

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2017.05.018

曲边矩形和曲顶柱体区域上的温度控制^①

刘忠诚, 谢成康, 邓 静

西南大学 数学与统计学院, 重庆 400715

摘要: 主要研究了曲边矩形及曲顶柱体上温度的边界控制. 应用原有的反步控制方法, 根据相应条件导出核方程, 进而得到核方程的解和控制律, 并证明闭环系统是指数稳定的.

关键词: 高维系统; 边界控制; 反步控制方法

中图分类号: O231.2

文献标志码: A

文章编号: 1673-9868(2017)05-0120-06

反应扩散方程的边界控制问题有广泛的工程背景. 在对一维的反应扩散方程的边界控制的研究中, 最早考虑在容器的一端加控制的情况^[1-2]. 当区间的一端移动时, 在移动端加控制的情况已被解决^[3-4]. 并且对输入时滞系统的边界控制的研究也取得成功^[5]. 对高维系统的边界控制的研究, 现在只解决了矩形区域和立方体区域^[6], 以及圆形区域上温度的边界控制^[7]. 在其它高维区域上的反应扩散方程的边界控制问题尚无很好的结果. 因此本文首先考虑曲边矩形上的系统的边界控制, 即系统

$$u_t(x, y, t) = a(u_{xx}(x, y, t) + u_{yy}(x, y, t)) + \lambda u(x, y, t), (x, y) \in P \quad (1)$$

$$u(0, y) = u(l, y) = u(x, 0) = 0 \quad (2)$$

$$u(x, \varphi(x), t) = U(x, t) \quad (3)$$

其中: $a, \lambda > 0$; $\varphi(x)$ 在 $[0, l]$ 上可微; $P = \{(x, y) \mid 0 < x < l, 0 < y < \varphi(x)\}$; $u(x, y, t)$ 为温度; $U(x, t)$ 为边界控制输入. 随后考虑曲顶柱体上的系统

$$u_t(x, y, z, t) = a(u_{xx}(x, y, z, t) + u_{yy}(x, y, z, t) + u_{zz}(x, y, z, t)) + \lambda u(x, y, z, t), \text{其中 } (x, y, z) \in V \quad (4)$$

$$u(x, y, z) = 0, (x, y) \in D \quad (5)$$

$$u(x, y, 0) = 0 \quad (6)$$

$$u(x, y, f(x, y), t) = U(x, y, t) \quad (7)$$

其中: $a, \lambda > 0$; $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是有界开域; $V = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in \Omega, z \in (0, f(x, y))\}$; D 是 Ω 的边界; $f(x, y)$ 在 Ω 上连续; $u(x, y, z, t)$ 为温度; $U(x, y, t)$ 为边界控制输入.

本文利用反步控制(Backstepping)方法, 先给出一个指数稳定的目标系统, 找到边界控制将原系统转化为目标系统. 随后用李雅普诺夫方法证明目标系统是指数稳定的, 并证明在所给出的边界控制下闭环系

① 收稿日期: 2016-05-04

基金项目: 国家自然科学基金项目(11301427); 贵州省科技厅联合基金资助项目(黔科合 LH 字[2015]7007 号).

作者简介: 刘忠诚(1992-), 男, 湖北安陆人, 硕士研究生, 主要从事偏微分方程系统控制的研究.

通信作者: 谢成康, 教授.

统稳定.

1 曲边矩形上的边界控制

考虑系统(1)–(3)的控制设计. 引入变换

$$w(x, y, t) = u(x, y, t) - \int_0^y k(y, z)u(x, z, t)dz \quad (8)$$

边界控制为

$$U(x, t) = u(x, \varphi(x), t) - \int_0^{\varphi(x)} k(\varphi(x), z)u(x, z, t)dz \quad (9)$$

1.1 控制器设计

将(8)式两边同时对 t 求导, 再分别同时对 x, y 求二阶偏导数并化简, 可得

$$\begin{aligned} w_t(x, y, t) - a(w_{xx}(x, y, t) + w_{yy}(x, y, t)) = \\ (\lambda + 2a \frac{d}{dy}k(y, y))u(x, y, t) + k(y, 0)u_y(x, 0, t) + \\ \int_0^y (ak_{yy}(y, z) - ak_{zz}(y, z) - \lambda k(y, z))u(x, z, t)dz \end{aligned}$$

取核函数满足

$$k_{yy}(y, z) - k_{zz}(y, z) = \frac{\lambda}{a}k(y, z) \quad (10)$$

$$\lambda + 2a \frac{d}{dy}k(y, y) = 0 \quad (11)$$

$$k(y, 0) = 0 \quad (12)$$

得到

$$w_t(x, y, t) = a(w_{xx}(x, y, t) + w_{yy}(x, y, t))$$

此时(8)式将系统(1)–(3)转化成目标系统

$$w_t(x, y, t) = a(w_{xx}(x, y, t) + w_{yy}(x, y, t)), (x, y) \in P \quad (13)$$

$$w(0, y, t) = w(l, y, t) = w(x, 0, t) = w(x, \varphi(x), t) = 0 \quad (14)$$

文献[2]中已给出方程(10)–(12)的解为

$$k(y, z) = -\lambda z \frac{I_1\left(\sqrt{\frac{\lambda}{a}}(y^2 - z^2)\right)}{\sqrt{\frac{\lambda}{a}}(y^2 - z^2)}$$

1.2 目标系统的指数稳定性

定理 1 当 $a > 0$ 时, 系统(13)–(14)指数稳定. 即存在常数 $M, N > 0$, 使得

$$\|w(t)\|_2 \leq Me^{-Nt} \|w(0)\|_2$$

其中

$$\|w(t)\|_2 = \left(\int_0^l \int_0^{\varphi(x)} w^2(x, y, t) dy dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

1.3 逆变换及稳定性

设(8)式的逆变换为

$$u(x, y, t) = w(x, y, t) + \int_0^y l(y, z)w(x, z, t)dz$$

类似 $k(y, z)$ 的求解过程, 可解得

$$l(y, z) = -\lambda z \frac{J_1\left(\sqrt{\frac{\lambda}{a}}(y^2 - z^2)\right)}{\sqrt{\frac{\lambda}{a}}(y^2 - z^2)}$$

在边界控制(9)下, 系统(1)–(3)指数稳定.

2 曲顶柱体上的边界控制

考虑系统(4)–(7)的控制设计, 引入变换

$$w(x, y, z, t) = u(x, y, z, t) - \int_0^z p(z, s)u(x, y, s, t)ds \quad (15)$$

边界控制为

$$U(x, y, t) = u(x, y, f(x, y), t) = \int_0^{f(x, y)} p(f(x, y), s)u(x, y, s, t)ds$$

2.1 控制器设计

变换(15)两边分别对 x, y, z 求二阶偏导数, 对 t 求偏导数, 并化简, 可取核函数满足:

$$p_{zz}(z, s) - p_{ss}(z, s) = \frac{\lambda}{a}p(z, s) \quad (16)$$

$$\lambda + 2a \frac{d}{dz}p(z, z) = 0 \quad (17)$$

$$p(z, 0) = 0 \quad (18)$$

得到

$$w_t(x, y, z, t) = a(w_{xx}(x, y, z, t) + w_{yy}(x, y, z, t) + w_{zz}(x, y, z, t))$$

此时(15)式将系统(4)–(7)转换成目标系统

$$w_t(x, y, z, t) = a(w_{xx}(x, y, z, t) + w_{yy}(x, y, z, t) + w_{zz}(x, y, z, t)), (x, y, z) \in V \quad (19)$$

$$w(x, y, z, t) = 0, (x, y, z) \in \Gamma \quad (20)$$

其中 Γ 为 V 的边界.

方程(16)–(18)的解为

$$p(z, s) = -\lambda s \frac{I_1\left(\sqrt{\frac{\lambda}{a}}(z^2 - s^2)\right)}{\sqrt{\frac{\lambda}{a}}(z^2 - s^2)}$$

2.2 目标系统的指数稳定性

定理 2 目标系统(19)–(20)指数稳定, 其中

$$\|w(t)\|_2 = \left(\iiint_V w^2(x, y, z) dV\right)^{\frac{1}{2}}$$

2.3 逆变换及稳定性

记(15)式的逆变换为

$$u(x, y, z, t) = w(x, y, z, t) + \int_0^z q(z, s)w(x, y, s, t)ds \quad (21)$$

可知

$$q(z, s) = -\lambda s \frac{J_1\left(\sqrt{\frac{\lambda}{a}(z^2 - s^2)}\right)}{\sqrt{\frac{\lambda}{a}(z^2 - s^2)}}$$

下证系统(4) - (7) 指数稳定.

对(21) 式两边求范数, 得

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_2 &\leq \|w(x, y, z, t)\|_2 + \left\| \int_0^z q(z, s)w(x, y, s, t)ds \right\|_2 \\ \left\| \int_0^z q(z, s)w(x, y, s, t)ds \right\|_2^2 &= \iiint_V \left(\int_0^z q(z, s)w(x, y, s, t)ds \right)^2 dV \end{aligned}$$

由施瓦茨不等式可知

$$\left(\int_0^z q(z, s)w(x, y, s, t)ds \right)^2 \leq \int_0^{f(x, y)} q^2(z, s)ds \cdot \int_0^{f(x, y)} w^2(x, y, s, t)ds$$

由于对任意 $(x, y) \in \Omega \cup D$, $q(z, s)$ 在 $\{(z, s) \mid z \in (0, f(x, y)), s \in (0, z)\}$ 上有界, 故存在连续且在 $\Omega \cup D$ 上有界的函数 $K(x, y)$, 满足

$$\int_0^{f(x, y)} q^2(z, s)ds \leq K(x, y)$$

从而有

$$\int_0^{f(x, y)} q^2(z, s)ds \cdot \int_0^{f(x, y)} w^2(x, y, s, t)ds \leq K(x, y) \cdot \int_0^{f(x, y)} w^2(x, y, s, t)ds$$

由此可得

$$\left\| \int_0^z q(z, s)w(x, y, s, t)ds \right\|_2^2 = \iint_{\Omega} (K(x, y)f(x, y) \int_0^{f(x, y)} w^2(x, y, s, t)ds) d\Omega$$

由于 $K(x, y)$, $f(x, y)$ 在 Ω 上有界, 存在常数 $C > 0$, 满足

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} (K(x, y)f(x, y) \int_0^{f(x, y)} w^2(x, y, s, t)ds) d\Omega &\leq \\ C \iint_{\Omega} \int_0^{f(x, y)} w^2(x, y, s, t)ds d\Omega &= C \|w\|_2^2 \end{aligned}$$

从而

$$\|u\|_2 \leq (1 + \sqrt{C}) \|w\|_2$$

于是, 存在常数 $C_1 > 0$, 使得

$$\|u\|_2 \leq C_1 \|w\|_2$$

类似可证明存在常数 $C_2 > 0$, 使得

$$\|w\|_2 \leq C_2 \|u\|_2$$

从而有

$$\|u(t)\|_2 \leq C_1 \|w(t)\|_2 \leq C_1 C_2 e^{-\frac{\alpha t}{4}} \|u(0)\|_2$$

故 $u(x, y, z, t)$ 指数稳定.

3 数值仿真

考虑如下系统

$$u_t = u_{xx} + u_{yy} + 25u, (x, y) \in \{(x, y) \mid 0 < x < 1, 0 < y < \varphi(x)\}$$

$$\begin{aligned}
 u(0, y, t) &= u(1, y, t) = u(x, 0, t) = 0 \\
 u\left(x, -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1, t\right) &= U(x, t) \\
 u(x, y, 0) &= e^{x-y+1}
 \end{aligned}$$

其中

$$\varphi(x) = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1$$

当

$$U(x, t) = -\int_0^{\varphi(x)} 25z \frac{I_1(\sqrt{25(\varphi^2(x) - z^2)})}{\sqrt{25(\varphi^2(x) - z^2)}} dz$$

时, 原系统变为

$$\begin{aligned}
 w_t &= w_{xx} + w_{yy}, (x, y) \in \{(x, y) \mid 0 < x < 1, 0 < y < \varphi(x)\} \\
 w(0, y, t) &= w(1, y, t) = w(x, 0, t) = w(x, \varphi(x), t) = 0
 \end{aligned}$$

其中 $w(x, y, 0) \neq u(x, y, 0)$. 此时 $\|u\|_{\frac{2}{5}}$ 和 $\|w\|_{\frac{2}{5}}$ 与时间 t 的关系分别如下图所示:

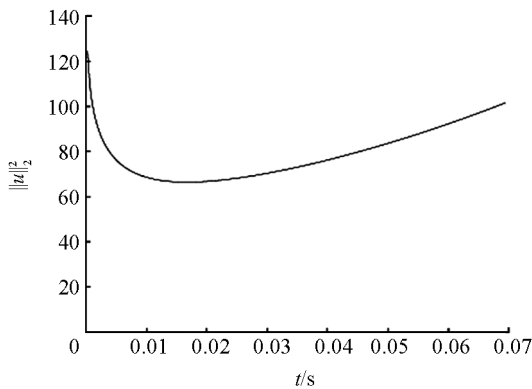


图 1 系统在开环状态下的图像

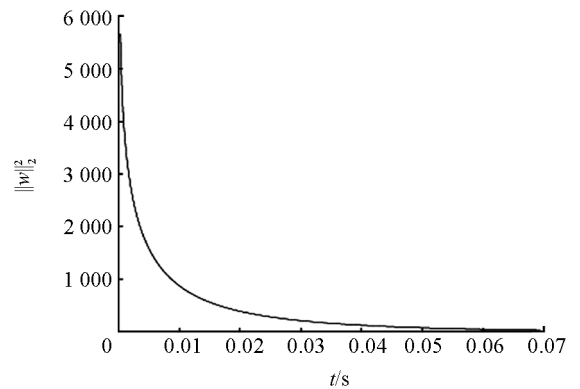


图 2 系统在闭环状态下的图像

4 结 论

本文主要研究了曲边矩形及曲顶柱体上温度的边界控制. 应用原有的反步控制方法, 根据相应条件导出核方程, 进而得到核方程的解和控制律, 并证明闭环系统是指数稳定的. 为了更好证明理论正确性, 对二维系统进行数据仿真, 实验结果与理论推导相吻合. 与已有的成果相比, 由于所施加控制的一端的形状对控制律没有影响, 因此本文扩展了原有的 Backstepping 方法的适用范围.

参考文献:

- [1] MIROSLAV K, ANDREY S. Adaptive Boundary Control for Unstable Parabolic PDEs-Part I: Lyapunov Design [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2008, 53(7): 1575-1591.
- [2] MIROSLAV K, ANDREY S. Boundary Control of PDEs: a Course on Backstepping Design [M]. Philadelphia: SIAM, 2008: 13-63.
- [3] MOJTABA I, STEVAN D. Backstepping Output-Feedback Control of Moving Boundary Parabolic PDEs [J]. European Journal of Control, 2015(21): 27-35.
- [4] E F, J L, S B D. On the Controllability of a Free-Boundary Problem for the 1D Heat Equation [J]. Systems & Control Letters, 2016(87): 29-35.

- [5] MIROSLAV K. Control of an Unstable Reaction-Diffusion PDE with Long Input Delay [J]. *System & Control Letters*, 2009, 58(11): 773–782.
- [6] ANDREY S, MIROSLAV K. Adaptive Control of Parabolic PDEs [M]. New Jersey: Princeton University Press, 2010: 52–54.
- [7] JIE Q, RAFAEL V, MIROSLAV K. Multi-Agent Deployment in 3-D via PDE Control [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2015, 60(4): 891–906.
- [8] 张渭滨. 数学物理方程 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2007: 92–93.

Temperature Control on Rectangular Curved Edges and the Curly Top Cylinder

LIU Zhong-cheng, XIE Cheng-kang, DENG Jing

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: This paper studies the temperature control on rectangular curved edges and the curly top cylinder. By applying the backstepping method, based on corresponding conditions, we derive a kernel equation and get its solution and control law, and then prove that the closed-loop system is exponentially stable.

Key words: high-dimensional system; boundary control; backstepping method

责任编辑 张 枸

