第 39 卷第 6 期　　西南大学学报(自然科学版)　　2017 年 6 月
Vol. 39　No. 6　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Jun.　2017

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2017.06.001

# 有限群可解的一个充分条件①

施武杰

重庆文理学院 数学与财经学院，重庆 402160；苏州大学 数学科学学院，江苏 苏州 215006

**摘要**：证明了如下定理：设 $G$ 是有限群，$\pi_e(G)$ 是 $G$ 中元素的阶之集，如果 $\pi_e(G)\cap\{2\}=\varnothing$，或 $\pi_e(G)\cap\{3,4\}=\varnothing$，或 $\pi_e(G)\cap\{3,5\}=\varnothing$，则 $G$ 可解. 进一步，用与 $\pi_e(G)$ 的交为空集来判定 $G$ 可解，仅有上述 3 种情形.

**关　键　词**：有限群；可解性；元的阶之集

**中图分类号**：O152.1　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9868(2017)06-0001-04

设 $G$ 是有限群，群 $G$ 的阶 $|G|$ 和 $G$ 中元素的阶之集 $\pi_e(G)$ 是 $G$ 的两个最基本的数量集. 用群的阶研究群，群论史上有很多有名的工作. 而采用 $\pi_e(G)$ 研究单群最早可见文献[1]. 文献[1] 的主要结论是：

**引理 1**[1]　设 $G$ 是有限群，$\pi_e(G)=\{1,2,3,5\}$，则 $G\cong A_5$.

由文献[2]，容易得出如下结论：

**引理 2**[2]　设 $G$ 是有限群，$\pi_e(G)=\{2,(2^n-1)$ 和 $(2^n+1)$ 的因子$\}$，$n\geqslant 2$，则 $G\cong L_2(2^n)$.

对于系列单群 $Sz(2^{2m+1})$，我们也有如下结论：

**引理 3**[3]　设 $G$ 是有限群，$\pi_e(G)=\{2,4,(2^{2m+1}-1)$ 和 $(2^{2m+1}-2^{m+1}+1)$ 以及 $(2^{2m+1}+2^{m+1}+1)$ 的因子$\}$，$m\geqslant 1$，则 $G\cong Sz(2^{2m+1})$.

在本文的讨论中，我们将用到上述 3 个引理.

对照用群 $G$ 的阶 $|G|$ 研讨有限群，我们可以用 $\pi_e(G)$ 提出相类似的有意义的问题：如元的阶给定的有限群，它们的同构类的个数，即 $h$ 函数[4]. 对于 $h$ 函数为 1 的有限群，即可用 $\pi_e(G)$ 刻画的有限群已有大量的研究结果，最近的结果可参考文献[5].

同样地，对照 CLT 群(即 Lagrange 逆定理成立的有限群，见文献[6])，我们提出了 COE 群[7].

对照用群的阶判定群 $G$ 可解[8]，本文给出用 $\pi_e(G)$ 来判断 $G$ 可解的结论. 可以说，这是用 $\pi_e(G)$ 判定 $G$ 为单群，即如下定理的一个补充：

**定理 1**[9]　设 $G$ 是有限群，$\pi_e(G)$ 是 $G$ 中元的阶之集，$|\pi(G)|$ 记为 $\pi_e(G)$ 中素数的个数，$|\chi(G)|$ 记为 $\pi_e(G)$ 中合数的个数，则 $|\pi(G)|\leqq|\chi(G)|+3$. 而若 $|\pi(G)|=|\chi(G)|+3$，则 $G$ 为单群.

**定义 1**　设 $G$ 是有限群，$\pi_e(G)$ 记为 $G$ 中元的阶之集. 如果由 $\pi_e(G)\cap T=\varnothing$ 可推出 $G$ 为可解群，则数量集 $T$ 称为 $G$ 的交空可解集(简称为交空集).

当交空可解集 $T$ 的元素的个数 $|T|=1$ 时，由 Feit-Thompson 的奇阶群可解定理即知，$T=\{2\}$. 而当 $T$ 为其它数量集时，均有不可解(单)群的例子. 于是 $|T|=1$ 时的交空集为 $T=\{2\}$.

当 $|T|=2$ 时，如 $T=\{2,*\}$，其中 $*$ 为任意一个大于 2 的整数，同样可得 $G$ 可解，我们不考虑这类

---

① 收稿日期：2016-06-27
基金项目：国家自然科学基金项目(11171364，11271301，11671063)；重庆市基础科学与前沿研究技术专项(一般)项目(cstc2016jcyjA0065).
作者简介：施武杰(1943-)，男，江苏昆山人，教授，博士研究生导师，国家有突出贡献的中青年专家，主要从事有限群的研究.

平凡的情形. 于是，可设 $T=\{3, **\}$，其中 $**$ 为任意一个大于3的整数.

文献[10]给出了所有的极小单群，它们是：

**引理4**[10] 极小单群有以下5个类型：

(i) $L_2(p)$，$p>3$，$5\nmid(p^2-1)$，$p$ 为素数；

(ii) $L_2(2^p)$，$p$ 为素数；

(iii) $L_2(3^p)$，$p$ 为奇素数；

(iv) $L_3(3)$；

(v) $Sz(2^{2m+1})$，$2m+1$ 为奇素数.

注意到这5类极小单群中，前4类单群均含有3阶元，而对第5类单群 $Sz(2^{2m+1})$，由

$$\pi_e(Sz(2^{2m+1}))=\{2, 4, (2^{2m+1}-1)\text{ 和}(2^{2m+1}-2^{m+1}+1)\text{ 以及}(2^{2m+1}+2^{m+1}+1)\text{ 的因子}\} \qquad m\geqslant 1$$

知单群 $Sz(2^{2m+1})$ 不含3阶元，但含4阶元和5阶元(由 $5\mid(2^{4m+2}+1)$，即推出 $5\mid(2^{2m+1}-2^{m+1}+1)(2^{2m+1}+2^{m+1}+1)$). 于是当 $|T|=2$ 时，$T=\{3, 4\}$ 以及 $T=\{3, 5\}$ 均为交空集. 事实上，只有这两种情形为 $|T|=2$ 时的交空集.

(a) 设 $T=\{3, x\}$，其中 $x$ 为任意一个大于5的整数. 注意到

$$\pi_e(Sz(2^3))=\{1, 2, 4, 5, 7, 13\}$$

而

$$\pi_e(Sz(2^5))=\{1, 2, 4, 5, 25, 31, 41\}$$

于是除 $\{1, 2, 4, 5\}$ 外，上述的两个极小单群没有共同的元的阶. 则对任意一个大于5的整数 $x$ 均能找到反例，即使 $T$ 为交空集的 $x$ 不存在.

(b) 设 $T=\{4, y\}$，其中 $y$ 为任意一个大于4的整数. 注意到

$$\pi_e(A_5)=\{1, 2, 3, 5\}$$

要排除这种情形，$y$ 只能取5，而由

$$\pi_e(L_2(2^3))=\{1, 2, 3, 7, 9\}$$

知，使 $T$ 为交空集的 $y$ 不存在.

(c) 设 $T=\{5, z\}$，其中 $z$ 为任意一个大于5的整数. 同样由：

$$\pi_e(L_2(2^3))=\{1, 2, 3, 7, 9\}$$

$$\pi_e(L_2(2^5))=\{1, 2, 3, 11, 31, 33\}$$

得这样的 $z$ 不存在.

而当 $|T|=2$，$T$ 为其它数量集时，$\pi_e(A_5)=\{1, 2, 3, 5\}$ 即为其反例.

下面考虑 $|T|=3$ 时的交空集. 设 $T=\{n_1, n_2, n_3\}$，由前面的讨论知 $n_1, n_2, n_3$ 均为奇数，且可设

$$n_1<n_2<n_3$$

如 $n_1=3$，当 $n_2\in\{4, 5\}$ 或 $n_3\in\{4, 5\}$ 时为上述已经讨论情形的平凡推论.

于是可设 $n_2>5$，$n_3>6$. 注意到：

$$\pi_e(Sz(2^3))=\{1, 2, 4, 5, 7, 13\}$$

$$\pi_e(Sz(2^5))=\{1, 2, 4, 5, 25, 31, 41\}$$

而

$$\pi_e(Sz(2^7))=\{1, 2, 4, 5, 29, 113, 127, 145\}$$

于是无论 $n_2$ 和 $n_3$ 取何值时均有反例，即这样的使 $T$ 为交空集的 $n_2$ 和 $n_3$ 不存在.

如 $n_1=4$，可设 $n_2>4$，$n_3>5$. 注意到：

$$\pi_e(L_2(2^3))=\{1, 2, 3, 7, 9\}$$

$$\pi_e(L_2(2^5))=\{1, 2, 3, 11, 31, 33\}$$

$$\pi_e(L_2(2^7))=\{1, 2, 3, 43, 127, 129\}$$

于是无论 $n_2$ 和 $n_3$ 取何值时均有反例，即这样的使 $T$ 为交空集的 $n_2$ 和 $n_3$ 不存在.

对于 $n_1=5$ 的情形同样可以给出证明. 对于 $n_1>5$ 的情形，$\pi_e(A_5)=\{1,2,3,5\}$ 即为其反例. 则不存在 $|T|=3$ 时的非平凡的交空集.

最后考虑 $|T|>3$ 时的交空集. 我们用与上面类似的论证来证明不存在 $|T|>3$ 时的非平凡的交空集. 为此，先给出数论的一个引理：

**引理 5**　设 $m,n$ 是两个正整数，$(m,n)=d$，则 $(2^m-1,2^n-1)=2^d-1$.

**证**　不妨设 $m=nq+r$，$0\leqslant r<n$，则

$$2^m-1=2^{nq+r}-1=2^r(2^{nq}-1)+2^r-1\equiv 2^r-1 \pmod{(2^n-1)}$$

于是

$$(2^m-1,2^n-1)=(2^r-1,2^n-1)=(2^n-1,2^r-1)$$

若 $r\neq 0$，继续对 $n,r$ 作辗转除法，就可得

$$(2^m-1,2^n-1)=(2^n-1,2^r-1)=\cdots=2^d-1$$

**注 1**　引理 5 也可由文献[11] 第七章第四节的定理 1 直接推出.

**推论 1**　设 $p,q$ 为相异的素数. 则

$$\pi_e(L_2(2^p))\cap\pi_e(L_2(2^q))=\{1,2,3\}$$

**证**　事实上，由：

$$|L_2(2^p)|=2^p(2^{2p}-1)\qquad |L_2(2^q)|=2^q(2^{2q}-1)$$

以及 $(2p,2q)=2$ 和引理 5 知，除 1,2,3 外，$L_2(2^p)$ 和 $L_2(2^q)$ 中不含阶相同的元素.

**推论 2**　设 $p,q$ 为相异的奇素数. 则 $\pi_e(Sz(2^p))\cap\pi_e(Sz(2^q))=\{1,2,4,5\}$.

**证**　先证明与引理 5 类似的数论结果.

设 $p,q$ 为相异的奇素数，则 $(2^{2p}+1,2^{2q}+1)=5$. 事实上，

$$(2^{2p}+1,2^{2q}+1)\mid(2^{4p}-1,2^{4q}-1)$$

由引理 5 知

$$(2^{4p}-1,2^{4q}-1)=2^4-1=3\times 5$$

但 3 不整除 $2^{2p}+1$，于是 $(2^{2p}+1,2^{2q}+1)=5$. 同样地，容易证明

$$(2^{2p}+1,2^q-1)=(2^{2q}+1,2^p-1)=1$$

于是结论成立.

设 $|T|=s>3$，可令

$$T=\{n_1,n_2,n_3,\cdots,n_s\}\qquad n_1<n_2<n_3<\cdots<n_s,\ s>3$$

如上所述，$n_1=2$，或 $\{n_1,n_2\}=\{3,4\}$，或 $\{n_1,n_2\}=\{3,5\}$ 均为上述情形的平凡推广. 而当 $n_1>5$ 时，$A_5$ 为其反例. 于是只有如下的可能情形出现：

(d) 设 $T=\{3,n_2,n_3,\cdots,n_s\}$，其中 $n_2$ 为大于 5 的整数. 注意到

$$\pi_e(Sz(2^p))\cap\pi_e(Sz(2^q))=\{1,2,4,5\}$$

而对于任意的 $Sz(2^p)$，至少有 1 个不属于 $\{1,2,4,5\}$ 的数属于 $\pi_e(Sz(2^p))$，它不出现在任一其它的 $\pi_e(Sz(2^q))$ 中. 于是对任意的 $s=|T|$，只要对 $Sz(2^p)$ 取足够多的素数 $p$，均能找到反例，即这样的使 $T$ 为交空集的 $T$ 不存在.

(e) 设 $T=\{4,n_2,n_3,\cdots,n_s\}$，其中 $n_2$ 为大于 4 的整数. 注意到

$$\pi_e(L_2(2^p))\cap\pi_e(L_2(2^q))=\{1,2,3\}$$

而对于任意的 $L_2(2^p)$，至少有 1 个不属于 $\{1,2,3\}$ 的数属于 $\pi_e(L_2(2^p))$，它不出现在任一其它的 $\pi_e(L_2(2^q))$ 中. 于是对任意 $s=|T|$，只要对 $L_2(2^p)$ 取足够多的素数 $p$，均能找到反例，即这样的使 $T$ 为交空集的 $T$ 不存在.

由此，我们得出如下定理：

**定理2** 设$G$是有限群，$\pi_e(G)$是$G$中元素的阶之集. 如果$2 \notin \pi_e(G)$，或$\pi_e(G) \cap \{3, 4\} = \emptyset$，或$\pi_e(G) \cap \{3, 5\} = \emptyset$，则$G$可解. 进一步，仅用$\pi_e(G)$的交空集$T$来判定$G$是否可解，仅有3种情形，即$T = \{2\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}$.

致谢：罗明教授对本文的数论工作给予了帮助，仅此致谢!

**参考文献：**

[1] 施武杰. $A_5$的一个特征性质[J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，1986(3)：11－14.
[2] 施武杰. $J_1$与$PSL_2(2^n)$的特征性质[J]. 数学进展，1987，16(4)：397－401.
[3] SHI W J. A Characterization of Suzuki's Simple Groups [J]. Proc of the Amer Math Soc，1992，114(3)：589－591.
[4] 施武杰. 元的阶给定的有限群[J]. 科学通报，1997，42(16)：1703－1706.
[5] VASIL'EV A V，GRECHKOSEEVA M A. Recognition by Spectrum for Simple Classical Groups in Characteristic 2 [J]. Siberian Math J，2015，56(6)：1009－1018.
[6] HUMPHREYS J F. On Groups Satisfying the Converse of Lagrange's Theorem [J]. Proc Camb Phil Soc，1974，75(1)：25－32.
[7] SHI W J. Finite Groups Defined by the Sets of Their Element Orders [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，1997，22(5)：481－486.
[8] 何军华，蒲 伟. 阶与$n$互素的群均为可解之数$n$ [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，1999，24(6)：612－614.
[9] DENG H W，SHI W J. A Simplicity Criterion for Finite Groups [J]. J Algebra，1997，191(1)：371－381.
[10] THOMPSON J G. Nonsolvable Finite Groups All of Whose Local Subgroups Are Solvable I [J]. Bull Amer Math Soc，1968，74(2)：383－437.
[11] 柯 召，孙 琦. 数论讲义[M]. 北京：高等教育出版社，1987.

# A Sufficient Condition for Solvability of Finite Groups

SHI Wu-jie

*Faculty of Mathematics and Finance，Chongqing University of Arts and Sciences，Chongqing 402160，China；*
*Faculty of Mathematics，Suzhou University，Suzhou Jiangsu 215006，China*

**Abstract**：The following theorem is proved：Let $G$ be a finite group and $\pi_e(G)$ be the set of element orders in $G$. If $\pi_e(G) \cap \{2\} = \emptyset$，or $\pi_e(G) \cap \{3, 4\} = \emptyset$，or $\pi_e(G) \cap \{3, 5\} = \emptyset$，then $G$ is solvable. Furthermore，using the intersection with $\pi_e(G)$ being empty set to judge $G$ is solvable or not，only the above three cases.

**Key words**：finite group；solvability；set of element orders

责任编辑 廖 坤