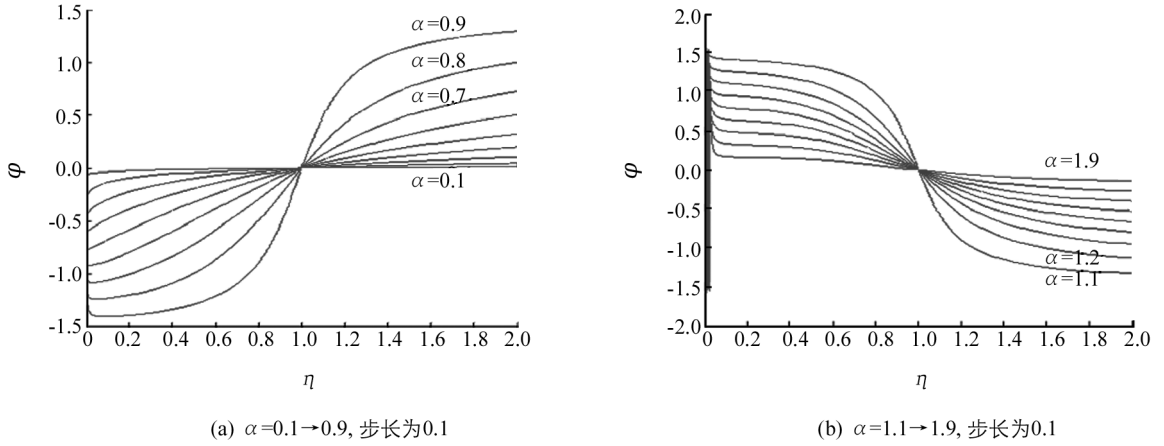


图2 不同阶次范围相频特性

### 3 阻抗模幅频特性

由(1)式可得电路导纳模

$$|Y(j\omega, \alpha, \beta)| = \left[ \frac{1 + 2R \cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) (\omega^\beta C) + 2(\omega^\alpha L) (\omega^\beta C) \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\pi}{R^2 + 2R \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) (\omega^\alpha L) + (\omega^\alpha L)^2} + (\omega^\beta C)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (15)$$

取 $\alpha = \beta$ ,  $\eta = \frac{\omega}{\omega_0}$ , 则上式变为

$$|Y(j\omega, \alpha, \alpha)| = \frac{1}{R} \times \left[ \frac{1 + 2\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \sqrt{\frac{CR^2}{L}} \eta^\alpha + 2\cos(\alpha\pi) \eta^{2\alpha}}{1 + 2\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \eta^\alpha \sqrt{\frac{L}{CR^2}} + \frac{L}{CR^2} \eta^{2\alpha}} + \frac{CR^2}{L} \eta^{2\alpha} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (16)$$

阻抗模为

$$|Z(j\omega, \alpha, \alpha)| = R \times \left[ \frac{1 + 2\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \sqrt{\frac{CR^2}{L}} \eta^\alpha + 2\cos(\alpha\pi) \eta^{2\alpha}}{1 + 2\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \eta^\alpha \sqrt{\frac{L}{CR^2}} + \frac{L}{CR^2} \eta^{2\alpha}} + \frac{CR^2}{L} \eta^{2\alpha} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (17)$$

由(17)式,当 $\alpha$ 、 $R$ 、 $\frac{CR^2}{L}$ 确定时,可作如下推断:

- 1) 当 $\eta \rightarrow 0$ ,  $|Z(j\omega, \alpha, \alpha)| \approx R$ , 电容支路相当于开路,电感、电阻支路中电感相当于短路;
- 2) 当 $\eta \rightarrow \infty$ ,  $|Z(j\omega, \alpha, \alpha)| \rightarrow 0$ , 电感、电阻支路相当于开路,电容支路相当于短路;
- 3) 当 $\eta = 1$ , 可得谐振态导纳模近似表达式

$$|Z(j\omega, \alpha, \alpha)| \approx R \times \left[ \frac{CR^2}{L} \left( 1 + 2\cos^2\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (18)$$

由(17)式, 取  $\sqrt{\frac{CR^2}{L}} = 0.001$ , 阻抗模幅频特性如图 3 所示.

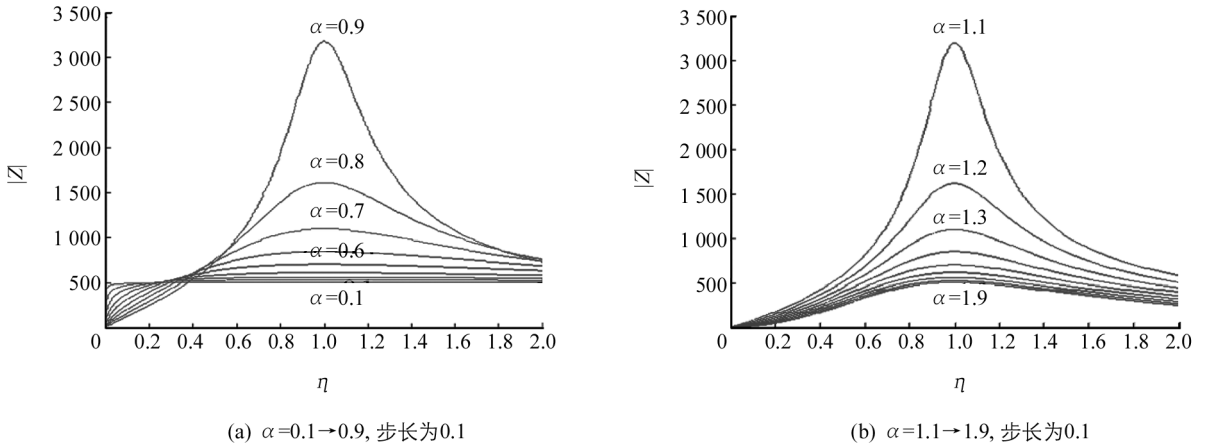


图 3 不同阶次范围阻抗模幅频特性

峰值出现在  $\eta \approx 1$  处, 阶次越靠近奇数, 峰值越大, 如各图中  $\alpha$  分别为 0.9、1.1 处峰值为最大; 越靠近偶数, 峰值越小, 甚至不出现峰值, 如各图中  $\alpha$  分别为 0.1、1.9 处, 其他阶次范围也有类似特征. 峰值随阶次  $\alpha$  的变化情况可由(18)式进行解释.

## 4 支路电流幅频特性

图 1 所示电路在正弦交流电流源(有效值为  $I_s$ , 频率为  $\omega$ ) 作用下  $RL$  支路阻抗为

$$|Z_{RL}(j\omega, \alpha, \alpha)| = R \times \left[ 1 + 2\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \omega^\alpha \left(\frac{L}{R}\right) + \omega^{2\alpha} \left(\frac{L}{R}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (19)$$

取  $\eta = \frac{\omega}{\omega_0}$ , 整理上式得:

$$|Z_{RL}(j\omega, \alpha, \alpha)| = R \times \left[ 1 + 2\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \sqrt{\frac{L}{CR^2}} \eta^\alpha + \frac{L}{CR^2} \eta^{2\alpha} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (20)$$

由  $I_{RL} = \frac{I_s |Z(j\omega, \alpha, \alpha)|}{|Z_{RL}(j\omega, \alpha, \alpha)|}$  ( $|Z(j\omega, \alpha, \alpha)|$  为电路总阻抗模) 可得:

$$\frac{I_{RL}}{I_s} = \left[ 1 + 2\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \sqrt{\frac{CR^2}{L}} \eta^\alpha + 2\cos(\alpha\pi) \eta^{2\alpha} + \frac{CR^2}{L} \eta^{2\alpha} + 2\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \sqrt{\frac{CR^2}{L}} \eta^{3\alpha} + \eta^{4\alpha} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (21)$$

同理可得关于  $C$  支路电流

$$\frac{I_C}{I_s} = \left[ 1 + \frac{\eta^{-2\alpha} + 2\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \sqrt{\frac{CR^2}{L}} \eta^{-\alpha} + 2\cos(\alpha\pi)}{\frac{CR^2}{L} + 2\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \sqrt{\frac{CR^2}{L}} \eta^\alpha + \eta^{2\alpha}} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (22)$$

由(21)、(22)式, 在  $\alpha$ 、 $\frac{CR^2}{L}$  确定时, 可作如下推断:

1) 当  $\eta \rightarrow 0$  时,  $\frac{I_{RL}}{I_s} \rightarrow 1$ ,  $\frac{I_C}{I_s} \rightarrow 0$ , 图 1 中电容支路相当于开路, 电感、电阻支路中电感相当于短路;

2) 当  $\eta \rightarrow \infty$  时,  $\frac{I_{RL}}{I_s} \rightarrow 0$ ,  $\frac{I_C}{I_s} \rightarrow 1$ , 图 1 中电容支路相当于短路, 电感、电阻支路中电感相当于开路;

由(21)、(22)式, 取  $\sqrt{\frac{CR^2}{L}} = 0.001$ ,  $\alpha = 0.1 \rightarrow 0.9$ , 步长为 0.1, 幅频特性如图 4 所示.

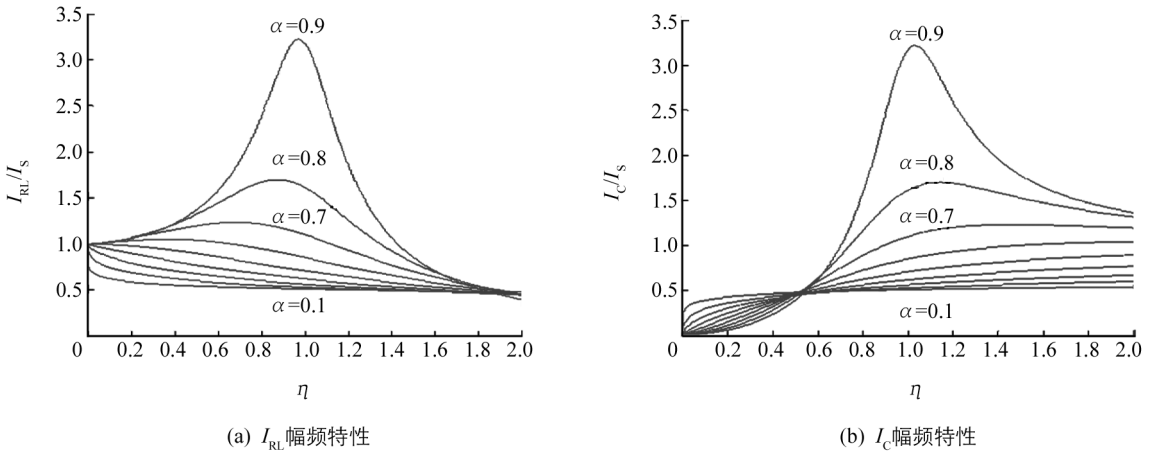


图 4 支路电流幅频特性

两支路电流的峰值均出现在  $\eta \approx 1$  处, 并且在同一阶次下, 两支路峰值电流大致相等. 阶次越靠近奇数, 峰值越大, 越靠近偶数, 峰值越小, 甚至不出现峰值, 在其他阶次范围也有类似特征.

## 5 电路仿真实验

如图 1 所示电路, 电源选择 1 mA 的正弦交流电流源, 取  $R = 0.001 \Omega$ ,  $L_a = 3 \text{ mH}$ ,  $C_\beta = 100 \mu\text{F}$ ,  $\alpha = \beta = 0.8$ , 其分数阶电感和分数阶电容的等效电路模型如图 5 所示<sup>[9]</sup>. 通过 Multisim 软件仿真出的支路电流幅频特性如图 6 所示. 将图 6 与图 4 中  $\alpha = 0.8$  对应的曲线相对比, 基本一致, 由图 6 所对应的谐振频率与(2)式所求结果对比也基本吻合, 从而验证理论分析的正确性.

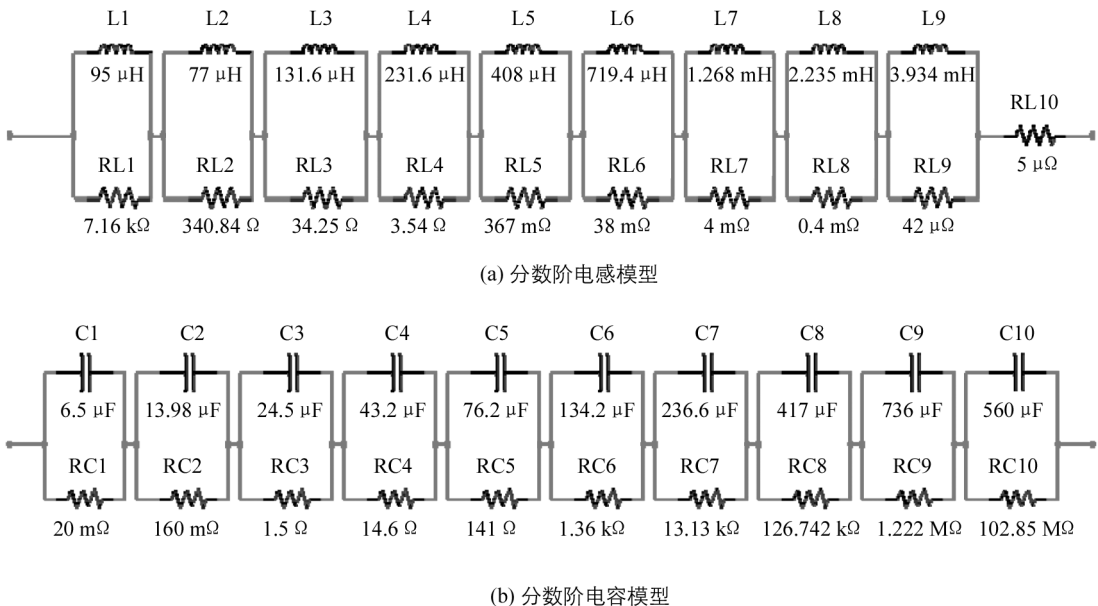


图 5 分数阶电感、电容模型

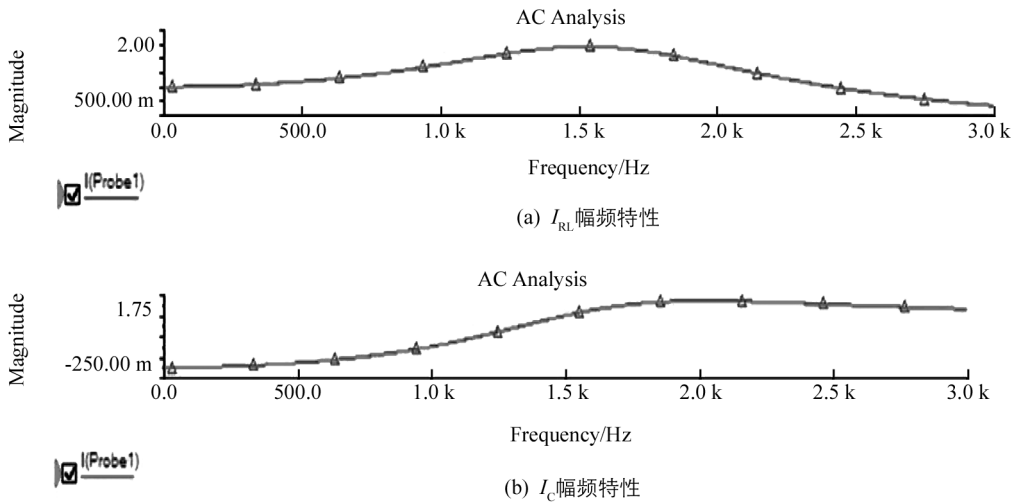


图 6 仿真实验支路电流幅频特性

## 6 结 论

通过对分数阶  $RL_\alpha - C_\beta$  并联谐振的研究, 得到了该谐振的谐振频率、品质因数、谐振态导纳与阻抗及支路电流简易表达式, 分数阶谐振更具有普遍意义, 整数阶谐振只是分数阶谐振的特例, 提出了一种定义该分数阶谐振品质因数方法. 通过对相频特性、阻抗模及支路电流的幅频特性仿真分析发现, 当电路参数不变, 对分数阶次具有高度敏感性, 特别是在偶数和奇数附近阶次有很大差异. 电路偏离谐振态的感性或容性首先取决于分数阶次所处的范围, 在同一范围内, 感性或容性强与弱, 又取决于分数阶接近奇数的程度. 还发现了一些奇特现象, 如电路感性和容性会发生突变, 以及每跨越一个整数阶, 出现感性和容性交替变化等情况, 并对这些现象进行了理论分析. 还通过建立分数阶电感和电容电路模型的仿真, 验证了理论分析的可靠性. 所得到的一系列结论, 将为进一步深入研究及推进分数阶  $RL_\alpha - C_\beta$  并联谐振的工业应用奠定了理论基础.

### 参考文献:

- [1] MANDELBORT B B. The Fractal Geometry of Nature [M]. New York: W. H. Freeman and Company, 1983.
- [2] RADWAN A G, SALAMA K N. Passive and Active Elements Using Fractional  $L_\beta C_\alpha$  Circuit [J]. IEEE Transaction on Circuit and Systems I: Regular Papers, 2011, 58(10): 2388—2397.
- [3] TENREIRO MACHADO J A, GALHANO A M S F. Fractional Order Inductive Phenomena Based on the Skin Effect [J]. NonlinDyn, 2011, 68(1): 107—115.
- [4] CHEN L, CHAI Y, WU R, ete al. Dynamic Analysis of a Class of Fractional-Order Neural Networks with Delay [J]. Neurocomputing, 2013, 111(2): 190—194.
- [5] WU R C, HEI X D, CHEN L P. Finite-Time Stability of Fractional-Order Neural Networks with Delay [J]. Communications in Theoretical Physics, 2013, 60(2): 189—193.
- [6] 马 龙, 梁贵书. 含分数阶电抗元件网络的灵敏度分析 [J]. 华北电力大学学报(自然科学版), 2013, 40(3): 6—10.
- [7] CHEN J, ZENG Z, JIANG P. Global Mittag-Leffler Stability and Synchronization of Memristor-Based Fractional-Order Neural Networks [J]. Neural Networks, 2014, 51: 1—8.
- [8] ZHANG Dong-li, TANG Ying-gan, GUAN Xin-ping. Optimum Design of Fractional Order PID Controller for a n AVR System Using an Improved Artificial Bee Colong Algorithm [J]. Acta Automatica Sinica, 2014, 40(5): 973—980.
- [9] 谭 程, 梁志珊. 电感电流伪连续模式下 Boost 变换器的分数阶建模与分析 [J]. 物理学报, 2014, 63(7): 58—67.

- [10] 闫丽梅, 祝玉松, 徐建军, 等. 基于分数阶微积分理论的线路模型建模方法 [J]. 电工技术学报, 2014, 29(9): 260—268.
- [11] 刁利杰, 张小飞, 陈帝伊. 分数阶并联  $RL_\alpha C_\beta$  电路 [J]. 物理学报, 2014, 63(3): 421—433.
- [12] 余战波. 分数阶 T 型  $L_\alpha C_\beta$  电路仿真研究 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2015, 37(2): 141—147.
- [13] ZHOU Kun, CHEN Di-yi, ZHANG Xu, et al. Fractional-Order Three-Dimensional  $\text{del} \times n$  Circuit Network [J]. IEEE Transactions on Circuit and System I-regular papers, 2015, 62(10): 2401—2410.
- [14] ZHOU Rui, ZHANG Run-fan, CHEN Di-yi. Fractional-Order  $L_\beta C_\alpha$  Low-Pass Filter Circuit [J]. Journal of Electrical Engineering & Technology, 2015, 10(4): 1597—1609.
- [15] ZHOU Rui, CHEN Di-yi, HERBERT H C. Iu. Fractional-Order  $2 \times n$  RLC Circuit Network [J]. Journal of Circuits, Systems and Computers, 2015, 24(9): 1550142.

## Fractional-Order $RL_\alpha - C_\beta$ Parallel Resonance

WANG Ting-jiang

*Department of Basic Science, Rongchang Campus, Southwest University, Rongchang, Chongqing 402460, China*

**Abstract:** By analyzing the basic characteristics of the fractional order  $RL_\alpha - C_\beta$  parallel resonance, this paper deduces and simplifies the expressions of resonant frequency, quality factor, and admittance and impedance, phase and branch current. Some basic conclusions are derived from a simulation analysis of the phase frequency characteristics, the amplitude frequency characteristics of impedance, and the amplitude frequency characteristics of branch current. On the basis of the equivalent fractional order model of inductance and capacitance, a realizing circuit is designed for the system. Multisim simulation results have verified the correctness of the theoretical analysis.

**Key words:** fractional-order; parallel resonance; quality factor; phase-frequency characteristic; amplitude-frequency characteristic

责任编辑 汤振金



