第 39 卷第 6 期　西南大学学报（自然科学版）　2017 年 6 月
Vol. 39　No. 6　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　Jun.　2017

DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2017.06.009

同阶子群个数之集为{1，3，4}的有限群①

李春艳，　陈贵云

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：设 G 是一个有限群. $n(G)$ 表示群 G 中所有同阶子群的个数组成的集合. 得出了当 $n(G)=\{1,3,4\}$ 时 G 的所有 Sylow 子群的结构.

关 键 词：有限群；同阶子群的个数；Sylow 子群；群结构

中图分类号：O152.1　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9868(2017)06-0054-06

有限群 G 的结构一直是群论研究中一个最基本的课题，本文关注同阶子群的个数与群结构的关系. 设群 G 是一个有限群，$n(G)$ 表示 G 中所有同阶子群的个数组成的集合. 当 $n(G)=\{1,m\}$ 时，关于群 G 的结构的研究已经有不少重要的结果，如文献[1]得到了满足 $n(G)=\{1,p+1\}$（p 是素数）的非幂零群的结构，并且得到了当 $m=p+1$ 或 $m=p^2+p+1$（p 是素数）时的幂零群的结构；文献[2]给出了 $n(G)=\{1,m\}$ 时的非幂零群的结构. 这些结果都限于讨论 $n(G)$ 包含 2 个元素的情形，对于更大的集合，并未出现相关结果. 结合文献[1－3]的思想和方法，本文将讨论 $n(G)=\{1,3,4\}$ 时群 G 的结构. 当然，这样的群是存在的. 如 A_4 是我们非常熟悉的一个群，它的所有子群包括：1 个单位元群，3 个 2 阶群，4 个 3 阶群，1 个 4 阶群和 A_4 本身，满足 $n(A_4)=\{1,3,4\}$. 另外，易知满足 $n(G)=\{1,2,3\}$ 的群是不存在的. 因此，研究满足 $n(G)=\{1,3,4\}$ 的群 G 的结构有着特别的意义.

本文将证明如下定理：

定理 1　设 G 为有限群，且 $|G|=2^\alpha 3^\beta q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2}\cdots q_n^{\alpha_n}$，其中 q_i 为大于 3 的素数，α,β 为非负整数，α_i,n 均为正整数. 如果 $n(G)=\{1,3,4\}$，则 G 的 Sylow 子群具有如下性质：

(a) 若 $\alpha\neq 0$，则 G 的 Sylow 2-子群 P_2 有如下性质：

当 P_2 循环时，G 的 Sylow 2-子群只有 1 个或 3 个；

当 P_2 不循环时，$P_2\trianglelefteq G$ 且具有如下结构：

如果 $\alpha=2$，则 $P_2=C_2\times C_2$；

如果 $\alpha=3$，则 $P_2=C_4\times C_2$ 或 $P_2=\langle a,b\mid a^4=1,\ b^2=a^2,\ b^{-1}ab=a^{-1}\rangle$；

如果 $\alpha\geqslant 4$，则 $P_2=C_{2^{\alpha-1}}\times C_2$ 或 $P_2=\langle a,b\mid a^{2^{\alpha-1}}=b^2=1,\ b^{-1}ab=a^{1+2^{\alpha-2}}\rangle$.

(b) 若 $\beta\neq 0$，则 G 的 Sylow 3-子群 P_3 有如下性质：

当 P_3 循环时，G 的 Sylow 3-子群只有 1 个或 4 个；

当 P_3 不循环时，$P_3\trianglelefteq G$ 且具有如下结构：

---

① 收稿日期：2016-04-29

基金项目：国家自然科学基金项目(11271301，11471266).

作者简介：李春艳(1991-)，女，四川绵阳人，硕士研究生，主要从事群论的研究.

$$P_3 = C_{3^{\beta-1}} \times C_3$$

或

$$P_3 = \langle a, b \mid a^{3^{\beta-1}} = b^3 = 1, b^{-1}ab = a^{1+3^{\beta-2}} \rangle$$

(c) G 的 Sylow q_i -子群 Q_i 循环且 $Q_i \trianglelefteq G$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$.

为证明定理1,先引入下面几个引理:

引理1[4]定理1.7.2 设 p 是素数,令 $|G| = p^a \cdot n$,$N(p^a)$ 是 G 中 p^a 阶子群的个数,则

$$N(p^a) \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$$

引理2[4]定理5.2.7 设 P 是一个 p -群,则:

(a) $P/\Phi(P)$ 是初等交换群;

(b) 如果 $|P/\Phi(P)| = p^n$,那么存在 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in P$,使得 $P = \langle x_1, x_2, \cdots, x_n \rangle$.

下面3个引理是关于具有循环极大子群的有限 p -群的结构定理:

引理3[5]定理5.3.6 设 P 是有一个循环极大子群 H 的非交换 p -群,假设

$$1 \neq x^p \in H \qquad \forall x \in P \backslash H$$

则 $p = 2$,且

$$P = \langle a^{2^{n-1}} = 1, b^2 = a^{2^{n-2}}, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle \qquad n \geqslant 3$$

为一个广义四元数群.

引理4[5]定理5.3.2 设 P 是一个非交换 p -群,$H = \langle h \rangle$ 是 P 的循环极大子群,且 $|H| = p^n$. 假设 H 在 P 中有补 $A = \langle a \rangle$,那么下面情形之一成立:

(a) $p \neq 2$ 且 $h^a = h^{1+p^{n-1}}$(选择适当的 $a \in A$);

(b) $p = 2$ 且 $h^a = h^{-1}$;

(b) $p = 2$,$n \geqslant 3$ 且 $h^a = h^{-1+2^{n-1}}$;

(b) $p = 2$,$n \geqslant 3$ 且 $h^a = h^{1+2^{n-1}}$.

引理5[5]定理5.3.1 设 P 是交换群,H 是 P 的循环极大子群,那么或者 P 循环,或者 $P = H \times C$,其中 $C \cong C_p$.

引理6 设 P 是满足引理4条件的一个非交换 p -群,$|P| = p^{n+1}$,则其 p 阶子群的个数有如下结果:

(a) 当 $p = 2$ 且 $P = \langle a, b \mid a^{2^n} = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$ 时,其2阶子群有 $2^n + 1$ 个;

(b) 当 $p = 2$,$n \geqslant 3$ 且 $P = \langle a, b \mid a^{2^n} = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1+2^{n-1}} \rangle$ 时,其2阶子群有 $2^{n-1} + 1$ 个;

(c) 当 $p = 2$,$n \geqslant 3$ 且 $P = \langle a, b \mid a^{2^n} = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{1+2^{n-1}} \rangle$ 时,其2阶子群有3个;

(d) 当 $p = 3$ 且 $P = \langle a, b \mid a^{3^n} = b^3 = 1, b^{-1}ab = a^{1+3^{n-1}} \rangle$ 时,其3阶子群有4个.

证 (a) 当

$$P = \langle a, b \mid a^{2^n} = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$$

时,因为 $b^{-1}ab = a^{-1}$,故对于任给的 $g \in P$,存在非负整数 i, j,使得 $g = a^i b^j$,于是 P 中的所有2阶子群分别为 $\langle a^{2^{n-1}} \rangle$,$\langle b \rangle$,$\langle ab \rangle$,$\langle a^2 b \rangle$,$\cdots$,$\langle a^{2^{n-1}} b \rangle$,共 $2^n + 1$ 个,引理6的(a)得证.

(b) 当

$$P = \langle a, b \mid a^{2^n} = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1+2^{n-1}} \rangle$$

时,因为 $b^{-1}ab = a^{-1+2^{n-1}}$,故对任给的 $g \in P$,存在非负整数 i, j,使得 $g = a^i b^j$,于是 P 中的所有2阶子群分别为 $\langle a^{2^{n-1}} \rangle$,$\langle b \rangle$,$\langle a^2 b \rangle$,$\langle a^4 b \rangle$,$\cdots$,$\langle a^{2^n-2} b \rangle$,共 $2^{n-1} + 1$ 个,引理6的(b)得证.

(c) 当

$$P=\langle a, b \mid a^{2^n}=b^2=1, b^{-1}ab=a^{1+2^{n-1}}\rangle$$

时，因为 $b^{-1}ab=a^{1+2^{n-1}}$，故对任给的 $g\in P$，存在非负整数 i,j，使得 $g=a^ib^j$，又因为 $b^2=1$，故不妨取 $j=0$ 或 $j=1$. 当 $j=0$ 时，若 $g^2=1$，则 $i=0$ 或 $i=2^{n-1}$，即 $g=e$ 或 $g=a^{2^{n-1}}$；当 $j=1$ 时，若 $g^2=1$，则

$$g^2=(a^ib)^2=a^iba^ib=a^ib^{-1}a^ib=a^ia^ia^{i\cdot 2^{n-1}}=a^{2i+i\cdot 2^{n-1}}=1$$

即有 $i=0$ 或 $i=2^{n-1}$，即 $g=b$ 或 $g=a^{2^{n-1}}b$，故 P 中的 2 阶子群为 $\langle a^{2^{n-1}}\rangle$，$\langle b\rangle$ 和 $\langle a^{2^{n-1}}b\rangle$，共 3 个，引理 6 的(c) 得证.

(d) 当

$$P=\langle a, b \mid a^{3^n}=b^3=1, b^{-1}ab=a^{1+3^{n-1}}\rangle$$

时，若 $n=1$，则

$$P=\langle a, b \mid a^3=b^3=1, b^{-1}ab=a\rangle$$

此时 P 的所有 3 阶子群为 $\langle a\rangle$，$\langle b\rangle$，$\langle ab\rangle$ 和 $\langle a^2b\rangle$，共 4 个；

若 $n\geqslant 2$，因为 $b^{-1}ab=a^{1+3^{n-1}}$，故对任给的 $g\in P$，存在非负整数 i,j，使得 $g=a^ib^j$，其中 $j=0,1,2$.

当 $j=0$ 时，$g^3=1$ 的充要条件是 $3^{n-1}\mid 3i$，即 $i=3^{n-1}k$ $(k=0,1,2)$；

当 $j=1$ 时，$g^3=1$ 的充要条件是

$$g^3=(a^ib)^3=a^iba^iba^ib=b\cdot b^{-1}a^iba^iba^ib=ba^ia^{i\cdot 3^{n-1}}a^iba^ib=a^{3i}=1$$

故 $i=3^{n-1}k$ $(k=1,2,3)$，即 $g=b$，$g=a^{3^{n-1}}b$ 或 $g=a^{2\cdot 3^{n-1}}b$；

当 $j=2$ 时，若 $g^3=1$，则有

$$g^3=(a^ib^2)^3=a^ib^2a^ib^2a^ib^2=b\cdot b^{-1}a^ib^2a^ib^2a^ib^2=\cdots=a^{3i}=1$$

同理得 $g=b^2$，$g=a^{3^{n-1}}b$ 或 $g=a^{2\cdot 3^{n-1}}b$.

因此，P 有 8 个 3 阶元，进而 P 有 4 个 3 阶子群，它们是 $\langle a^{3^{n-1}}\rangle$，$\langle b\rangle$，$\langle a^{3^{n-1}}b\rangle$ 和 $\langle a^{3^{n-1}}b^2\rangle$，引理 6 的(d) 得证.

引理 7[6]定理3.8.2　设 $|G|=p^n$. 若 G 只有一个 p 阶子群，则：

(a) 当 $p>2$ 时，G 循环；

(b) 当 $p=2$ 时，G 循环或为广义四元数群.

引理 8[5]定理3.8.3　设 $|G|=p^n$，对某个 m，$1<m<n$，有 $N_{p^m}(G)=1$，则 G 循环.

定理 1 的证明

我们分 3 步证明定理 1：

步骤 1　G 的 Sylow 2-子群 P_2 的结构.

当 P_2 循环时，P_2 的各阶子群只有 1 个，因而 G 的 Sylow 2-子群可能有 1 个，也可能有 3 个. 下面总假设 P_2 不循环.

首先断言 $P_2\trianglelefteq G$. 若 $P_2\ntrianglelefteq G$，则因为 $P_2/\Phi(P_2)$ 含有(2，2)-型的初等 Abel 群，即 P_2 含有至少 3 个极大子群. 由于 $n(G)=\{1, 3, 4\}$，由引理 1 知 P_2 恰有 3 个极大子群. 而此时 G 的 Sylow 2-子群至少有 3 个，于是这些 Sylow 2-子群至少含有 4 个不同的同阶极大子群. 再由引理 1 知这种子群至少有 5 个，矛盾. 故 $P_2\trianglelefteq G$.

现在考虑 P_2 的 2 阶子群的个数. 若 P_2 只有 1 个 2 阶子群，则 P_2 为循环群或广义四元数群.

若 P_2 为广义四元数群，即

$$P_2=\langle a^{2^{n-1}}=1, b^2=a^{2^{n-2}}, b^{-1}ab=a^{-1}\rangle\qquad n\geqslant 3$$

当 $n=3$ 时，P_2 恰含有 1 个 2 阶子群及 $\langle a\rangle$，$\langle b\rangle$，$\langle ab\rangle$ 共 3 个 4 阶子群，1 个 8 阶子群，满足条件；

当 $n>3$ 时，P_2 至少含有$\langle a^{2^{n-3}}\rangle$,$\langle b\rangle$,$\langle ab\rangle$,$\langle a^3b\rangle$,$\langle a^5b\rangle$ 共 5 个 4 阶子群，矛盾.
故当 P_2 恰有 1 个 2 阶元时，P_2 只能是四元数群.

若 P_2 有至少 2 个 2 阶子群，因为 $Z(P_2)$ 含有 1 个 2 阶子群，所以 P_2 含有(2，2)-型 Abel 子群 H. 由 $n(G)=\{1,3,4\}$ 及引理 1 知，P_2 的 2 阶子群恰有 3 个，且全部含于 H.

如果 $P_2=H$，则 P_2 为(2，2)-型群，结论已经成立.

如果 $H\subsetneqq P_2$，则存在 $H_1\leqslant G$，$H\subsetneqq H_1$，$|H_1|=8$. 分两种情形讨论：

情形 1　若 H_1 非交换，由于 H_1 含有不止 1 个 2 阶子群，因此

$$H_1=\langle a,b\mid a^4=b^2=1,\ b^{-1}ab=a^{-1}\rangle$$

由引理 6 知 H_1 有 5 个 2 阶子群：$\langle a^2\rangle$,$\langle b\rangle$,$\langle ab\rangle$,$\langle a^2b\rangle$,$\langle a^3b\rangle$，矛盾.

情形 2　若 H_1 交换，则 $H_1=C_4\times C_2$，显然 H_1 满足要求.

到此为止，我们知道：如果 P_2 为 8 阶群，则 P_2 为 8 阶二面体群、四元数群或者 $C_4\times C_2$. 如果 $|P_2|>8$，则由上面的计算知道，P_2 中的 8 阶子群只能是二面体群、四元数群或者 $C_4\times C_2$.

若 H_1 为四元数群，且 $P_2>H_1$，考虑 H_2，使得

$$H_1\subsetneqq H_2\leqslant P_2\qquad |H_2|=2^4$$

任取 $x\in H_2\backslash H_1$. 若 $|x|=2$，如果 H_1 中有 4 阶元 d 与 x 可换，则因 H_1 中已含有 3 个 4 阶子群，而$\langle xd\rangle$ 也是 4 阶子群，于是 H_2 的 4 阶子群的个数至少为 4. 于是由引理 1 知这类子群个数至少为 5，矛盾. 如果 H_1 中的 4 阶元 d 都不能与 x 可换，则 x 在 H_1 中的共轭类长度至少为 6，进而 H_2 至少有 7 个 2 阶子群，矛盾. 若 $|x|=4$，则$\langle x\rangle$ 为 H_1 之外的一个 4 阶子群，同样得到 H_2 的 4 阶子群的个数至少为 4，依然得到矛盾. 因此，任取 $x\in H_2\backslash H_1$，有 $|x|=8$.

若 H_1 为二面体群或者 $C_4\times C_2$，则因 H_1 中已含有 3 个 2 阶子群和 3 个 4 阶子群，同理得 H_2 的 2 阶子群或 4 阶子群的个数至少为 4. 于是由引理 1 知这类子群个数至少为 5，矛盾. 因此，任取 $x\in H_2\backslash H_1$，有 $|x|=8$，即 H_2 含有循环极大子群. 又分为以下两种子情形讨论：

情形 2.1　若 H_2 为非交换群，则由引理 3 及引理 4 知，H_2 为下列 4 种群之一：

(i) H_2 是一个广义四元数群，由前面的讨论知，该群不符合要求；

(ii) $H_2=\langle a,b\mid a^{2^3}=b^2=1,\ b^{-1}ab=a^{-1}\rangle$，由引理 6 知，$H_2$ 有：$\langle a^4\rangle$,$\langle b\rangle$,$\langle ab\rangle$,$\langle a^2b\rangle$,…,及$\langle a^7b\rangle$ 共 9 个 2 阶子群，矛盾；

(iii) $H_2=\langle a,b\mid a^{2^3}=b^2=1,\ b^{-1}ab=a^3\rangle$，由引理 6 知，$H_2$ 有：$\langle a^4\rangle$,$\langle b\rangle$,$\langle a^2b\rangle$,$\langle a^4b\rangle$ 及$\langle a^6b\rangle$ 共 5 个 2 阶子群，矛盾；

(iv) $H_2=\langle a,b\mid a^{2^3}=b^2=1,\ b^{-1}ab=a^5\rangle$，此时 H_2 恰有 3 个 2 阶子群：$\langle a^4\rangle$,$\langle b\rangle$,$\langle a^4b\rangle$，3 个 4 阶子群：$\langle a^2\rangle$,$\langle a^2b\rangle$,$\langle a^6b\rangle$，3 个 8 阶子群：$\langle a\rangle$,$\langle ab\rangle$,$\langle a^3b\rangle$，因此 H_2 符合要求.

情形 2.2　若 H_2 交换，则由引理 5 知，$H_2=C_8\times C_2$. 经验证，H_2 满足条件. 若 $P_2=H_2$，则已得结论. 否则再取 $H_3\leqslant G$，满足 $|H_3|=2^5$，$H_2\subsetneqq H_3$. 若 H_3 非交换，则 H_3 为前面 (iv) 所讨论的群，若 H_3 交换，则 $H_3=C_{16}\times C_2$，经验证，H_3 也满足条件.

综上所述，当 P_2 为 16 阶群时，只能是 $C_8\times C_2$ 或者$\langle a,b\mid a^{2^3}=b^2=1,\ b^{-1}ab=a^5\rangle$.

如果 $|P_2|>16$，逐次增大 H_i 的阶($i=4,5,\cdots$)，重复上述过程和步骤最终可得

$$P_2=C_{2^{\alpha-1}}\times C_2$$

或

$$P_2=\langle a,b\mid a^{2^{\alpha-1}}=b^2=1,\ b^{-1}ab=a^{1+2^{\alpha-2}}\rangle\qquad \alpha\geqslant 4$$

定理的 1(a) 成立.

步骤 2　G 的 Sylow 3-子群 P_3 的结构.

若 P_3 为循环群，则 P_3 的各阶子群只有 1 个，因而 G 的 Sylow 3 -子群可能为 1 个或 4 个. 下设 P_3 不为循环群.

首先证明 $P_3 \trianglelefteq G$. 假设不成立，则因为 P_3 不循环，故 $P_3/\Phi(P_3)$ 含有(3，3)-型初等 Abel 群，故 P_3 含有至少 4 个极大子群. 由 $n(G)=\{1, 3, 4\}$ 和引理 1 知，P_3 恰有 4 个极大子群. 而此时 G 的 Sylow 3 -子群至少有 4 个，于是所有 Sylow 3 -子群至少有 5 个不同的极大子群，矛盾，故 $P_3 \trianglelefteq G$.

现在考虑 P_3 的 3 阶子群的个数. 若 P_3 只有 1 个 3 阶子群，由引理 4 知，P_3 循环.

若 P_3 含有至少 2 个不同的 3 阶子群，则因为 $Z(P_3)$ 含有 1 个 3 阶子群，所以 P_3 含有(3，3)-型初等 Abel 子群 R. 由 $n(G)=\{1, 3, 4\}$ 和引理 1 知，P_3 的 3 阶子群恰有 4 个，且全部含于 R 中.

如果 $P_3=R$，则 P_3 为(3，3)-型初等 Abel 群，$P_3=C_3\times C_3$.

如果 $R \subsetneqq P_3$，则存在 $R_1 \leqslant G$，使得 $R \subsetneqq R_1$，且 $|R_1|=3^3$. 分两种情形讨论：

情形 1　若 R_1 非交换，则

$$R_1=\langle a, b \mid a^9=b^3=1, b^{-1}ab=a^4\rangle$$

此时 R_1 中的 3 阶子群有：$\langle a^3\rangle$，$\langle b\rangle$，$\langle a^3b\rangle$ 和 $\langle a^3b^2\rangle$，R_1 中的 9 阶子群有：$\langle a\rangle$，$\langle ab\rangle$，$\langle ab^2\rangle$ 和 $\langle a^3\rangle\times\langle b\rangle$，满足条件. 若 $R_1=P_3$，则已得结论. 否则存在 $R_2 \leqslant G$，满足 $R_1 \subsetneqq R_2$，$|R_2|=3^4$. 任取 $y\in R_2\backslash R_1$，则 $|y| \mid 3^3$. 若 $|y|=3$ 或 $|y|=9$，则因 R_1 中已含有 4 个 3 阶或 9 阶子群，故 R_2 中 3 阶或 9 阶子群的个数将大于 4，矛盾. 故 $|y|=3^3$，则 R_2 含有 1 个循环极大子群，由引理 3 及引理 4 知

$$R_2=\langle a, b \mid a^{3^3}=b^3=1, b^{-1}ab=a^{10}\rangle$$

此时 R_2 的 3 阶子群有：$\langle a^9\rangle$，$\langle b\rangle$，$\langle a^9b\rangle$ 和 $\langle a^{18}b\rangle$，9 阶子群有：$\langle a^3\rangle$，$\langle a^9\rangle\times\langle b\rangle$，$\langle a^3b\rangle$，$\langle a^6b\rangle$，27 阶子群有：$\langle a\rangle$，$\langle a^3\rangle\times\langle b\rangle$，$\langle ab\rangle$ 和 $\langle a^2b\rangle$，满足条件.

情形 2　若 R_1 交换，则 $R_1=C_{3^2}\times C_3$，如果 $R_1=P_3$，则结论成立. 否则考虑 $R_2 \leqslant G$，满足：

$$R_1 \subsetneqq R_2 \qquad |R_2|=3^4$$

任取 $z\in R_2\backslash R_1$，若 $|z|=3$ 或 $|z|=9$，则因 R_1 中已含有 4 个 3 阶或 9 阶子群，故 R_2 中 3 阶或 9 阶子群的个数将大于 4，矛盾. 故 $|z|=3^3$，则 R_2 含有一个循环极大子群. 分以下两种子情形讨论：

情形 2.1　若 R_2 非交换，则由引理 3 及引理 4 知

$$R_2=\langle a, b \mid a^{3^3}=b^3=1, b^{-1}ab=a^{1+3^2}\rangle$$

归为情形 1 的讨论，R_2 满足要求.

情形 2.2　若 R_2 交换，则由引理 5 知

$$R_2=C_{3^3}\times C_3$$

经验证，R_2 也满足条件. 若 $R_2=P_3$，则已得结论，否则取 $R_3 \leqslant G$，满足：

$$R_2 \subsetneqq R_3 \qquad |R_3|=3^5$$

则

$$R_3=C_{3^4}\times C_3$$

或

$$R_3=\langle a, b \mid a^{3^4}=b^3=1, b^{-1}ab=a^{1+3^3}\rangle$$

综上所述，如果 P_3 为 3^4 阶群，我们得到 P_3 等于上述满足要求的 R_2. 如果 P_3 的阶大于 3^4，继续考虑 $R_3 \leqslant G$，满足 $R_2 \subsetneqq R_3$ 且 $|R_3|=3^5$. 重复上述过程，得到

$$R_3=\langle a, b \mid a^{3^4}=b^3=1, b^{-1}ab=a^{1+3^3}\rangle$$

或

$$R_3=C_{3^3}\times C_3$$

继续上述过程，逐次增大 R_i 的阶($i=4,5,\cdots$)，重复上述步骤，最终可得符合要求的 P_3 只有以下两种：

(i) 当 P_3 循环时，G 的 Sylow 3-子群只有1个或4个；

(ii) 当 P_3 不循环时，$P_3 \trianglelefteq G$ 且

$$P_3 = C_{3^{\beta-1}} \times C_3$$

或

$$P_3 = \langle a, b \mid a^{3^{\beta-1}} = b^3 = 1, b^{-1}ab = a^{1+3^{\beta-2}} \rangle$$

定理1的(b)成立.

步骤3　G 的 Sylow q-子群 Q 的结构，其中 $q \in \pi(G)$，$q \neq 2,3$.

由 Sylow 定理知，$V_q(G) \equiv 1 (\mathrm{mod}\ q)$，且

$$V_q(G) \in n(G) = \{1, 3, 4\} \qquad q \neq 2,3$$

故 $V_q(G) = 1$，即 $Q \trianglelefteq G$. 若 Q 非循环，则由引理2知 $Q/\Phi(Q)$ 含有 (q, q)-型初等交换子群 K，则 K 的极大子群的个数为

$$\frac{q^2 - 1}{q - 1} = q + 1 > 4$$

与 $n(G) = \{1, 3, 4\}$ 矛盾. 进而 Q 循环，定理1的(c)成立.

参考文献：

[1] CHEN Y H, CHEN G Y. Finite Groups with the Set of the Number of Subgroups of Possible Order Containing Exactly Two Elements [J]. Indian Acad Sci (Math Sci), 2013, 123: 491-498.

[2] SHAO C G, JIANG Q H. Finite Groups Whose Set of Numbers of Subgroups of Possible Order Has Exactly 2 Elements [J]. Czech Math J, 2014, 139(64): 827-831.

[3] ZHANG J R. Sylow Numbers of Finite Groups [J]. Algebra, 1995, 176: 111-123.

[4] HUPPERT B. 有限群论 [M]. 姜　豪，俞曙霞，译. 福州：福建人民出版社，1992.

[5] KURZWEIL H, STELLMACHER B. 有限群论导引 [M]. 施武杰，李世恒，译. 北京：科学出版社，2009.

[6] 徐明耀，曲海鹏. 有限 p-群 [M]. 北京：北京大学出版社，2010.

Finite Groups Whose Set of Numbers of Subgroups of Possible Order is {1, 3, 4}

LI Chun-yan,　CHEN Gui-yun

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: Let G be a finite group, and $n(G)$ the set of the numbers of subgroups of possible order of G. In this paper we get the detailed structure of the Sylow subgroups of G satisfying that $n(G) = \{1, 3, 4\}$.

Key words: finite group; the number of subgroups of possible order; Sylow subgroup; the structure of a finite group

责任编辑　廖　坤