DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2017.06.002

不动点原理在时滞 BAM 神经网络稳定性分析中的一个应用[①]

牟天伟, 饶若峰

成都师范学院 数学系，成都 611130

摘要：不动点原理很难运用于 BAM 神经网络的稳定性分析，据了解，没有文章涉及用不动点方法解决 BAM 神经网络的稳定性判别问题. 构造了一个乘积空间上的压缩映射，第一次用压缩映像原理获得了 BAM 神经网络的全局指数型稳定性的判据. 不同于很多已知文献，该研究所得的稳定性判据可以运用计算机 LMI 工具箱进行判断. 数值实例证实了所述方法的有效性.

关 键 词：BAM 神经网络；时滞；压缩映射

中图分类号：O177.91，O193 **文献标志码**：A **文章编号**：1673-9868(2017)06-0005-05

1988 年，文献[1]首次引进双向联想记忆神经网络(BAM 神经网络). BAM 神经网络能广泛应用于人工智能、图像恢复、信号与图像处理、组合优化、联想记忆等诸方面，这些成功的应用很大程度上依赖于系统本身是否具有某种稳定性. 本文考虑一类时滞 BAM 神经网络的全局指数型稳定性判据. 一直以来，人们通常考虑用李雅普诺夫方法及其它方法解决时滞神经网络或动力系统的稳定性判别问题[1-5]，但每一种方法都有其局限性，李雅普诺夫方法也不例外. 于是人们有时也考虑用其它方法来弥补李雅普诺夫方法的不足，其中不动点方法是人们考虑的备选方法. 最近，不动点方法应用到了神经网络的稳定性分析，获得了一系列新的稳定性判定准则[6-7]. 而我们发现，不动点方法较少应用到 BAM 神经网络稳定性分析中. 事实上，不动点方法要运用到 BAM 神经网络稳定性分析中的确存在一些数学上的困难. 本文拟构造一个乘积空间上的压缩映射来克服数学上的困难，将运用压缩映像原理来获得其稳定性判据. 由于选择方法不同，结论不同于以往结果.

考虑以下时滞 BAM 神经网络：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t} = -\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{C}f(\boldsymbol{y}(t-\tau(t))) & t \in [0, +\infty) \\ \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}(t)}{\mathrm{d}t} = -\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{D}g(\boldsymbol{x}(t-h(t))) & t \in [0, +\infty) \\ \boldsymbol{x}(s) = \boldsymbol{\xi}(s),\ \boldsymbol{y}(s) = \boldsymbol{\eta}(s) & s \in [-\tau, 0] \end{cases} \tag{1}$$

其中：

$$\boldsymbol{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$$
$$\boldsymbol{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), \cdots, y_n(t))^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$$

① 收稿日期：2016-07-28
基金项目：四川省科技厅资助项目(2012JYZ010)；四川省教育厅资助项目(12ZB349)；国家 973 项目(2010CB732501).
作者简介：牟天伟(1975-)，男，四川阆中人，副教授，主要从事自动化控制及不动点理论的研究.
通信作者：饶若峰，教授.

$$\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta} \in \boldsymbol{C}[[-\tau, 0], \mathbb{R}^n])$$

激活函数：

$$f(\boldsymbol{x}) = (f_1(x_1(t)), f_2(x_2(t)), \cdots, f_n(x_n(t)))^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$$

$$g(\boldsymbol{x}) = (g_1(x_1(t)), g_2(x_2(t)), \cdots, g_n(x_n(t)))^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$$

时滞 $\tau(t),h(t)$ 满足 $0 \leqslant \tau(t),h(t) \leqslant \tau$. $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 皆为正定对角矩阵，为神经元势能恢复参数矩阵. 以下全文假设：

$$f(0) = g(0) = 0 \in \mathbb{R}^n$$

$$\boldsymbol{A} = \mathrm{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_n) \qquad \boldsymbol{B} = \mathrm{diag}(b_1, b_2, \cdots, b_n)$$

以及：

(A1) 存在正定对角矩阵 $\boldsymbol{F}$，使得

$$|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})| \leqslant \boldsymbol{F} |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| \qquad \forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$$

(A2) 存在正定对角矩阵 $\boldsymbol{G}$，使得

$$|g(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{y})| \leqslant \boldsymbol{G} |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| \qquad \forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$$

为方便起见，对于向量 $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$ 及矩阵 $\boldsymbol{M} = (m_{ij})_{n\times n}$，我们记：

$$|\boldsymbol{u}| = (|u_1|, \cdots, |u_n|)^{\mathrm{T}}$$

$$|\boldsymbol{M}| = (|m_{ij}|)_{n\times n}$$

对向量 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$，向量不等式 $\boldsymbol{u} < \boldsymbol{v}$ 等价于其分量不等式 $u_i < v_i (\forall i = 1,2,\cdots,n)$.

本文的主要结果是：

定理 1 假设存在常数 $0 < \lambda < 1$，以下 LMI 条件成立：

$$|\boldsymbol{C}| \boldsymbol{F} < \lambda \boldsymbol{A} \tag{2}$$

$$|\boldsymbol{D}| \boldsymbol{G} < \lambda \boldsymbol{B} \tag{3}$$

则系统(1)是全局均方指数型稳定的.

证 首先定义乘积空间 $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ 如下：设函数空间 $\Omega_i (i = 1,2)$ 由满足下列 3 个条件的函数 $\boldsymbol{q}_i(t)$：$[-\tau, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 构成：

(a) $\boldsymbol{q}_i(t)$ 在 $t \in [0, +\infty)$ 上连续；

(b) $\boldsymbol{q}_1(t) = \boldsymbol{\xi}(t)$，$\boldsymbol{q}_2(t) = \boldsymbol{\eta}(t)$ $(\forall t \in [-\tau, 0])$；

(c) 当 $t \to \infty$ 时，$\mathrm{e}^{\gamma t}\boldsymbol{q}_i(t) \to 0 \in \mathbb{R}^n$，其中 $\gamma > 0$ 是正的常数，满足 $\gamma < \min\{\lambda_{\min}\boldsymbol{A}, \lambda_{\min}\boldsymbol{B}\}$.

再定义空间 Ω 上的距离如下：

$$\mathrm{dist}(\bar{\boldsymbol{q}}, \tilde{\boldsymbol{q}}) = \max_{i=1,2,\cdots,2n-1,2n} (\sup_{t\geqslant -\tau} |\bar{q}^{(i)}(t) - \tilde{q}^{(i)}(t)|)$$

其中：

$$\bar{\boldsymbol{q}} = \bar{\boldsymbol{q}}(t) = \begin{pmatrix} \bar{\boldsymbol{q}}_1(t) \\ \bar{\boldsymbol{q}}_2(t) \end{pmatrix} = (\bar{q}^{(1)}(t), \bar{q}^{(2)}(t), \cdots, \bar{q}^{(2n)}(t))^{\mathrm{T}} \in \Omega$$

$$\tilde{\boldsymbol{q}} = \tilde{\boldsymbol{q}}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{q}}_1(t) \\ \tilde{\boldsymbol{q}}_2(t) \end{pmatrix} = (\tilde{q}^{(1)}(t), \cdots, \tilde{q}^{(2n)}(t))^{\mathrm{T}} \in \Omega$$

这里 $\bar{\boldsymbol{q}}_i \in \Omega_i$，$\tilde{\boldsymbol{q}}_i \in \Omega_i (i = 1,2)$. 则不难证明 Ω 是上述距离下的完备度量空间.

下面分 3 步来完成定理 1 的全部证明：

步骤 1 构造 Ω 上的映射.

设

$$(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t), \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t))^{\mathrm{T}} = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t), y_1(t), \cdots, y_n(t))^{\mathrm{T}}$$

为系统(1)的解. 则对任意 $t \geqslant 0$，我们有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t}(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(t)) = \boldsymbol{A}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(t) + \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t} = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{C}f(\boldsymbol{y}(t - \tau(t)))$$

等式两边积分，则有

$$\boldsymbol{x}(t)=\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{\xi}(0)+\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\int_0^t \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}s}\boldsymbol{C}f(\boldsymbol{y}(s-\tau(s)))\mathrm{d}s \qquad t\geqslant 0 \tag{4}$$

类似于(4)式，我们有

$$\boldsymbol{y}(t)=\mathrm{e}^{-\boldsymbol{B}t}\boldsymbol{\eta}(0)+\mathrm{e}^{-\boldsymbol{B}t}\int_0^t \mathrm{e}^{\boldsymbol{B}s}\boldsymbol{D}g(\boldsymbol{x}(s-h(s)))\mathrm{d}s \qquad t\geqslant 0$$

于是构造 Ω 上的映射 P 如下：

$$P\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{y}(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{\xi}(0)+\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\int_0^t \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}s}\boldsymbol{C}f(\boldsymbol{y}(s-\tau(s)))\mathrm{d}s\\ \mathrm{e}^{-\boldsymbol{B}t}\boldsymbol{\eta}(0)+\mathrm{e}^{-\boldsymbol{B}t}\int_0^t \mathrm{e}^{\boldsymbol{B}s}\boldsymbol{D}g(\boldsymbol{x}(s-h(s)))\mathrm{d}s\end{pmatrix} \qquad \forall t\in[0,+\infty) \tag{5}$$

$$P\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{y}(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\xi}(t)\\ \boldsymbol{\eta}(t)\end{pmatrix} \qquad \forall t\in[-\tau,0] \tag{6}$$

步骤 2　证明映射 P 是自射的，即对任意$\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{y}(t)\end{pmatrix}\in\Omega$，有 $P\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{y}(t)\end{pmatrix}\in\Omega$. 换而言之，证明 $P\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{y}(t)\end{pmatrix}$满足条件(a)—(c).

事实上，由(5),(6)式，显然条件(a)和(b)可以满足.

而满足条件(c)只要下式成立：

$$\mathrm{e}^{\gamma t}P\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{y}(t)\end{pmatrix}=\mathrm{e}^{\gamma t}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{\xi}(0)+\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\int_0^t \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}s}\boldsymbol{C}f(\boldsymbol{y}(s-\tau(s)))\mathrm{d}s\\ \mathrm{e}^{-\boldsymbol{B}t}\boldsymbol{\eta}(0)+\mathrm{e}^{-\boldsymbol{B}t}\int_0^t \mathrm{e}^{\boldsymbol{B}s}\boldsymbol{D}g(\boldsymbol{x}(s-h(s)))\mathrm{d}s\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2n} \qquad t\rightarrow+\infty \tag{7}$$

当 $t\rightarrow\infty$ 时，显然：

$$\mathrm{e}^{\gamma t}\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{\xi}(0)\rightarrow 0\in\mathbb{R}^n \qquad \mathrm{e}^{\gamma t}\mathrm{e}^{-\boldsymbol{B}t}\boldsymbol{\eta}(0)\rightarrow 0\in\mathbb{R}^n$$

下面证明

$$\mathrm{e}^{\gamma t}\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\int_0^t \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}s}\boldsymbol{C}f(\boldsymbol{y}(s-\tau(s)))\mathrm{d}s\rightarrow 0\in\mathbb{R}^n \qquad t\rightarrow\infty \tag{8}$$

由 $\mathrm{e}^{\gamma t}\boldsymbol{x}(t)\rightarrow 0$ 知，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在相应的正数 $t^*>\tau$，使得

$$|\mathrm{e}^{\gamma t}\boldsymbol{x}(t)|<\varepsilon\boldsymbol{\mu} \qquad \forall t\geqslant t^*$$

其中 $\boldsymbol{\mu}=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n$. 由条件(A1)和(A2)，有

$$\left|\mathrm{e}^{\gamma t}\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\int_0^t \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}s}\boldsymbol{C}f(\boldsymbol{y}(s-\tau(s)))\mathrm{d}s\right|\leqslant$$

$$\mathrm{e}^{-(\boldsymbol{A}-\gamma\boldsymbol{I})t}\int_0^{t^*}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}s}|\boldsymbol{C}|\boldsymbol{F}|\boldsymbol{y}(s-\tau(s))|\mathrm{d}s+\mathrm{e}^{-(\boldsymbol{A}-\gamma\boldsymbol{I})t}\int_{t^*}^t\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}s}|\boldsymbol{C}|\boldsymbol{F}|\boldsymbol{y}(s-\tau(s))|\mathrm{d}s \tag{9}$$

一方面，我们有

$$\mathrm{e}^{-(\boldsymbol{A}-\gamma\boldsymbol{I})t}\int_0^{t^*}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}s}|\boldsymbol{C}|\boldsymbol{F}|\boldsymbol{y}(s-\tau(s))|\mathrm{d}s\leqslant$$

$$t^*\mathrm{e}^{-(\boldsymbol{A}-\gamma\boldsymbol{I})t}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t^*}|\boldsymbol{C}|\boldsymbol{F}\left[\max_i\left(\sup_{s\in[-\tau,t^*]}|x_i(s)|\right)\right]\boldsymbol{\mu}\rightarrow 0\in\mathbb{R}^n \qquad t\rightarrow\infty \tag{10}$$

另一方面，显然存在正数 a_0，使得 $|\boldsymbol{C}|\boldsymbol{F}\boldsymbol{\mu}\leqslant a_0\boldsymbol{I}$，这里 $\boldsymbol{I}$ 表示单位矩阵. 从而

$$\mathrm{e}^{-(\boldsymbol{A}-\gamma\boldsymbol{I})t}\int_{t^*}^t\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}s}|\boldsymbol{C}|\boldsymbol{F}|\boldsymbol{y}(s-\tau(s))|\mathrm{d}s\leqslant\varepsilon\mathrm{e}^{\gamma\tau}\mathrm{e}^{-(\boldsymbol{A}-\gamma\boldsymbol{I})t}\int_{t^*}^t\mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}-\gamma\boldsymbol{I})s}|\boldsymbol{C}|\boldsymbol{F}\boldsymbol{\mu}\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\varepsilon a_0\mathrm{e}^{\gamma\tau}\mathrm{e}^{-(\boldsymbol{A}-\gamma\boldsymbol{I})t}\left(\int_{t^*}^t\mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}-\gamma\boldsymbol{I})s}\mathrm{d}s\right)\boldsymbol{I}\leqslant$$

$$\varepsilon a_0\mathrm{e}^{\gamma\tau}\left(\frac{1}{a_1-\gamma},\frac{1}{a_2-\gamma},\cdots,\frac{1}{a_n-\gamma}\right)^{\mathrm{T}} \tag{11}$$

则由(9)-(11)式就导出了(8)式. 类似可证得

$$\mathrm{e}^{\gamma t}\mathrm{e}^{-\boldsymbol{B}t}\int_0^t \mathrm{e}^{\boldsymbol{B}s}\boldsymbol{D}g(\boldsymbol{x}(s-h(s)))\mathrm{d}s \to 0 \in \mathbb{R}^n \qquad t \to \infty \tag{12}$$

显然由(8)和(12)式知(7)式成立, 从而条件(c)满足. 因此我们证得: 对任意给定的$\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{y}(t)\end{pmatrix} \in \Omega$, 有 $P\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{y}(t)\end{pmatrix} \in \Omega$.

步骤 3 证明 P 是 Ω 上的压缩映射.

事实上, 对任给$\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{y}(t)\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\overline{\boldsymbol{x}}(t)\\ \overline{\boldsymbol{y}}(t)\end{pmatrix} \in \Omega$, 有

$$\left|P\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{y}(t)\end{pmatrix}-P\begin{pmatrix}\overline{\boldsymbol{x}}(t)\\ \overline{\boldsymbol{y}}(t)\end{pmatrix}\right| \leqslant \begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\int_0^t \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}s}\ |\boldsymbol{C}|\,|\ f(\boldsymbol{y}(s-\tau(s)))-f(\overline{\boldsymbol{y}}(s-\tau(s)))\ |\ \mathrm{d}s\\ \mathrm{e}^{-\boldsymbol{B}t}\int_0^t \mathrm{e}^{\boldsymbol{B}s}\ |\boldsymbol{D}|\,|\ g(\boldsymbol{x}(s-h(s)))-g(\overline{\boldsymbol{x}}(s-h(s)))\ |\ \mathrm{d}s\end{pmatrix} \leqslant$$

$$\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\int_0^t \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}s}\ |\boldsymbol{C}|\,|\boldsymbol{F}|\,|\boldsymbol{y}(s-\tau(s))-\overline{\boldsymbol{y}}(s-\tau(s))|\ \mathrm{d}s\\ \mathrm{e}^{-\boldsymbol{B}t}\int_0^t \mathrm{e}^{\boldsymbol{B}s}\ |\boldsymbol{D}|\,|\boldsymbol{G}|\,|\boldsymbol{x}(s-h(s))-\overline{\boldsymbol{x}}(s-h(s))|\ \mathrm{d}s\end{pmatrix} <$$

$$\lambda\begin{pmatrix}\boldsymbol{\mu}\\ \boldsymbol{\mu}\end{pmatrix}\mathrm{dist}\left(\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{y}(t)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\overline{\boldsymbol{x}}(t)\\ \overline{\boldsymbol{y}}(t)\end{pmatrix}\right)$$

从而

$$\mathrm{dist}\left(P\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{y}(t)\end{pmatrix},P\begin{pmatrix}\overline{\boldsymbol{x}}(t)\\ \overline{\boldsymbol{y}}(t)\end{pmatrix}\right) \leqslant \lambda\,\mathrm{dist}\left(\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{y}(t)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\overline{\boldsymbol{x}}(t)\\ \overline{\boldsymbol{y}}(t)\end{pmatrix}\right)$$

其中 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 和 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 分别是 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的逆矩阵. 所以 $P: \Omega \longrightarrow \Omega$ 是压缩映射. 因此存在 P 在 Ω 上的不动点$\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{y}(t)\end{pmatrix}$, 同时它也是系统(1)的解, 当 $t \to \infty$ 时, 满足 $\mathrm{e}^{\gamma t}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{y}(t)\end{pmatrix} \to 0 \in \mathbb{R}^{2n}$, 这就证明了定理 1.

例 1 给系统(1)配置参数如下: 令 $n=2$, 时滞上限 $\tau=8.5$, 以及:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2.2 & 0\\ 0 & 2.1\end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 0.01\\ 0 & 1.9\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}-0.2 & -0.01\\ 0 & 0.3\end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}0.3 & 0\\ 0 & -0.1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}0.2 & 0\\ 0 & 0.1\end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{G}=\begin{pmatrix}0.1 & 0\\ 0 & 0.2\end{pmatrix}$$

则套用计算机 Matlab LMI 工具箱可获得可行性结果[3]为

$$\lambda=0.897\,9$$

显然 $0<\lambda<1$, 从而由定理 1 知系统(1)是全局均方指数型稳定的.

本文通过构造乘积空间上的压缩映像, 获得了一类时滞 BAM 神经网络的全局指数型稳定判据. 特别地, 乘积空间上的压缩映像的构造法是以前相关文献所没有的设想和方法, 同时构造合适的乘积空间上的距离也是证明定理的关键技巧. 总之, 通过构造乘积空间上的压缩映像, 我们克服了时滞 BAM 神经网络数学模型在数学上的困难, 最终获得了稳定性判据. 本文也为进一步的研究提供了方法上的一些启迪[4], 数值实例证实了所述方法的有效性.

参考文献：

[1] KOSKO B. Bidirectional Associative Memories [J]. IEEE Trans Syst Man Cybern，1988，18(1)：49－60.

[2] RAO R F，ZHONG S M，WANG X R. Stochastic Stability Criteria with LMI Conditions for Markovian Jumping Impulsive BAM Neural Networks with Mode-Dependent Time-Varying Delays and Nonlinear Reaction-Diffusion [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation，2014，19(1)：258－273.

[3] RAO R F，WANG X R，ZHONG S M，et al. LMI Approach to Exponential Stability and Almost Sure Exponential Stability for Stochastic Fuzzy Markovian-Jumping Cohen-Grossberg Neural Networks with Nonlinear p-Laplace Diffusion [J]. Journal of Applied Mathematics，2013，2013：1－21.

[4] RAO R F，ZHONG S M，PU Z L. LMI-Based Robust Exponential Stability Criterion of Impulsive Integro-Differential Equations with Uncertain Parameters Via Contraction Mapping Theory [J]. Advances in Difference Equations，2017，2017：1－16.

[5] 俸　卫. T-S 模糊马尔可夫跳跃时滞 Cohen-Grossberg 神经网络的几乎必然指数稳定性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2015，40(5)：10－12.

[6] 黄家琳，饶若峰. Cohen-Grossberg 神经网络的全局指数稳定性 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2016，38(2)：78－82.

[7] RAO R F，PU Z L. LMI-Based Stability Criterion of Impulsive T-S Fuzzy Dynamic Equations Via Fixed Point Theory [J]. Abstract and Applied Analysis，2013，2013：1－9.

An Application of the Fixed Point Theory in Stability Analysis of Delayed Bi-Directional Associative Memory (BAM) Neural Networks

MU Tian-wei，　RAO Ruo-feng

Department of Mathematics，Chengdu Normal University，Chengdu 611130，China

Abstract：In this paper，by formulating a contraction mapping in the product space，the authors derive a global exponential stability criterion for BAM neural networks with time-delays. Different from the existing literature，the newly-obtained criterion can be easily verified by the computer matlab LMI toolbox. Moreover，a numerical example is presented to illustrate the effectiveness of the proposed method.

Key words：BAM neural network；time-delay；contraction mapping

责任编辑　廖　坤