DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2017.06.008

非负矩阵谱半径的上界估计[①]

钟 琴[1], 周 鑫[1], 牟谷芳[2]

1. 四川大学 锦江学院,数学教学部,四川 彭山 620860;2. 乐山师范学院 数学与信息科学学院,四川 乐山 614000

摘要: 非负矩阵的谱半径估计是非负矩阵理论研究的重要课题之一. 如果谱半径的上界能够表示为非负矩阵元素的易于计算的函数,那么这种估计价值更高. 结合非负矩阵的迹分两种情况给出非负矩阵谱半径的上界序列,并且给出数值例子加以说明.

关 键 词: 非负矩阵;谱半径;上界

中图分类号: O151.21 **文献标志码:** A **文章编号:** 1673-9868(2017)06-0050-04

非负矩阵的谱半径估计不仅在理论数学方面是重要的,而且在迭代计算过程方面也是重要的. 对于非负矩阵谱半径的估计,目前已有许多研究,如文献[1-3].

为了叙述方便,本文采用以下的符号和记法:

不失一般性,假设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A} \geqslant 0$,$\rho(\boldsymbol{A})$ 表示非负矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的谱半径. 对 $i=1,2,\cdots,n$,$r_i(\boldsymbol{A})$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行的行和,$R(\boldsymbol{A})$ 和 $r(\boldsymbol{A})$ 分别表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最大行和与最小行和,$C(\boldsymbol{A})$ 和 $c(\boldsymbol{A})$ 分别表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最大列和与最小列和.

著名的 Frobenius 定理[1] 得到如下结论:

$$r(\boldsymbol{A}) \leqslant \rho(\boldsymbol{A}) \leqslant R(\boldsymbol{A}) \tag{1}$$

正矩阵是非负矩阵的子类,具有非负矩阵的所有性质. 文献[4-6]在(1)式的基础上给出了正矩阵最大特征值的界值定理.

定理 1[4] 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}>0$ 且 $r<R$,则其最大特征值 $\rho(\boldsymbol{A})$ 满足

$$r+\eta\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}-1\right) \leqslant \rho(\boldsymbol{A}) \leqslant R-\eta\left(1-\sqrt{\delta}\right) \tag{2}$$

其中 $\eta=\min\limits_{i,j} a_{ij}$,$\delta=\max\limits_{r_i<r_j}\dfrac{r_i(\boldsymbol{A})}{r_j(\boldsymbol{A})}$.

定理 2[5] 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}>0$,则其最大特征值 $\rho(\boldsymbol{A})$ 满足

$$r+\eta\left(\frac{1}{\sigma}-1\right) \leqslant \rho(\boldsymbol{A}) \leqslant R-\eta(1-\sigma) \tag{3}$$

其中 $\sigma=\sqrt{\dfrac{(r-\eta)}{(R-\eta)}}$,$r,R,\eta$ 的定义同定理 1.

① 收稿日期:2016-06-21
基金项目:国家自然科学基金面上项目(11471225);四川省教育厅科研项目(13ZB0357);四川大学锦江学院青年教师科研基金项目(12130219).
作者简介:钟 琴(1982-),女,四川自贡人,副教授,主要从事矩阵的特征值估计和数值计算的研究.

定理 3[6] 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}>0$，则其最大特征值 $\rho(\boldsymbol{A})$ 满足

$$r+\eta(h-1)\leqslant\rho(\boldsymbol{A})\leqslant R-\eta\left(1-\frac{1}{g}\right) \tag{4}$$

其中 r,R,η 的定义同定理 2，且：

$$g=\frac{R-2\eta+\sqrt{R^2-4\eta(R-r)}}{2(r-\eta)} \qquad h=\frac{-r+2\eta+\sqrt{r^2+4\eta(R-r)}}{2\eta}$$

关于正矩阵最大特征值的界，在涉及 r,R 和 η 的一切可能的界值中，定理 3 的结果是最好的.

本文结合非负矩阵的迹分两种情况给出非负矩阵谱半径的上界，并且给出数值例子加以比较.

1 非负矩阵谱半径的上界估计

文献[7] 提出：若 $\boldsymbol{A}$ 为具有实特征值的 n 阶复矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值 λ_i 位于区间

$$\left[\frac{\operatorname{tr}\boldsymbol{A}}{n}-\alpha_p,\ \frac{\operatorname{tr}\boldsymbol{A}}{n}+\alpha_p\right]$$

内，其中

$$\alpha_p=\left[\frac{(n-1)^{2p-1}}{(n-1)^{2p-1}+1}\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{A}-\frac{\operatorname{tr}\boldsymbol{A}}{n}\boldsymbol{I}\right)^{2p}\right]^{\frac{1}{2p}}$$

$\boldsymbol{I}$ 为 n 阶单位矩阵，$\operatorname{tr}\boldsymbol{A}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹，序列 $\{\alpha_p\}$ 单调递减，且

$$\lim_{p\to\infty}\alpha_p=\max_i\left|\lambda_i-\frac{\operatorname{tr}\boldsymbol{A}}{n}\right|=\alpha$$

本文在上述结果的基础上，分两种情况给出非负矩阵谱半径的上界估计.

定理 4 设 $\boldsymbol{A}\geqslant 0$，且 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$. 则

$$\rho(\boldsymbol{A})\leqslant\frac{\operatorname{tr}\boldsymbol{A}}{n}+\alpha_p$$

其中

$$\alpha_p=\left[\frac{(n-1)^{2p-1}}{(n-1)^{2p-1}+1}\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{A}-\frac{\operatorname{tr}\boldsymbol{A}}{n}\boldsymbol{I}\right)^{2p}\right]^{\frac{1}{2p}}$$

单调递减，且

$$\lim_{p\to\infty}\alpha_p=\max_i\left|\lambda_i-\frac{\operatorname{tr}\boldsymbol{A}}{n}\right|=\alpha$$

证 由 $\boldsymbol{A}\geqslant 0$，且 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，可知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ_i 均为实数. 特别地，非负对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的谱半径 $\rho(\boldsymbol{A})$ 也是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，故定理 4 成立.

定理 4 对非负对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的谱半径的上界进行了估计. 当 $\boldsymbol{A}\geqslant 0$ 且 $\boldsymbol{A}$ 不对称时，有：

定理 5 设 $\boldsymbol{A}\geqslant 0$，则

$$\rho(\boldsymbol{A})\leqslant\frac{\operatorname{tr}\boldsymbol{A}}{n}+\beta_p$$

其中

$$\beta_p=\left[\frac{(n-1)^{2p-1}}{(n-1)^{2p-1}+1}\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{M}(\boldsymbol{A})-\frac{\operatorname{tr}\boldsymbol{A}}{n}\boldsymbol{I}\right)^{2p}\right]^{\frac{1}{2p}}$$

单调递减，

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{A})=\frac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}}{2}$$

且

$$\lim_{p\to\infty}\beta_p=\max_i\left|\lambda_i(\boldsymbol{M}(\boldsymbol{A}))-\frac{\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}}{n}\right|=\beta$$

证　由 $\boldsymbol{A}\geqslant 0$，构造矩阵 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{A})=\dfrac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}}{2}$，可知 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{A})$ 为非负对称矩阵，则其特征值均为实数. 注意到 $\mathrm{tr}\,(\boldsymbol{M}(\boldsymbol{A}))=\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}$，结合定理 4，有

$$\rho(\boldsymbol{A})\leqslant\rho(\boldsymbol{M}(\boldsymbol{A}))\leqslant\frac{\mathrm{tr}\,(\boldsymbol{M}(\boldsymbol{A}))}{n}+\beta_p=\frac{\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}}{n}+\beta_p$$

其中

$$\beta_p=\left[\frac{(n-1)^{2p-1}}{(n-1)^{2p-1}+1}\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{M}(\boldsymbol{A})-\frac{\mathrm{tr}\,(\boldsymbol{M}(\boldsymbol{A}))}{n}\boldsymbol{I}\right)^{2p}\right]^{\frac{1}{2p}}=$$

$$\left[\frac{(n-1)^{2p-1}}{(n-1)^{2p-1}+1}\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{M}(\boldsymbol{A})-\frac{\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}}{n}\boldsymbol{I}\right)^{2p}\right]^{\frac{1}{2p}}$$

单调递减，且

$$\lim_{p\to\infty}\beta_p=\max_i\left|\lambda_i(\boldsymbol{M}(\boldsymbol{A}))-\frac{\mathrm{tr}\,(\boldsymbol{M}(\boldsymbol{A}))}{n}\right|=\max_i\left|\lambda_i(\boldsymbol{M}(\boldsymbol{A}))-\frac{\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}}{n}\right|=\beta$$

2　数值例子

例 1　考虑非负对称矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&6&4\\3&4&1\end{pmatrix}$. 关于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的谱半径的上界，运用文献[1，4－6]，分别得到：$\rho(\boldsymbol{A})<12$，$\rho(\boldsymbol{A})<11.866\,0$，$\rho(\boldsymbol{A})<11.674\,2$，$\rho(\boldsymbol{A})<11.477\,2$. 应用定理 4，得 $\rho(\boldsymbol{A})\leqslant 9.481\,6(p=6)$. 实际上，$\rho(\boldsymbol{A})\approx 9.466\,9$. 从数据来看，估计结果是很精确的.

例 2　考虑非负矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&3&3\\4&1&1\end{pmatrix}$. 关于矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的谱半径的上界，运用定理 5 有下面的比较结果(表 1)：实际上，$\rho(\boldsymbol{B})\approx 5.741\,7$. 从数据来看，非负矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的谱半径上界的估计结果得到了改进.

表 1　非负矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的谱半径的上界比较结果

	行	列
文献[1]	$\rho(\boldsymbol{B})<8$	$\rho(\boldsymbol{B})<7$
文献[4]	$\rho(\boldsymbol{B})<7.866\,1$	$\rho(\boldsymbol{B})<6.925\,9$
文献[5]	$\rho(\boldsymbol{B})<7.654\,7$	$\rho(\boldsymbol{B})<6.816\,5$
文献[6]	$\rho(\boldsymbol{B})<7.464\,2$	$\rho(\boldsymbol{B})<6.701\,6$
定理 5	$\rho(\boldsymbol{B})\leqslant 6.368\,9(p=1)$	$\rho(\boldsymbol{B})\leqslant 6.368\,9(p=2)$
	$\rho(\boldsymbol{B})\leqslant 6.242\,7\ (p=3)$	$\rho(\boldsymbol{B})\leqslant 6.157\,2(p=4)$
	$\rho(\boldsymbol{B})\leqslant 6.107\,1(p=5)$	$\rho(\boldsymbol{B})\leqslant 6.077\,9(p=6)$

从以上的两个例子可以看出，对一个非负矩阵，不管其对称还是非对称，都可以构造一个基于矩阵迹的单调递减序列，有效地改进非负矩阵谱半径的上界估计结果.

参考文献：

[1]　VARGA R S. Matrix Iterative Analysis [M]. 2 版. 北京：科学出版社，2006：36.

[2]　孙德淑. 非负矩阵 Hadamard 积的谱半径上界和 M－矩阵 Fan 积的最小特征值下界的新估计 [J]. 西南师范大学学报

(自然科学版),2016,41(2):7-11.
[3] 廖 辉.矩阵特征值估计的一个改进结果[J].西南大学学报(自然科学版),2013,35(6):46-49.
[4] LEDERMANNN W. Bounds for the Greatest Latent Root of a Positive Matrix [J]. London Math Soc, 1950, 25: 265-268.
[5] OSTROWSKI A. Bounds for the Greatest Latent Root of a Positive Matrix [J]. London Math Soc, 1952, 27: 253-256.
[6] BRAUER A. The Theorem of Ledermann and Ostrowski on Positive Matrices [J]. Duke Math J, 1957, 24: 265-274.
[7] ROJO O, SOTO R, ROJO H. A Decreasing Sequence of Eigenvalue Localization Regions [J]. Linear Algebra Appl, 1994, 196: 71-84.

Estimation of the Upper Bounds for the Spectral Radius of Nonnegative Matrices

ZHONG Qin[1], ZHOU Xin[1], MOU Gu-fang[2]

1. *Department of Mathematics, Jinjiang College, Sichuan University, Pengshan Sichuan 620860, China;*
2. *College of Mathematics and Information Science, Leshan Normal University, Leshan Sichuan 614000, China*

Abstract: Estimation of the spectral radius of nonnegative matrices is an important part in the theory of nonnegative matrices. The estimates will be of greater practical value if the upper bounds of the spectral radius are expressed as a function of the element of a nonnegative matrix which is easy to calculate. In this paper, we obtain a decreasing sequence of the upper bounds for the spectral radius of a nonnegative matrix based on the trace of matrix. Numerical examples are given to illustrate the effectiveness of the method.

Key words: nonnegative matrix; spectral radius; upper bound

责任编辑 廖 坤