DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2017.05.019

一类耦合反应扩散系统的边界控制①

邓　静，　谢成康，　刘忠诚

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要： 利用 Backstepping 的方法对系统内部有热源的耦合线性方程组反应扩散系统进行研究，推导出了这一类耦合系统的核方程，并且证明了闭环系统的稳定性.

关　键　词： 反应扩散方程；耦合系统；边界控制

中图分类号： O231.2　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1673-9868(2017)05-0126-06

在控制工程中温度控制问题用反应扩散方程描述. 反应扩散方程的边界控制问题具有实用价值[1-3]. 在控制理论和控制工程中，耦合的例子经常见到，如电磁耦合、机械耦合、化学反应的耦合等. 对常微分方程和偏微分方程之间的耦合问题的研究已经获得若干结论[4-7]. 但是之前考虑的是常微分方程和一维的偏微分方程之间的耦合，并且得到了在不同的边界条件下的系统控制率[8-11]. 本文考虑如下控制系统：

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(0,t) \tag{1}$$

$$\boldsymbol{U}_t(x,t)=\boldsymbol{D}\boldsymbol{U}_{xx}(x,t)+\Lambda\boldsymbol{U}(x,t),\ 0<x<1 \tag{2}$$

$$\boldsymbol{U}_x(0,t)=\alpha(\boldsymbol{U}(0,t)-\boldsymbol{G}\boldsymbol{X}(t)) \tag{3}$$

$$\boldsymbol{U}(1,t)=\boldsymbol{C}(t) \tag{4}$$

其中：$\boldsymbol{X}(t)=(\boldsymbol{X}_1(t),\boldsymbol{X}_2(t),\cdots,\boldsymbol{X}_n(t))^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n$ 表示流体的温度、湿度、密度等，$\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$，$\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{n\times m}$，$\boldsymbol{D}\in\mathbb{R}^{m\times m}$，$\Lambda\in\mathbb{R}^{m\times m}$，$\boldsymbol{G}\in\mathbb{R}^{m\times n}$，$\boldsymbol{C}(t)\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 是控制输入，α 是傅立叶常数，$\boldsymbol{U}(x,t)$ 是固体的温度，$\Lambda\boldsymbol{U}(x,t)$ 是热源强度.

1　控制器的设计

为了稳定系统(1)-(4)，需找到一个变换$(\boldsymbol{X}(t),\boldsymbol{U}(x,t))\longmapsto(\boldsymbol{X}(t),\boldsymbol{W}(x,t))$，将系统(1)-(4)转换为指数稳定的目标系统，从而设计出控制律. 闭环系统的稳定性就可以通过该变换及其逆变换建立起来.

本节引入一个 Volterra 变换$(\boldsymbol{X}(t),\boldsymbol{U}(x,t))\longmapsto(\boldsymbol{X}(t),\boldsymbol{W}(x,t))$：

$$\boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{X}(t) \tag{5}$$

$$\boldsymbol{W}(x,t)=\boldsymbol{U}(x,t)-\int_0^x\boldsymbol{\Phi}(x,y)\boldsymbol{U}(y,t)\mathrm{d}y-\boldsymbol{\Psi}(x)\boldsymbol{X}(t) \tag{6}$$

目标系统取为

---

① 收稿日期：2016-05-04
基金项目：国家自然科学基金项目(11301427)；贵州省科技厅联合基金项目(黔科合 LH 字【2015】7007 号).
作者简介：邓　静(1992-)，女，四川冕宁人，硕士研究生，主要从事偏微分方程系统控制的研究.
通信作者：谢成康，教授.

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t)=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})\boldsymbol{X}(t)+\boldsymbol{BW}(0,t) \tag{7}$$

$$\boldsymbol{W}_t(x,t)=\boldsymbol{DW}_{xx}(x,t),\ 0<x<1 \tag{8}$$

$$\boldsymbol{W}_x(0,t)=\boldsymbol{0} \tag{9}$$

$$\boldsymbol{W}(1,t)=\boldsymbol{0} \tag{10}$$

其中$\boldsymbol{U}(x,t)\in\mathbb{R}^n$表示零向量. 这里核函数$\boldsymbol{\Phi}(x,y)\in\mathbb{R}^{m\times m}$和矩阵函数$\boldsymbol{\Psi}(x)\in\mathbb{R}^{m\times n}$都是待定的. 其中选择$\boldsymbol{K}\in\mathbb{R}^{m\times n}$使得$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK}$是Hurwitz矩阵. 现在假设变换(5)-(6)将系统(1)-(4)转换为目标系统(7)-(10).

$$\begin{aligned}\boldsymbol{W}_t(x,t)-\boldsymbol{DW}_{xx}(x,t)=&(\boldsymbol{D\Phi}'(x,x)+\boldsymbol{D\Phi}_x(x,x)+\boldsymbol{\Phi}(x,x)_y\boldsymbol{D}+\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{U}(x,t)+\\&(\boldsymbol{D\Phi}(x,x)-\boldsymbol{\Phi}(x,x)\boldsymbol{D})\boldsymbol{U}_x(x,t)+\\&\int_0^x(\boldsymbol{D\Phi}_{xx}(x,y)-\boldsymbol{\Phi}_{yy}(x,y)\boldsymbol{D}-\boldsymbol{\Phi}(x,y)\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{U}(y,t)\mathrm{d}y-\\&(\boldsymbol{\Phi}_y(x,0)\boldsymbol{D}+\boldsymbol{\Psi}(x)\boldsymbol{B}-\alpha\boldsymbol{\Phi}(x,0)\boldsymbol{D})\boldsymbol{U}(0,t)+\\&(\boldsymbol{D\Psi}''(x)-\boldsymbol{\Psi}(x)\boldsymbol{A}-\alpha\boldsymbol{\Phi}(x,0)\boldsymbol{DG})\boldsymbol{X}(t)\end{aligned} \tag{11}$$

可取核函数$\boldsymbol{\Phi}(x,y)$和矩阵函数$\boldsymbol{\Psi}(x)$满足下面方程:

$$\boldsymbol{D\Phi}_{xx}(x,y)-\boldsymbol{\Phi}_{yy}(x,y)\boldsymbol{D}-\boldsymbol{\Phi}(x,y)\Lambda=O \tag{12}$$

$$\boldsymbol{D\Phi}'(x,x)+\boldsymbol{D\Phi}_x(x,x)+\boldsymbol{\Phi}_y(x,x)\boldsymbol{D}+\Lambda=O \tag{13}$$

$$\boldsymbol{D\Phi}(x,x)-\boldsymbol{\Phi}(x,x)\boldsymbol{D}=O \tag{14}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_y(x,0)\boldsymbol{D}+\boldsymbol{\Psi}(x)\boldsymbol{B}-\alpha\boldsymbol{\Phi}(x,0)\boldsymbol{D}=O \tag{15}$$

$$\boldsymbol{D\Psi}''(x)-\boldsymbol{\Psi}(x)\boldsymbol{A}-\alpha\boldsymbol{\Phi}(x,0)\boldsymbol{DG}=O \tag{16}$$

就能使$\boldsymbol{W}(x,t)$满足(8)式,这里O表示零矩阵.

为了满足(10)式取控制律为:

$$\boldsymbol{C}(t)=\int_0^1\boldsymbol{\Phi}(1,y)\boldsymbol{U}(y,t)\mathrm{d}y+\boldsymbol{\Psi}(1)\boldsymbol{X}(t) \tag{17}$$

这样就得到了核函数$\boldsymbol{\Phi}(x,y)$和矩阵函数$\boldsymbol{\Psi}(x)$满足方程和边界条件:

$$\boldsymbol{D\Phi}_{xx}(x,y)-\boldsymbol{\Phi}_{yy}(x,y)\boldsymbol{D}-\boldsymbol{\Phi}(x,y)\boldsymbol{\Lambda}=O \tag{18}$$

$$\boldsymbol{D\Phi}'(x,x)+\boldsymbol{D\Phi}_x(x,x)+\boldsymbol{\Phi}_y(x,x)\boldsymbol{D}+\boldsymbol{\Lambda}=O \tag{19}$$

$$\boldsymbol{D\Phi}(x,x)-\boldsymbol{\Phi}(x,x)\boldsymbol{D}=O \tag{20}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_y(x,0)\boldsymbol{D}+\boldsymbol{\Psi}(x)\boldsymbol{B}-\alpha\boldsymbol{\Phi}(x,0)\boldsymbol{D}=O \tag{21}$$

$$\boldsymbol{D\Psi}''(x)-\boldsymbol{\Psi}(x)\boldsymbol{A}-\alpha\boldsymbol{\Phi}(x,0)\boldsymbol{DG}=O \tag{22}$$

$$\boldsymbol{\Phi}(0,0)=\alpha\boldsymbol{E} \tag{23}$$

$$\boldsymbol{\Psi}'(0)=-\alpha\boldsymbol{G} \tag{24}$$

$$\boldsymbol{\Psi}(0)=\boldsymbol{K} \tag{25}$$

上述方程组可以用数值方法求解.

2 稳定性

要得到闭环系统(1)-(4)的稳定性,就需要证明目标系统(7)-(10)是稳定的,而且变换(5)-(6)是可逆的.

证明变换可逆的方法是找到它的逆变换. 但是,从变换(6)中求解$\boldsymbol{U}(x,t)$是一个很困难的数学问题,因此直接寻求逆变换就显得更加困难. 另外一种思路就是通过下面的方法来间接证明. 假设逆变换具有下面的形式

$$\boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{X}(t) \tag{26}$$

$$\boldsymbol{U}(x, t)=\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})-\int_0^x \boldsymbol{M}(x, y)\boldsymbol{W}(y, t)\mathrm{d}y-\boldsymbol{N}(x)\boldsymbol{X}(t) \tag{27}$$

这里核函数 $\boldsymbol{M}(x, y)$ 和 $\boldsymbol{N}(x)$ 是待定的，并且在该变换下目标系统的解能转化为闭环系统的解. 按照求解核函数 $\boldsymbol{\Phi}(x, y)$ 和 $\boldsymbol{\Psi}(x)$ 的思路和方法，计算出 $\boldsymbol{U}_x$,$\boldsymbol{U}_{xx}$ 和 $\boldsymbol{U}_t$. 假设 $\boldsymbol{W}(x, y)$ 满足目标系统(7)－(10)，就得到 $\boldsymbol{U}(x, y)$ 满足(1)－(4) 的条件. 整理如下

$$\boldsymbol{DM}_{xx}(x, y)-\boldsymbol{M}_{yy}(x, y)\boldsymbol{D}+\boldsymbol{\Lambda}\,\boldsymbol{M}=O \tag{28}$$

$$\boldsymbol{DM}'(x, x)+\boldsymbol{DM}_x(x, x)+\boldsymbol{M}_y(x, x)\boldsymbol{D}-\boldsymbol{\Lambda}=O \tag{29}$$

$$\boldsymbol{DM}(x, x)-\boldsymbol{M}(x, x)\boldsymbol{D}=O \tag{30}$$

$$\boldsymbol{M}_y(x, 0)\boldsymbol{D}+\boldsymbol{N}(x)\boldsymbol{B}=O \tag{31}$$

$$\boldsymbol{DN}''(x)-\boldsymbol{N}(x)(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})+\boldsymbol{\Lambda}\,\boldsymbol{N}(x)=O \tag{32}$$

$$\boldsymbol{M}(0, 0)=-\alpha\boldsymbol{E} \tag{33}$$

$$\boldsymbol{N}'(0)=\alpha(\boldsymbol{G}-\boldsymbol{K}) \tag{34}$$

$$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{0})=-\boldsymbol{K} \tag{35}$$

只需要求解出 $\boldsymbol{M}(x, y)$ 和 $\boldsymbol{N}(x)$ 就可以求出逆变换.

定理 1　设 $\boldsymbol{\Phi}(x, y)$ 和 $\boldsymbol{\Psi}(x)$ 是(18)－(25) 的解. 考虑系统(1)－(4)，控制律为(17)，则存在正常数 σ 使得

$$\|\boldsymbol{X}(t)\|^2+\|\boldsymbol{U}(t)\|_2^2\leqslant\sigma(\|\boldsymbol{X}(0)\|^2+\|\boldsymbol{U}(0)\|_2^2)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}$$

即闭环系统在上述范数下是指数稳定的，其中

$$\|\boldsymbol{U}(t)\|_2=\left(\int_0^1\boldsymbol{U}(x, t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}(x, t)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

是 L^2 范数，$\|\cdot\|$ 表示欧几里得范数.

证　对于目标系统(7)－(10)，考虑 Lyapunov 函数

$$\boldsymbol{V}(t)=\boldsymbol{X}(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PX}(t)+a\int_0^1\boldsymbol{W}(x, t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{QW}(x, t)\mathrm{d}x \tag{36}$$

这里 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}>\boldsymbol{0}$ 是 Lyapunov 方程

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})+(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}=-\boldsymbol{I}$$

的解，$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}>\boldsymbol{0}$ 是 Lyapunov 方程

$$(-\boldsymbol{D})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{Q}(-\boldsymbol{D})=-\boldsymbol{I}$$

的解，$a>0$ 是需要被确定的参数. 首先证明存在常数 $b>0$，使得下式成立

$$\dot{\boldsymbol{V}}(t)\leqslant\boldsymbol{V}(0)\mathrm{e}^{-bt}$$

对 Lyapunov 函数(36) 两边关于 t 求导得，

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{V}}(t)=&\dot{\boldsymbol{X}}(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PX}(t)+\boldsymbol{X}(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\dot{\boldsymbol{X}}(t)+\\&a\int_0^1(\boldsymbol{W}_t(x, t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{QW}(x, t)+\boldsymbol{W}(x, t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{QW}_t(x, t))\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

再由(7)－(10) 式得

$$\dot{\boldsymbol{V}}(t)=-\|\boldsymbol{X}(t)\|^2+2(\boldsymbol{PBW}(0, t))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}(t)+a\int_0^1\boldsymbol{W}_{xx}(x, t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}(x, t)\mathrm{d}x$$

先来估计第二项，根据柯西不等式和 Young 不等式，有

$$(\boldsymbol{PBW}(0, t))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}(t)\leqslant\|\boldsymbol{PB}\|^2\|\boldsymbol{W}(0, t)\|^2+\frac{1}{4}\|\boldsymbol{X}(t)\|^2$$

这里 $\|\boldsymbol{W}(0, t)\|^2=\boldsymbol{W}(0, t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}(0, t)$.

又由 Agmon 不等式

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1}\|\boldsymbol{Z}(x,t)\|^2\leqslant\|\boldsymbol{Z}(1,t)\|^2+2\|\boldsymbol{Z}(t)\|_2\|\boldsymbol{Z}_x(t)\|_2$$

及 $\boldsymbol{W}(1,t)=\mathbf{0}$ 得

$$\|\boldsymbol{W}(0,t)\|^2\leqslant\max_{0\leqslant x\leqslant 1}\|\boldsymbol{W}(x,t)\|^2\leqslant\|\boldsymbol{W}(1,t)\|^2+2\|\boldsymbol{W}(t)\|_2\|\boldsymbol{W}_x(t)\|_2=2\|\boldsymbol{W}(t)\|_2\|\boldsymbol{W}_x(t)\|_2$$

由 Poincaré 不等式

$$\int_0^1\|\boldsymbol{Z}(x)\|^2\mathrm{d}x\leqslant 2\|\boldsymbol{Z}(1)\|^2+4\int_0^1\|\boldsymbol{Z}_x(x)\|^2\mathrm{d}x$$

及 $\boldsymbol{W}(1,t)=\mathbf{0}$ 得

$$\|\boldsymbol{W}(t)\|_2=2\|\boldsymbol{W}_x(t)\|_2 \tag{37}$$

这里

$$\|\boldsymbol{W}(x,t)\|^2=\boldsymbol{W}(x,t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}(x,t)$$

于是

$$(\boldsymbol{PBW}(0,t))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}(t)\leqslant 4\|\boldsymbol{PB}\|^2\|\boldsymbol{W}_x(t)\|_2^2+\frac{1}{4}\|\boldsymbol{X}(t)\|^2 \tag{38}$$

令

$$\boldsymbol{W}(x,t)=(w_1(x,t),w_2(x,t),\cdots,w_m(x,t))^{\mathrm{T}}$$

则 $\partial_x w_i(0,t)=w_i(1,t)=0$，$i=1,2,\cdots,m$ 且

$$\int_0^1\boldsymbol{W}_{xx}(x,t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}(x,t)\mathrm{d}x=-\|\boldsymbol{W}_x(t)\|_2^2 \tag{39}$$

由(38)－(39)式可得

$$\dot{\boldsymbol{V}}(t)\leqslant-\frac{1}{2}\|\boldsymbol{X}(t)\|^2-(a-8\|\boldsymbol{PB}\|^2)\|\boldsymbol{W}_x(t)\|_2^2$$

取

$$a=8\|\boldsymbol{PB}\|^2+\mu$$

则有

$$\dot{\boldsymbol{V}}(t)\leqslant-\frac{1}{2}\|\boldsymbol{X}(t)\|^2-\mu\|\boldsymbol{W}_x(t)\|_2^2$$

由(37)式可得

$$\dot{\boldsymbol{V}}(t)\leqslant-\frac{1}{2}\|\boldsymbol{X}(t)\|^2-\frac{\mu}{4}\|\boldsymbol{W}(t)\|_2^2$$

又由文献[12]知

$$\boldsymbol{\Lambda}\|\boldsymbol{W}(t)\|_2^2\leqslant\int_0^1\boldsymbol{W}(x,t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{QW}(x,t)\mathrm{d}x\leqslant\mu\|\boldsymbol{W}(t)\|_2^2$$

其中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 是 $\boldsymbol{Q}$ 的最小特征值，μ 是 $\boldsymbol{Q}$ 的最大特征值. 所以

$$\dot{\boldsymbol{V}}(t)\leqslant-\varepsilon\boldsymbol{V}(t)$$

其中

$$\varepsilon=\min\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4a}\right)$$

就可以得到

$$\boldsymbol{V}(t)\leqslant\boldsymbol{V}(0)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\varepsilon}}$$

现在需要建立闭环系统的范数 $\|(\boldsymbol{X}(t),\boldsymbol{U}(t))\|$ 和 $\boldsymbol{V}(t)$ 之间的关系. 从变换(6)中可以得到

$$\|\boldsymbol{W}(t)\|_2\leqslant\|\boldsymbol{U}(x,t)\|_2+\left\|\int_0^x\boldsymbol{\Phi}(x,y)\boldsymbol{U}(y,t)\mathrm{d}y\right\|_2+\|\boldsymbol{\Phi}X(t)\|_2$$

由文献[12]知

$$\left\| \int_0^x \boldsymbol{\Phi}(x, y)\boldsymbol{U}(y, t)\mathrm{d}y \right\|_2 \leqslant \zeta \| \boldsymbol{U}(y, t) \|$$

又根据 Schwartz 不等式有

$$\| \boldsymbol{\Phi} X(t) \|_2^2 = \int_0^1 \| \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{X}(t) \|^2 \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \| \boldsymbol{\Phi}(x) \|^2 \| \boldsymbol{X}(t) \|^2 \mathrm{d}x = \| \boldsymbol{\Phi} \|_2^2 \| \boldsymbol{X}(t) \|^2$$

这里

$$\| \boldsymbol{\Phi} \|_2 = \left(\int_0^1 \| \boldsymbol{\Phi}(x) \|^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}$$

因此

$$\| \boldsymbol{W}(t) \|_2 \leqslant (1+\zeta) \| \boldsymbol{U}(t) \|_2 + \| \boldsymbol{\Phi} \|_2 \| \boldsymbol{X}(t) \| \tag{40}$$

同样的方法由(27)式可以得到

$$\| \boldsymbol{U}(t) \|_2 \leqslant (1+\eta) \| \boldsymbol{W}(t) \|_2 + \| \boldsymbol{N} \|_2 \| \boldsymbol{X}(t) \| \tag{41}$$

这里

$$\| \boldsymbol{N} \|_2 = \left(\int_0^1 \| \boldsymbol{N}(x) \|^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}$$

又由(41)式可得

$$\| \boldsymbol{X}(t) \|^2 + \| \boldsymbol{U}(t) \|_2^2 \leqslant \frac{(1+2\| \boldsymbol{N} \|_2^2)}{\lambda_{\min}(\boldsymbol{P})} \boldsymbol{X}(t)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P} \boldsymbol{X}(t) + \frac{2(1+\eta)^2}{a} a \| \boldsymbol{W}(t) \|_2^2 \leqslant \gamma \boldsymbol{V}(t) \leqslant \gamma \boldsymbol{V}(\boldsymbol{0}) \mathrm{e}^{-\frac{t}{\varepsilon}} \tag{42}$$

这里

$$\gamma = \max\left\{ \frac{(1+2\| \boldsymbol{N} \|_2^2)}{\lambda_{\min}(P)}, \frac{2(1+\eta)^2}{a} \right\}$$

另一方面，根据(40)，下面式子是成立的

$$\| \boldsymbol{W}(0) \|_2 \leqslant (1+\zeta) \| \boldsymbol{U}(0) \|_2 + \| \boldsymbol{\Phi} \|_2 \| \boldsymbol{X}(0) \|$$

那么

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{0}) \delta \| (\boldsymbol{X}(0), \boldsymbol{U}(0)) \|^2 \tag{43}$$

这里

$$\delta = \max\{ \lambda_{\max}(\boldsymbol{P}) + 2a\mu \| \boldsymbol{\Phi} \|_2^2, 2a\mu(1+\zeta)^2 \}$$

因此，由(42)和(43)式，就证明了

$$\| \boldsymbol{X}(t) \|^2 + \| \boldsymbol{U}(t) \|_2^2 \leqslant \sigma (\| \boldsymbol{X}(0) \|^2 + \| \boldsymbol{U}(0) \|_2^2) \mathrm{e}^{-\frac{t}{\varepsilon}}$$

是成立的，这里 $\sigma = \gamma\delta$. 从而就证明了闭环系统是指数稳定的.

参考文献：

[1]　BEKIARIS-LIBERIS N，KRSTIC M. Compensating Distributed Effect of Diffusion and Counter-Convection in Multi-Input and Multi-Output LTI Systems [J]. IEEE Transactions on Automatic Control，2011，56(3)：637－642.

[2]　KRSTIC M，SMYSHLYAEV A. Boundary Control of PDEs：A Course on Backstepping Designs [M]. Philadelphia：SIAM，2008：1－202.

[3]　ZHANG X，ZUAZUA E. Control Observation and Polynomial Decay for a Coupled Heat-Wave System [J]. Comptes Rendus Mathematique，2003，336(10)：823－828.

[4]　TANG S，XIE C，Stabilization for Acoupled PDE-ODE System with Boundary Control [J]. Journal of the Franklin Insti-

tute, 2011, 348(1): 2142－2155.

[5] ZHANG X, ZUAZUA E. Polynomial Decay and Control of a 1-d Model for Fluid-Structure Interaction [J]. Comptes Rendus Mathematique, 2003, 336(9): 745－750.

[6] ZHANG X, ZUAZUA E. Polynomial Decay and Control of a 1-d Hyperbolic-Parabolic Coupled System [J]. Journal of Differential Equations, 2004, 204(2): 380－438.

[7] TANG S, XIE C. Stabilization for a Coupled PDE-ODE Control System [J]. Journal of the Franklin Institute, 2011, 348(8): 2142－2155.

[8] TANG S, XIE C. Stabilization for a Coupled PDE-ODE System with Boundary Control [C] //IEEE Conference on Decision and Control. New York: IEEE Press, 2011.

[9] ZHAO A, XIE C. Stabilization of a Coupled Linear Plant and Reaction-Diffusion Process [J]. Journal of the Frankin Institute, 2014, 351(2): 857－877.

[10] SUSTO G A, KRSTIC M. Control of PDE-ODE Cascades with Neumanninter Connections [J]. Journal of the Franklin Institute, 2010, 347(1): 284－314.

[11] SMYSHLYAEV A, KRSTIC M. Adaptive Control of Parabolic PDEs [M]. Princenton: Princeton University Press, 2010: 123－125.

Boundary Control of a Class of Coupled Reaction-Diffusion Systems

DENG Jing, XIE Cheng-kang, LIU Zhong-cheng

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: This paper uses the backstepping method to study a class of PDE-ODE coupled systems, the focus being placed on the reaction-diffusion system of coupled linear equations with a heat source. The existence of the kernel function is shown, and the stability of the closed loops is achieved.

Key words: reaction-diffusion equation; coupled system; boundary control

责任编辑 张 枸