DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2017.06.010

半群 $S_n(k)$ 的秩①

张传军[1]，　朱华伟[2]

1. 广州市教育研究院 义务教育研究室，广州 510006；2. 深圳中学 数学部，广东 深圳 518001

摘要：设 Sing_n 是 $[n]$ 上的奇异变换半群. 对任意 $1 \leqslant k \leqslant n-1$，研究半群

$$S_n(k) = \{\alpha \in \mathrm{Sing}_n : \forall x \in [n],\ x \leqslant k \Rightarrow x\alpha \leqslant k\}$$

证明了 $S_n(k)$ 是由秩为 $n-1$ 的幂等元生成的，并得到半群 $S_n(k)(k \neq 2)$ 的秩和幂等元秩都为 $\frac{n(n-1)}{2}$. 同时，得到了半群 $S_n(2)$ 的秩和幂等元秩都为 $\frac{n(n-1)}{2}+1$.

关 键 词：奇异变换半群；幂等元秩；秩

中图分类号：O152.7　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9868(2017)06-0060-09

设 $[n]=\{1, 2, \cdots, n\}$，并赋予自然数的大小序. $\mathcal{T}_n$ 是 $[n]$ 上的全变换半群. 令

$$\mathrm{Sing}_n = \{\alpha \in \mathcal{T}_n : |\mathrm{im}(\alpha)| \leqslant n-1\}$$

则 Sing_n 是全变换半群 $\mathcal{T}_n$ 的子半群，称 Sing_n 为 $[n]$ 上的奇异变换半群. 对任意 $1 \leqslant k \leqslant n$，令

$$S_n(k) = \{\alpha \in \mathrm{Sing}_n : \forall x \in [n],\ x \leqslant k \Rightarrow x\alpha \leqslant k\}$$

则显然 $S_n(n) = \mathrm{Sing}_n$. 易验证 $S_n(k)$ 是奇异变换半群 Sing_n 的子半群.

通常，有限半群 S 的秩定义为

$$\mathrm{rank}\, S = \min\{|A| : A \subseteq S, \langle A\rangle = S\}$$

如果 S 由它的幂等元集 E 生成，那么 S 的幂等元秩定义为

$$\mathrm{idrank}\, S = \min\{|A| : A \subseteq E, \langle A\rangle = S\}$$

显然有 $\mathrm{rank}\, S \leqslant \mathrm{idrank}\, S$.

变换半群秩的相关研究一直以来都是半群理论研究中的热点之一(参见文献[1-12]). 文献[1]研究了 $[n]$ 上的奇异变换半群 Sing_n，并得到了它的秩和幂等元秩都为 $\frac{n(n-1)}{2}$. 文献[2]证明了保序变换半群 $\mathcal{O}_n$ 的秩和幂等元秩分别为 n 和 $2n-2$. 文献[9]研究了变换半群

$$\mathcal{O}_n(k) = \{\alpha \in \mathcal{O}_n : \forall x \in [n],\ x \leqslant k \Rightarrow x\alpha \leqslant k\} \qquad 1 \leqslant k \leqslant n-1$$

的秩和幂等元秩.

① 收稿日期：2016-04-08
基金项目：广州市基础教育拔尖创新人才培养研究团队项目(1201630038)；广东省教育科学"十二五"规划课题强师工程重点项目(2014ZQJK001)；2016 年度贵州省科技平台及人才团队专项资金项目(黔科合平台人才【2016】5609)；2014 年贵州省教育改革发展研究十大课题(2014ZD005).
作者简介：张传军(1979-)，男，吉林敦化人，博士，副教授，主要从事数学自动化推理以及半群的研究.

本文将考虑半群 $S_n(k)$ 的秩和幂等元秩，证明 $S_n(k)$ 是由秩为 $n-1$ 的幂等元生成的，并得到半群 $S_n(k)(1 \leqslant k \leqslant n-1$ 且 $k \neq 2)$ 的秩和幂等元秩都为 $\frac{n(n-1)}{2}$. 同时，得到半群 $S_n(2)$ 的秩和幂等元秩都为 $\frac{n(n-1)}{2}+1$.

设 U 是半群 S 的任意子集，通常用 $E(U)$ 表示 U 中的幂等元之集. 本文未定义的术语及记号请参见文献[13].

为了叙述上的方便，在 $S_n(k)$ 上引入下面的二元关系：对任意 $\alpha, \beta \in S_n(k)$，定义：

$$\alpha \mathscr{L}^{\diamond} \beta \Leftrightarrow \mathrm{im}(\alpha)=\mathrm{im}(\beta)$$

$$\alpha \mathscr{R}^{\diamond} \beta \Leftrightarrow \ker(\alpha)=\ker(\beta)$$

$$\alpha \mathscr{J}^{\diamond} \beta \Leftrightarrow |\mathrm{im}(\alpha)|=|\mathrm{im}(\beta)|$$

$$\mathscr{H}^{\diamond}=\mathscr{R}^{\diamond} \cap \mathscr{L}^{\diamond}$$

则 $\mathscr{H}^{\diamond}, \mathscr{L}^{\diamond}, \mathscr{R}^{\diamond}$ 与 $\mathscr{J}^{\diamond}$ 都是 $S_n(k)$ 上的等价关系. 易见：

$$\mathscr{H}^{\diamond} \subseteq \mathscr{L}^{\diamond} \subseteq \mathscr{J}^{\diamond} \qquad \mathscr{H}^{\diamond} \subseteq \mathscr{R}^{\diamond} \subseteq \mathscr{J}^{\diamond}$$

对 $1 \leqslant r \leqslant n-1$，记

$$J_r^{\diamond}(k)=\{\alpha \in S_n(k): |\mathrm{im}(\alpha)|=r\}$$

则 $S_n(k)$ 有 $n-1$ 个 $\mathscr{J}^{\diamond}$-类：$J_1^{\diamond}(k), J_2^{\diamond}(k), \cdots, J_{n-1}^{\diamond}(k)$. 在顶端 $\mathscr{J}^{\diamond}$-类 $J_{n-1}^{\diamond}(k)$ 中，类似于文献[6]，我们引入以下符号：

$$R_{(i, j)}^{\diamond}(k)=\{\alpha \in J_{n-1}^{\diamond}(k): \ker(\alpha) \text{ 的唯一非单点核类是} \{i, j\}\} \qquad 1 \leqslant i, j \leqslant n ; i \neq j$$

$$L_i^{\diamond}(k)=\{\alpha \in J_{n-1}^{\diamond}(k): \mathrm{im}(\alpha)=[n] \backslash \{i\}\} \qquad 1 \leqslant i \leqslant n$$

因此，$J_{n-1}^{\diamond}$ 有 n 个 $\mathscr{L}^{\diamond}$-类：$L_1^{\diamond}(k), L_2^{\diamond}(k), \cdots, L_n^{\diamond}(k)$ 和 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个 $\mathscr{R}^{\diamond}$-类 $R_{(i, j)}^{\diamond}(k)(1 \leqslant i<j \leqslant n)$. 注意到 $R_{(i, j)}^{\diamond}(k)=R_{(j, i)}^{\diamond}(k)$.

引理 1 设 $1 \leqslant k \leqslant n$，$\alpha \in S_n(k)$，则 α 是幂等元当且仅当对任意 $t \in \mathrm{im}(\alpha)$，且 $t \leqslant k$，如果 $k \in t\alpha^{-1}$，有 $t\alpha=t$.

证 众所周知，$\alpha \in \mathrm{Sing}_n$ 是幂等元当且仅当对任意 $t \in \mathrm{im}(\alpha)$，有 $t \in t\alpha^{-1}$. 因此，$\alpha \in S_n(k)$ 是幂等元当且仅当对任意 $t \in \mathrm{im}(\alpha)$，且 $t \leqslant k$，如果 $k \in t\alpha^{-1}$，有 $t\alpha=t$（若 $k \in t\alpha^{-1}$，则由 $\alpha \in S_n(k)$ 可得 $t=t\alpha=k\alpha \leqslant k$).

设 $\alpha \in S_n(k)$，令

$$s(\alpha)=|\{x \in [n]: x\alpha \neq x\}|$$

引理 2 设 $n \geqslant 3$ 且 $1 \leqslant k \leqslant n$，则

$$S_n(k)=\langle E(S_n(k))\rangle$$

证 任取 $\alpha \in S_n(k)$. 注意到：若 $s(\alpha)=1$，则显然 α 是幂等元，从而 $\alpha \in E(S_n(k))$. 假设

$$\alpha=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_r \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_r \end{pmatrix} \in S_n(k)$$

由 $S_n(k) \subseteq \mathrm{Sing}_n$ 可知 $r \leqslant n-1$，从而存在 $j \in \{1, \cdots, r\}$，使得 $|A_j| \geqslant 2$. 令：

$$\eta=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_r \\ \min A_1 & \min A_2 & \cdots & \min A_r \end{pmatrix}$$

$$x\varepsilon_j=\begin{cases} a_j & x \in A_j \\ \min A_i & x \in A_i, i \neq j \end{cases}$$

$$\delta_1=\begin{cases}\varepsilon_j & a_j\in A_j\backslash\{\min A_j\}\\ \eta & a_j\notin A_j \text{ 或 } a_j=\min A_j\end{cases}$$

则由 $\alpha\in S_n(k)$ 及引理 1 可得 $\delta_1\in E(S_n(k))$. 令

$$y=\begin{cases}\min A_j & a_j\in A_j\backslash\{\min A_j\}\\ \max A_j & a_j\notin A_j \text{ 或 } a_j=\min A_j\end{cases}$$

则 $y\in A_j$ 且 $y\neq a_j$. 注意到：如果 $a_j\in A_j\backslash\{\min A_j\}$，则 $a_j\in A_j\backslash\{y\}$；如果 $a_j\notin A_j$ 或 $a_j=\min A_j$，则 $\min A_j\in A_j\backslash\{y\}$. 令

$$x\beta_1=\begin{cases}x & x=y\\ a_j & x\in A_j\backslash\{y\}\\ a_i & x\in A_i,\ i\neq j\end{cases}$$

则 $\alpha=\delta_1\beta_1$. 显然 $\beta_1\in S_n(k)$（因为 $\alpha\in S_n(k)$）且 $s(\beta_1)=s(\alpha)-1$. 对 β_1 进行类似于 α 的讨论，必存在 $\delta_2\in E(S_n(k))$，$\beta_2\in S_n(k)$，使得：

$$\alpha=\delta_1\delta_2\beta_2\qquad s(\beta_2)=s(\beta_1)-1=s(\alpha)-2$$

继续上述讨论，必存在 $\delta_2,\delta_3,\cdots,\delta_t\in E(S_n(k))$，$\beta_t\in S_n(k)$，使得 $\alpha=\delta_1\cdots\delta_t\beta_t$ 且 $s(\beta_t)=1$（注意到 $\beta_t\in E(S_n(k))$，因为 $s(\beta_t)=1$），从而

$$\alpha\in\langle E(S_n(k))\rangle$$

再由 α 的任意性可得

$$S_n(k)=\langle E(S_n(k))\rangle$$

引理 3　设 $1\leqslant k\leqslant n$ 且 $1\leqslant s\leqslant n-2$，则

$$E(J_s^{\diamond}(k))\subseteq\langle E(J_{s+1}^{\diamond}(k))\rangle$$

证　当 $s=1$ 时，任取

$$\alpha\in\begin{pmatrix}[n]\\ a\end{pmatrix}\in E(J_1^{\diamond}(k))$$

则由引理 1 知 $a\leqslant k$.

若 $k=1$，则 $a=1$. 令：

$$\beta=\begin{pmatrix}1 & \{2,\cdots,n\}\\ a & 2\end{pmatrix}\qquad \gamma=\begin{pmatrix}\{1,2\} & \{3,\cdots,n\}\\ a & 3\end{pmatrix}$$

则 $\beta,\gamma\in E(J_2^{\diamond}(k))$ 且 $\alpha=\beta\gamma$.

若 $k\neq 1$，设 $b=\min([n]\backslash\{1,a\})$，则显然 $a\neq b$. 令：

$$\beta=\begin{pmatrix}1 & \{2,\cdots,n\}\\ 1 & 2\end{pmatrix}\qquad \gamma=\begin{pmatrix}\{1,\cdots,n-1\} & n\\ 1 & n\end{pmatrix}\qquad \delta=\begin{pmatrix}\{1,a\} & [n]\backslash\{1,a\}\\ a & b\end{pmatrix}$$

则 $\beta,\gamma,\delta\in E(J_2^{\diamond}(k))$ 且 $\alpha=\beta\gamma\delta$.

当 $s\geqslant 2$ 时，任取

$$\alpha=\begin{pmatrix}A_1 & A_2 & \cdots & A_s\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_s\end{pmatrix}\in E(J_s^{\diamond}(k))$$

则由引理 1 可得 $a_i\in A_i(1\leqslant i\leqslant s)$. 由 $s\leqslant n-2$ 可知，存在 $k\in\{1,2,\cdots,s\}$，使得 $|A_k|\geqslant 3$，或者存在 $i,j\in\{1,2,\cdots,s\}$ 且 $i\neq j$，使得 $|A_i|=|A_j|=2$. 以下我们分两种情形证明 $\alpha\in\langle E(J_{s+1}^{\diamond}(k))\rangle$.

情形 1　存在 $k\in\{1,2,\cdots,s\}$，使得 $|A_k|\geqslant 3$. 注意到 $a_i\in A_i(1\leqslant i\leqslant s)$. 设：

$$c_k=\min(A_k\backslash\{a_k\})\qquad d_k=\min(A_k\backslash\{a_k,c_k\})$$

令：

$$\beta=\begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_{k-1} & a_k & A_k\backslash\{a_k\} & A_{k+1} & \cdots & A_s \\ a_1 & \cdots & a_{k-1} & a_k & c_k & a_{k+1} & \cdots & a_s \end{pmatrix}$$

$$\gamma=\begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_{k-1} & \{a_k, c_k\} & A_k\backslash\{a_k, c_k\} & A_{k+1} & \cdots & A_s \\ a_1 & \cdots & a_{k-1} & a_k & d_k & a_{k+1} & \cdots & a_s \end{pmatrix}$$

则由 $\alpha \in S_n(k)$ 及引理 1 可得 $\beta,\gamma \in E(J^{\diamond}_{s+1}(k))$ 且 $\alpha=\beta\gamma$.

情形 2 存在 $i,j \in \{1, 2, \cdots, s\}$ 且 $i \neq j$，使得

$$|A_i|=|A_j|=2$$

注意到 $a_i \in A_i(1 \leqslant i \leqslant s)$，设：

$$A_i=\{a_i, b_i\} \qquad A_j=\{a_j, b_j\}$$

令：

$$\beta=\begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_{i-1} & a_i & b_i & A_{i+1} & \cdots & A_s \\ a_1 & \cdots & a_{i-1} & a_i & b_i & a_{i+1} & \cdots & a_s \end{pmatrix}$$

$$\gamma=\begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_{j-1} & a_j & b_j & A_{j+1} & \cdots & A_s \\ a_1 & \cdots & a_{j-1} & a_j & b_j & a_{j+1} & \cdots & a_s \end{pmatrix}$$

则由 $\alpha \in S_n(k)$ 及引理 1 可得 $\beta,\gamma \in E(J^{\diamond}_{s+1}(k))$ 且 $\alpha=\beta\gamma$.

综上所述，由 α 的任意性可知

$$E(J^{\diamond}_s(k)) \subseteq \langle E(J^{\diamond}_{s+1}(k))\rangle \qquad 1 \leqslant s \leqslant n-2$$

类似于文献[9]，我们用符号 $[i \to j](i \neq j)$ 表示半群 Sing_n 中秩为 $n-1$ 的幂等元 ε，这里 $i\varepsilon=j$，$x\varepsilon=x(x \neq i)$. 设 E_{n-1} 是半群 Sing_n 中秩为 $n-1$ 的幂等元之集，则

$$E_{n-1}=\{[i \to j]: 1 \leqslant i,j \leqslant n \text{ 且 } i \neq j\}$$

任意取定 $1 \leqslant k \leqslant n-1$，令

$$E^{\Delta}(k)=\{[i \to j]: 1 \leqslant i \leqslant k < j \leqslant n\}$$

则易验证

$$E(J^{\diamond}_{n-1}(k))=E_{n-1}\backslash E^{\Delta}(k)$$

引理 4 设 $1 \leqslant k \leqslant n$，则 $S_n(k)=\langle E_{n-1}\backslash E^{\Delta}(k)\rangle$.

证 注意到

$$E(S_n(k))=\bigcup_{k=1}^{n-1} E(J^{\diamond}_k(k))$$

由引理 2、引理 3 可得

$$S_n(k)=\langle E(J^{\diamond}_{n-1})\rangle$$

从而由

$$E(J^{\diamond}_{n-1}(k))=E_{n-1}\backslash E^{\Delta}(k)$$

可得

$$S_n(k)=\langle E_{n-1}\backslash E^{\Delta}(k)\rangle$$

为方便起见，我们用符号 $\begin{bmatrix} A_1 & \cdots & A_r \\ a_1 & \cdots & a_r \end{bmatrix}$ 表示半群 Sing_n 中满足如下条件的元素 α：

$$A_k\alpha=a_k \qquad 1 \leqslant k \leqslant r$$

$$x\alpha=x \qquad x \in [n]\backslash(A_1 \cup \cdots \cup A_r)$$

利用上述符号，显然有：

$$[i \to i+1]=\begin{bmatrix} \{i, i+1\} \\ i+1 \end{bmatrix}$$

$$[i \to i-1] = \begin{bmatrix} \{i, i-1\} \\ i-1 \end{bmatrix}$$

令：

$$E_{n-1}^{\vartriangle} = \{[i \to i+1]: 1 \leqslant i \leqslant n-1\}$$

$$E_{n-1}^{\triangledown\triangledown} = \{[j \to i]: 1 \leqslant i < j \leqslant n \text{ 且 } j \neq i+1\}$$

任意取定 $1 \leqslant k \leqslant n-1$，令：

$$E_{n-1}^{\vartriangle}(k) = E_{n-1}^{\vartriangle} \setminus \{[k \to k+1]\}$$

$$G(k) = E_{n-1}^{\triangledown\triangledown} \cup E_{n-1}^{\vartriangle}(k) \cup \{[k+1 \to k]\}$$

则显然有：

$$G(k) \subseteq E(J_{n-1}^{\diamondsuit}(k)) \qquad |G(k)| = \frac{n(n-1)}{2}$$

引理 5　设 $n \geqslant 3$，则

$$S_n(k) = \begin{cases} \langle G(k) \rangle & 1 \leqslant k \leqslant n-1 \text{ 且 } k \neq 2 \\ \langle G(k) \cup \{[2 \to 1]\} \rangle & k = 2 \end{cases}$$

证　由引理 4 可得

$$S_n(k) = \langle E_{n-1} \setminus E^{\vartriangle}(k) \rangle$$

只需要证明：

$$E_{n-1} \setminus E^{\vartriangle}(k) \subseteq \langle G(k) \rangle \qquad 1 \leqslant k \leqslant n-1, k \neq 2$$

$$E_{n-1} \setminus E^{\vartriangle}(k) \subseteq \langle G(k) \cup \{[2 \to 1]\} \rangle \qquad k = 2$$

任意取$[a \to b] \in E_{n-1} \setminus E^{\vartriangle}(k)$，分以下 3 种情形讨论：

情形 1　$a > b$. 若 $a > b+1$，则

$$[a \to b] \in E_{n-1}^{\triangledown\triangledown} \subseteq G(k) \subseteq \langle G(k) \rangle$$

若 $a = b+1$ 且 $a = k+1$，则

$$[a \to b] = [k+1 \to k] \in G(k) \subseteq \langle G(k) \rangle$$

若 $a = b+1$ 且 $a \neq k+1$，则

$$[a-1 \to a] \neq [k \to k+1]$$

从而

$$[a-1 \to a] \in E_{n-1}^{\vartriangle}(k) \subseteq G(k)$$

注意到 $a > b \geqslant 1$，以下分 3 种子情形讨论：

子情形 1.1　$a \neq k$. 注意到

$$[a \to a+1] \in E_{n-1}^{\vartriangle}(k) \subseteq G(k)$$

且

$$[a+1 \to a-1] \in E_{n-1}^{\triangledown\triangledown} \subseteq G(k)$$

令

$$\beta = [a-1 \to a][a+1 \to a-1][a \to a+1]$$

则 $\beta \in \langle G(k) \rangle$，且

$$\beta = \begin{bmatrix} \{a-1, a\} \\ a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{a-1, a+1\} \\ a-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{a, a+1\} \\ a+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{a-1, a\} & a+1 \\ a+1 & a-1 \end{bmatrix}$$

于是

$$\beta^2 = \begin{bmatrix} \{a-1, a\} & a+1 \\ a+1 & a-1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} \{a-1, a\} \\ a-1 \end{bmatrix} = [a \to a-1]$$

从而

$$[a\to b]=[a\to a-1]=\beta^2\in\langle G(k)\rangle$$

子情形 1.2 $a=k=2$. 显然 $b=a-1=1$，从而

$$[a\to b]=[2\to 1]\in\langle G(k)\cup\{[2\to 1]\}\rangle$$

子情形 1.3 $a=k\geqslant 3$. 显然 $b=a-1=k-1$. 注意到

$$[k-1\to k],[k-2\to k-1]\in E_{n-1}^{\Delta}(k)\subseteq G(k)$$

且

$$[k\to k-2]\in E_{n-1}^{\nabla\nabla}\subseteq G(k)$$

令

$$\beta=[k-1\to k][k-2\to k-1][k\to k-2]$$

则 $\beta\in\langle G(k)\rangle$，且

$$\beta=\begin{bmatrix}\{k-1,k\}\\ k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\{k-2,k-1\}\\ k-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\{k-2,k\}\\ k-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k-2 & \{k-1,k\}\\ k-1 & k-2\end{bmatrix}$$

于是

$$\beta^2=\begin{bmatrix}k-2 & \{k-1,k\}\\ k-1 & k-2\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}\{k-1,k\}\\ k-1\end{bmatrix}=[k\to k-1]$$

从而

$$[a\to b]=[k\to k-1]=\beta^2\in\langle G(k)\rangle$$

情形 2 $a<b$. 若 $b=a+1$，则由

$$[a\to a+1]=[a\to b]\in E_{n-1}\backslash E^{\Delta}(k)$$

可得 $a\neq k$，从而

$$[a\to b]=[a\to a+1]\in E_{n-1}^{\Delta}(k)\subseteq G(k)$$

若 $b>a+1$，则

$$[b\to a]\in E_{n-1}^{\nabla\nabla}\subseteq G(k)$$

注意到

$$E^{\Delta}(k)=\{[i\to j]:1\leqslant i\leqslant k<j\leqslant n\}$$

由$[a\to b]\in E_{n-1}\backslash E^{\Delta}(k)$可得 $k\notin\{a,\cdots,b-1\}$，从而

$$[b-1\to b],\cdots,[a\to a+1]\in E_{n-1}^{\Delta}(k)\subseteq G(k)$$

令

$$\beta=[b\to a][b-1\to b]\cdots[a\to a+1]$$

则 $\beta\in\langle G(k)\rangle$，且

$$\beta=\begin{bmatrix}\{a,b\}\\ a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\{b-1,b\}\\ b\end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix}\{a,a+1\}\\ a+1\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}\{a,b\}\\ a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & \cdots & b-2 & b-1\\ a+1 & \cdots & b-1 & b\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}\{a,b\} & a+1 & \cdots & b-1\\ a+1 & a+2 & \cdots & b\end{bmatrix}$$

于是

$$\beta^{b-a}=\begin{bmatrix}\{a,b\} & a+1 & \cdots & b-1\\ a+1 & a+2 & \cdots & b\end{bmatrix}^{b-a}=\begin{bmatrix}\{a,b\}\\ b\end{bmatrix}=[a\to b]$$

从而

$$[a \to b]=\beta^{b-a} \in \langle G(k)\rangle$$

综上所述，我们已证明：若 $1 \leqslant k \leqslant n-1$ 且 $k \neq 2$，则 $[a \to b] \in \langle G(k)\rangle$；若 $k=2$，则 $[a \to b] \in \langle G(k) \cup \{[2 \to 1]\}\rangle$. 再由 $[a \to b]$ 的任意性可得：

$$E_{n-1} \backslash E^{\Delta}(k) \subseteq \langle G(k)\rangle \qquad 1 \leqslant k \leqslant n-1,\ k \neq 2$$

$$E_{n-1} \backslash E^{\Delta}(k) \subseteq \langle G(k) \cup \{[2 \to 1]\}\rangle \qquad k=2$$

引理 6　设 $1 \leqslant k \leqslant n-1$，$G$ 是 $S_n(k)$ 的生成集，则对任意 $1 \leqslant i < j \leqslant n$，有

$$|G \cap R^{\diamondsuit}_{(i,j)}(k)| \geqslant 1$$

证　设 $\beta=[j \to i]$，则显然 $\beta \in S_n(k) \cap R^{\diamondsuit}_{(i,j)}(k)$. 由 G 是 $S_n(k)$ 的生成集可知，存在 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r \in G$，使得 $\beta=\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r (r \geqslant 1)$，于是由 $|\mathrm{im}(\beta)|=n-1$（因为 $\beta \in J^{\diamondsuit}_{n-1}$）及 $|\mathrm{im}(\alpha_i)| \leqslant n-1$（因为 $\alpha_i \in G \subseteq S_n(k) \subseteq \mathrm{Sing}_n$）可推出

$$|\mathrm{im}(\alpha_1)|=n-1$$

于是 $\ker(\beta)=\ker(\alpha_1)$，从而 $\beta \mathscr{R}^{\diamondsuit} \alpha_1$. 故 $\alpha_1 \in G \cap R^{\diamondsuit}_{(i,j)}(k)$（因为 $\beta \in R^{\diamondsuit}_{(i,j)}(k)$）. 因此

$$|G \cap R^{\diamondsuit}_{(i,j)}(k)| \geqslant 1$$

引理 7　设 $n \geqslant 3$，G 是 $S_n(2)$ 的生成集，则 $|G \cap R^{\diamondsuit}_{(1,2)}(2)| \geqslant 2$.

证　设 $\varepsilon \in \{[1 \to 2], [2 \to 1]\}$，则 $\varepsilon \in S_n(2) \cap R^{\diamondsuit}_{(1,2)}(2)$. 由 G 是 $S_n(k)$ 的生成集可知，存在 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r \in G$，使得 $\varepsilon=\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r (r \geqslant 1)$. 由 $\varepsilon \in J^{\diamondsuit}_{n-1}$ 可得 $\alpha_r \in J^{\diamondsuit}_{n-1}$（否则 $|\mathrm{im}(\varepsilon)|=|\mathrm{im}(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r)| \leqslant |\mathrm{im}(\alpha_r)| \leqslant n-2$，矛盾），于是

$$|\mathrm{im}(\varepsilon)|=|\mathrm{im}(\alpha_r)|=n-1$$

从而

$$\mathrm{im}(\varepsilon)=\mathrm{im}(\alpha_r)$$

即 $\varepsilon \mathscr{L}^{\diamondsuit} \alpha_r$. 我们断言 $\alpha_r \mathscr{H}^{\diamondsuit} \varepsilon$. 由 $\alpha_r \in G \subseteq S_n(2)$ 可得 $1\alpha_r \leqslant 2$ 且 $2\alpha_r \leqslant 2$. 注意到 $\alpha_r \in J^{\diamondsuit}_{n-1}$.

若 $\varepsilon=[1 \to 2]$，则

$$\mathrm{im}(\alpha_r)=\mathrm{im}(\varepsilon)=X_n \backslash \{1\}$$

于是

$$1\alpha_r=2\alpha_r=2$$

从而

$$\ker(\alpha_r)=\ker(\varepsilon)$$

即 $\alpha_r \mathscr{R}^{\diamondsuit} \varepsilon$. 因此 $\alpha_r \mathscr{H}^{\diamondsuit} \varepsilon$.

若 $\varepsilon=[2 \to 1]$，则

$$\mathrm{im}(\alpha_r)=\mathrm{im}(\varepsilon)=X_n \backslash \{2\}$$

于是

$$1\alpha_r=2\alpha_r=1$$

从而

$$\ker(\alpha_r)=\ker(\varepsilon)$$

即 $\alpha_r \mathscr{R}^{\diamondsuit} \varepsilon$.

因此 $\alpha_r \mathscr{H}^{\diamondsuit} \varepsilon$. 再由 $\mathrm{im}([1 \to 2]) \neq \mathrm{im}([2 \to 1])$ 可得 $([1 \to 2], [2 \to 1]) \notin \mathscr{H}^{\diamondsuit}$，从而 $|G \cap R^{\diamondsuit}_{(1,2)}(2)| \geqslant 2$.

本文的主要结论为：

定理 1　设 $n \geqslant 3$，则

$$\operatorname{rank} S_n(k)=\operatorname{idrank} S_n(k)=\begin{cases}\dfrac{n(n-1)}{2} & 1\leqslant k\leqslant n-1,\ k\neq 2\\ \dfrac{n(n-1)}{2}+1 & k=2\end{cases}$$

证 注意到:

$$G(k)\subseteq E(J_{n-1}^{\diamond}(k)) \qquad |G(k)|=\frac{n(n-1)}{2}$$

由引理 5 可得

$$S_n(k)=\begin{cases}\langle G(k)\rangle & 1\leqslant k\leqslant n-1,\ k\neq 2\\ \langle G(k)\cup\{[2\to 1]\}\rangle & k=2\end{cases}$$

从而

$$\operatorname{rank} S_n(k)\leqslant\operatorname{idrank} S_n(k)\leqslant\begin{cases}\dfrac{n(n-1)}{2} & 1\leqslant k\leqslant n-1,\ k\neq 2\\ \dfrac{n(n-1)}{2}+1 & k=2\end{cases}$$

由引理 6 可知,$S_n(k)$ 的任意生成集都必须覆盖 $S_n(k)$ 的顶端 $\mathscr{J}^{\diamond}$-类 $J_{n-1}^{\diamond}$ 中每个 $\mathscr{R}^{\diamond}$-类. 注意到 $J_{n-1}^{\diamond}$ 有 $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 个 $\mathscr{R}^{\diamond}$-类,再由引理 7 可得

$$\operatorname{rank} S_n(k)\geqslant\begin{cases}\dfrac{n(n-1)}{2} & 1\leqslant k\leqslant n-1,\ k\neq 2\\ \dfrac{n(n-1)}{2}+1 & k=2\end{cases}$$

因此

$$\operatorname{rank} S_n(k)=\operatorname{idrank} S_n(k)=\begin{cases}\dfrac{n(n-1)}{2} & 1\leqslant k\leqslant n-1,\ k\neq 2\\ \dfrac{n(n-1)}{2}+1 & k=2\end{cases}$$

参考文献:

[1] GOMES G M S, HOWIE J M. On the Ranks of Certain Finite Semigroups of Transformations [J]. Math Proc Camb Phil Soc, 1987, 101(3): 395-403.

[2] GOMES G M S, HOWIE J M. On the Ranks of Certain Semigroups of Order-Preserving Transformations [J]. Semigroup Forum, 1992, 45(1): 272-282.

[3] GARBA G U. On the Idempotent Ranks of Certain Semigroups of Order-Preserving Transformations [J]. Portugal Math, 1994, 51(2): 185-204.

[4] BARNES G, LEVI I. On Idempotent Ranks of Semigroups of Partial Transformations [J]. Semigroup Forum, 2005, 70(1): 81-96.

[5] 赵 平, 游泰杰, 徐 波. 半群 CPO_n 的秩 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2011, 33(6): 106-110.

[6] ZHAO P. On the Ranks of Certain Semigroups of Orientation Preserving Transformations [J]. Communications in Algebra, 2011, 39(11): 4195-4205.

[7] 赵 平. 半群 $PK^{-}(n, r)$的幂等元秩 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2012, 37(10): 41-44.

[8] SOMMANEE W, SANWONG J. Rank and Idempotent Rank of Finite Full Transformation Semigroups with Restricted Range [J]. Semigroup Forum, 2013, 87(1): 230-242.

[9] 张传军, 赵 平. 半群 $O_n(k)$的秩 [J]. 数学的实践与认识, 2014, 44(9): 243-247.

[10] FERNANDES V H，SANWONG J. On the Ranks of Semigroups of Transformations on a Finite Set with Restricted Range [J]. Algebra Colloquium，2014，21(3)：497－510.

[11] ZHAO P，FERNANDES V H. The Ranks of Ideals in Various Transformation Monoids [J]. Communications in Algebra，2015，43(2)：674－692.

[12] TINPUN K，KOPPITZ J. Relative Rank of the Finite Full Transformation Semigroup with Restricted Range [J]. Acta Mathematica Universitatis Comenianae，2016(2)：347－356.

[13] HOWIE J M. An Introduction to Semigroup Theory [M]. London：Academic Press，1976.

Ranks of the Semigroup $S_n(k)$

ZHANG Chuan-jun[1]，　ZHU Hua-wei[2]

1. Compulsory Education Lab，Guangzhou Academy of Educational Research，Guangzhou 510006，China；

2. Mathematics Institute，Shenzhen Middle School，Shenzhen Guangdong 518001，China

Abstract：Let Sing_n be a singular transformation semigroup on $[n]$. For an arbitrary integer $1\leqslant k\leqslant n-1$, the rank and idempotent rank of the semigroup $S_n(k)=\{\alpha\in \mathrm{Sing}_n:\ \forall x\in[n],\ x\leqslant k\Rightarrow x\alpha\leqslant k\}$ are studied. We show that the semigroup $S_n(k)$ is generated by the idempotents of rank $n-1$, and obtain that the rank and idempotent rank of the semigroup $S_n(k)(k\neq 2)$ are both equal to $\frac{n(n-1)}{2}$, and the rank and idempotent rank of the semigroup $S_n(2)$ are both equal to $\frac{n(n-1)}{2}+1$.

Key words：singular transformation semigroup；idempotent rank；rank

责任编辑　廖　坤