DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2017.06.012

带有扰动项的 Choquard 方程正解的多重性①

李宏瑶， 吴行平， 唐春雷

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：利用 Ekeland 变分原理、山路引理，研究带有陡峭位势和扰动项的 Choquard 方程

$$-\Delta u+V_{\mu}u=(K_{\alpha}(x)*|u|^{p})|u|^{p-2}u+f(x)\qquad x\in\mathbb{R}^{N}$$

其中当 V_{μ}，f 满足一定条件时，此方程有两个正解.

关 键 词：Choquard 方程；陡峭位势；Ekeland 变分原理；山路引理

中图分类号：O176.3 **文献标志码**：A **文章编号**：1673-9868(2017)06-0074-07

本文主要研究方程

$$-\Delta u+V_{\mu}u=(K_{\alpha}(x)*|u|^{p})|u|^{p-2}u+f(x)\qquad x\in\mathbb{R}^{N}\tag{1}$$

正解的多重性. 其中 $N\geqslant 3$，$\alpha\in(0,N)$，$p\in\left(\dfrac{N+\alpha}{N},\dfrac{N+\alpha}{N-2}\right)$，$f$ 满足条件(f_1)，(f_2)：

(f_1) $f\in L^{2}(\mathbb{R}^{N})\backslash\{0\}$；

(f_2) $f(x)\geqslant 0\ (\forall x\in\mathbb{R}^{N})$.

$V_{\mu}(x)=1+\mu g(x)$，$\mu>0$ 是一个变量，$g(x)$ 满足条件(g_1)，(g_2)，(g_3)：

(g_1) $g(x)\in C(\mathbb{R}^{N},\mathbb{R})$，$g(x)\geqslant 0\ (\forall x\in\mathbb{R}^{N})$；

(g_2) $\Omega=\mathrm{int}\ g^{-1}(0)\neq\varnothing$ 是有界的光滑区域，且 $\overline{\Omega}=g^{-1}(0)$；

(g_3) 存在 $M>0$，$\{x\in\mathbb{R}^{N}\mid g(x)\leqslant M\}$ 是非空且测度有限的集合.

$K_{\alpha}:\mathbb{R}^{N}\longrightarrow\mathbb{R}$ 是 Riesz 位势，

$$K_{\alpha}(x)=\frac{\Gamma\left(\dfrac{N-\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\pi^{\frac{N}{2}}2^{\alpha}|x|^{N-\alpha}}$$

带 Hartree 项的椭圆方程是最近几年的研究热点之一. 文献[1]研究并得到了这类方程最小解的存在性和唯一性. 文献[2]得到了其基态解及相关性质. 文献[3]研究了这类方程的正解和变号解. 文献[4]提出了带有扰动项的 Choquard 方程，并且用集中紧性原理和分歧理论证明了方程存在两个正解及分歧点. 文献[5-6]研究了带有陡峭位势的 Choquard 方程

① 收稿日期：2016-12-27

基金项目：国家自然科学基金项目(11471267).

作者简介：李宏瑶(1991-)，女，四川眉山人，硕士研究生，主要从事非线性分析的研究.

通信作者：吴行平，教授.

$$-\Delta u+V_\mu u=\left(\frac{1}{|x|^\alpha}*|u|^p\right)|u|^{p-2}u \qquad x\in\mathbb{R}^N \tag{2}$$

并得到了方程(2)基态解的存在性和解的集中性. 受以上结果的启发，本文主要研究带有扰动项的这类方程在 N 维空间下正解的多重性.

本文主要的结果是：

定理1 若 $N\geqslant 3$，$\alpha\in(0,N)$，$p\in\left(\frac{N+\alpha}{N},\frac{N+\alpha}{N-2}\right)$，$V_\mu(x)=1+\mu g(x)$，函数 f，g 满足条件 $(\mathrm{f}_1)-(\mathrm{f}_2)$，$(\mathrm{g}_1)-(\mathrm{g}_3)$. 则存在常数 μ_*，δ，使得当 $\mu>\mu_*>0$，$|f|_2<\delta$ 时，方程(1)存在两个正解.

为了证明定理，令

$$\mathscr{H}=\{u\in H^1(\mathbb{R}^N)\mid\int_{\mathbb{R}^N}V_\mu u^2\mathrm{d}x<+\infty\}$$

由文献[6]知 $\mathscr{H}$ 是希尔伯特空间，其内积和范数分别为：

$$\langle u,v\rangle_\mu=\int_{\mathbb{R}^N}(\nabla u\cdot\nabla v+V_\mu uv)\mathrm{d}x \qquad \|u\|_\mu=\langle u,u\rangle_\mu^{\frac{1}{2}}$$

易知方程(1)的弱解和泛函 I 的临界点是一一对应的. 定义方程(1)的能量泛函 $I:\mathscr{H}\longrightarrow\mathbb{R}$：

$$I(u)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2+V_\mu u^2)\mathrm{d}x-\frac{1}{2p}\int_{\mathbb{R}^N}(K_\alpha(x)*|u^+|^p)|u^+|^p\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^N}fu\,\mathrm{d}x \qquad x\in\mathbb{R}^N$$

其中

$$u^+=\max\{u,0\} \qquad u^-=\min\{u,0\} \qquad u=u^+-u^-$$

由条件 $(\mathrm{f}_1)-(\mathrm{f}_2)$，$(\mathrm{g}_1)-(\mathrm{g}_3)$ 可知，$I\in C^1(\mathscr{H},\mathbb{R})$. 若 $u\in\mathscr{H}$ 是 I 的一个临界点，即对任意的 $v\in\mathscr{H}$，有

$$\langle I'(u),v\rangle=\int_{\mathbb{R}^N}(\nabla u\cdot\nabla v+V_\mu(x)u\,v)\,\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^N}(K_\alpha(x)*|u^+|^p)|u^+|^{p-1}v\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^N}fv\mathrm{d}x=0$$

引理1 若 $\{u_n\}\subset\mathscr{H}$ 是 I 的有界 $(\mathrm{PS})_c$ 序列，$u_n\rightharpoonup u_0\in\mathscr{H}$. 那么 $u_n\to u_0\in\mathscr{H}$，$I(u_0)=c$. 反之，$c\geqslant I(u_0)+m$. 其中：

$$I_0(v_n)=I(v_n)+\int_{\mathbb{R}^N}f\,v_n\mathrm{d}x$$

$$0<m=\inf\{I_0\mid u\in\mathscr{H},u\in\mathscr{M}\}$$

$$\mathscr{M}=\{u\in\mathscr{H}\backslash\{0\}\mid\|u\|_\mu^2=\int_{\mathbb{R}^N}(K_\alpha(x)*|u^+|^p)|u^+|^p\mathrm{d}x\}$$

证 因为 $\{u_n\}$ 是 I 的有界 $(\mathrm{PS})_c$ 序列，则有：

$$I(u_n)=c+o(1) \qquad \langle I'(u_n),u_n\rangle=o(1)$$

由 $u_n\rightharpoonup u_0\in\mathscr{H}$，令 $v_n=u_n-u_0$，在 $\mathscr{H}$ 中有 $v_n\rightharpoonup 0$. 类似文献[6]中引理2.6的相关计算，可得

$$\begin{aligned}c+o(1)=I(u_n)=I(u_0)+I(v_n)+o(1)=&\\ I(u_0)+I_0(v_n)-\int_{\mathbb{R}^N}fv_n\mathrm{d}x+o(1)=&\\ I(u_0)+I_0(v_n)+o(1)&\end{aligned} \tag{3}$$

在 $\mathscr{H}$ 中，当 $v_n\to 0$ 时，有 $u_n\to u_0\in\mathscr{H}$，$\lim\limits_{n\to\infty}I(u_n)=I(u_0)=c$.

当 $\|v_n\|_\mu\to\eta>0$ 时，取一个序列 $\{t_n\}$，满足

$$t_n^{2p-2}=\frac{\|v_n\|_\mu^2}{\int_{\mathbb{R}^N}(K_\alpha(x)*|v_n{}^+|^p)|v_n{}^+|^p\mathrm{d}x}$$

化简整理可得

$$\| t_n v_n \|_\mu^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (K_\alpha(x) * |t_n v_n^+|^p) |t_n v_n^+|^p \mathrm{d}x$$

故

$$\langle I_0'(t_n v_n), t_n v_n \rangle = 0$$

所以 $t_n v_n \in \mathscr{M}$. 由文献[6]可知，$\{v_n\}$ 是 $I_0(u)$ 的 $(\mathrm{PS})_c$ 序列，且：

$$I_0(u_n) = c + o(1)$$

$$\langle I_0'(v_n), v_n \rangle = \| v_n \|_\mu^2 - \int_{\mathbb{R}^N} (K_\alpha(x) * |v_n^+|^p) |v_n^+|^p \mathrm{d}x = o(1)$$

$$t_n^{2p-2} = \frac{\| v_n \|_\mu^2}{\| v_n \|_\mu^2 - \langle I_0'(v_n), v_n \rangle + o(1)} = \frac{1}{1 - \dfrac{\langle I_0'(v_n), v_n \rangle}{\| v_n \|_\mu^2} + o(1)} \to 1$$

根据 m 的定义，有

$$\begin{aligned} m &\leqslant \lim_{n\to\infty} I_0(t_n v_n) = \lim_{n\to\infty} (I_0(t_n v_n) - I_0(v_n) + I_0(v_n)) = \\ &\lim_{n\to\infty} \left((t_n^2 - 1) \| v_n \|_\mu^2 + (t_n^{2p} - 1) \int_{\mathbb{R}^N} (K_\alpha(x) * |v_n^+|^p) |v_n^+|^p \mathrm{d}x + I_0(v_n) \right) = \\ &\lim_{n\to\infty} I_0(v_n) \end{aligned}$$

等式(3)两边取极限，有 $c \geqslant I(u_0) + m$.

引理 2　令 $S_r = \{u \in \mathscr{H}: \| u \|_\mu = r\}$，$B_r = \{u \in \mathscr{H}: \| u \|_\mu < r\}$，$\overline{B}_r$ 是一个闭凸集. 则存在常数 $r, \rho > 0$，使得：

$$I(u)|_{u \in S_r} \geqslant \rho > 0 \qquad \inf_{u \in B_r} I(u) < 0 \tag{4}$$

证　由 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式[7]可知

$$\int_{\mathbb{R}^N} (K_\alpha(x) * |u^+|^p) |u^+|^p \mathrm{d}x \leqslant c_{N,\alpha,p} \left(\int_{\mathbb{R}^N} u^{\frac{2Np}{N+\alpha}}(x) \mathrm{d}x \right)^{\frac{N+\alpha}{N}} = c_{N,\alpha,p} |u|_{\frac{Np}{N+\alpha}}^{2p} \tag{5}$$

当 $\mu > 0$ 时，根据 Sobolev 嵌入和范数的定义，存在常数 $b > 0$，有：

$$|u|_{\frac{Np}{N+\alpha}}^{2p} \leqslant b \| u \|^{2p} < b \| u \|_\mu^{2p}$$

$$|u|_2 \leqslant \| u \| \leqslant \| u \|_\mu$$

故存在 $r = \left(\dfrac{p}{2bc_{N,\alpha,p}} \right)^{\frac{1}{2p-2}}$，$\rho = \dfrac{r^2}{8} > 0$，当 $\| u \|_\mu = r$，$|f|_2 \leqslant \dfrac{r}{8}$ 时，有

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2} \| u \|_\mu^2 - \frac{1}{2p} \int_{\mathbb{R}^N} (K_\alpha(x) * |u^+|^p) |u^+|^p \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} fu \mathrm{d}x \geqslant \\ &\frac{1}{2} \| u \|_\mu^2 - \frac{c_{N,\alpha,p}}{2p} |u|_{\frac{Np}{N+\alpha}}^{2p} - |f|_2 |u|_2 \geqslant \\ &\frac{1}{2} \| u \|^2 - \frac{bc_{N,\alpha,p}}{2p} \| u \|^{2p} - |f|_2 \| u \| \geqslant \\ &\frac{1}{2} r^2 - \frac{bc_{N,\alpha,p}}{2p} r^{2p} - |f|_2 r \geqslant \frac{1}{4} r^2 - |f|_2 r \geqslant \\ &\frac{1}{8} r^2 > 0 \end{aligned}$$

当 $u \in \mathscr{H}$ 使得 $\int_{\mathbb{R}^N} fu\,\mathrm{d}x > 0$ 时，因为当 $t \to 0$ 时，有

$$I(tu)=\frac{t^2}{2}\|u\|_\mu^2-\frac{t^{2p}}{2p}\int_{\mathbb{R}^N}(K_\alpha(x)*|u^+|^p)|u^+|^p\mathrm{d}x-t\int_{\mathbb{R}^N}fu\,\mathrm{d}x<0$$

所以存在 t_0，使得 $t_0u \in B_r$，$\inf\limits_{u\in B_r} I(t_0u)<0$.

引理3 泛函 I 满足下列条件：

(i) 存在 $r,\rho>0$，使得当 $\|u\|_\mu=r$ 时，有 $I \geqslant \rho>0$；

(ii) 存在 $e \in \mathscr{H}$，使得 $\|e\|_\mu>r$ 且 $I(e)<0$.

证 (i) 由引理2已证. (ii) 当 $t>0$，$w>0$ 时，有：

$$I(u+tw)=\frac{1}{2}\|u+tw\|_\mu^2-\int_{\mathbb{R}^N}f(u+tw)\mathrm{d}x-$$

$$\frac{1}{2p}\int_{\mathbb{R}^N}(K_\alpha(x)*|u+tw|^p)|u+tw|^p\mathrm{d}x$$

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{I(u+tw)}{t^{2p}}=-\frac{1}{2p}\int_{\mathbb{R}^N}(K_\alpha(x)*|w|^p)|w|^p\mathrm{d}x<0$$

即 t 充分大时，存在 $\|u+t_0w\|_\mu>r$，使得 $I(u+t_0w)<0$. 故令 $e=u+t_0w$，则 $I(e)<0$.

引理4 设 $f_y(x)=(1+x^2)^p(1+y^2)^p-1-(x^2)^p(y^2)^p-p(x^2+y^2)$. 当 $x\in\mathbb{R}$，$y\in\mathbb{R}$，$\alpha\in(0,N)$，$p\in\left(\frac{N+\alpha}{N},\frac{N+\alpha}{N-2}\right)$ 时，$\min f_y(x)\geqslant 0$.

证 因为 $p\geqslant 1$，当 $x>0$ 时，有

$$\begin{aligned}f_y{}'(x)=&2px(1+y^2)^p(1+x^2)^{p-1}-2p(y^2)^px^{2p-1}-2px=\\&2px((1+y^2)^{p-1}(1+x^2)^{p-1}+y^2(1+y^2)^{p-1}(1+x^2)^{p-1})-\\&2px(y^2)^px^{2p-2}-2px>\\&2px(1+(y^2)^p(x^2)^{(p-1)})-2px(y^2)^px^{2p-2}-2px=0\end{aligned}$$

同理可得，当 $x<0$ 时，$f_y{}'(x)<0$，则函数 $f_y(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故函数 $f_y(x)$ 在零点取得极小值. 又因

$$f_y(0)=(1+y^2)^p-py^2-1\geqslant 1+py^2-py^2-1\geqslant 0$$

所以 $\min f_y(x)\geqslant 0$.

定理1的证明

由文献[8]中定理4.1的Ekeland变分原理可知，存在极小化序列 $\{u_n\}\subset\overline{B}_r$，使得：

$$I(u_n)\leqslant\inf_{u\in\overline{B}_r}I(u)+\frac{1}{n}$$

$$I(\varphi)\geqslant I(u_n)-\frac{1}{n}\|\varphi-u_n\| \qquad \varphi\in\overline{B}_r$$

由标准计算可知：

$$\|I'(u_n)\|\to 0 \qquad I(u_n)\to c_0$$

其中 c_0 是 I 在 $\overline{B}_r$ 中的极小值. 由 $\overline{B}_r$ 是一个闭凸集，$\{u_n\}$ 显然有界. 则存在 $u_*\in\overline{B}_r$，使得 $u_n\rightharpoonup u_*(x\in\mathscr{H})$. 又因为

$$c_0\leqslant I(u_*)<I(u_*)+m \qquad m>0$$

由引理1可知，在 $\mathscr{H}$ 中 $u_n\to u_*$，$\lim\limits_{n\to\infty}I(u_n)=I(u_*)=c_0<0$. 对任意 $v\in\mathscr{H}$，有

$$\lim_{n\to\infty}\langle I'(u_n), v\rangle=\langle I'(u_*), v\rangle=0$$

那么 u_* 是 I 的临界点，且 $u_*\neq 0$. 下证 $u_*\geqslant 0$. 当 $v=u_*^-$ 时，因为

$$\langle I'(u_*), u_*^-\rangle=-\|u_*^-\|_\mu^2-\int_{\mathbb{R}^N} fu_*^-\mathrm{d}x=0$$

所以

$$\|u_*^-\|_\mu^2=0,\ u_*=u_*^+\geqslant 0$$

由强极大值原理有 $u_*>0$. 所以 u_* 是方程(1) 的一个正解.

由引理 3 知，I 具有山路结构. 由山路引理[9]，存在序列 $\{u_n\}\subset\mathscr{H}$，使得当 $n\to\infty$ 时，有：

$$I(u_n)\to c\geqslant\rho>0\qquad I'(u_n)\to 0$$

其中：

$$\Gamma=\{\gamma\in C^1([0,1],\mathscr{H}):\gamma(0)=u_*,\ \gamma(1)=u_*+t_0w\}\qquad c=\inf_{\gamma\in\Gamma}\sup_{u\in\gamma}I(u)$$

首先对 c 估值，$c<I(u_*)+m$. 事实上，由引理 4 可知

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N}(K_\alpha(x)*((u_*+tw)^+)^p)((u_*+tw)^+)^p\mathrm{d}x>\\&\int_{\mathbb{R}^N}(K_\alpha(x)*|u_*|^p)|u_*|^p\mathrm{d}x+t^{2p}\int_{\mathbb{R}^N}(K_\alpha(x)*|w|^p)|w|^p\mathrm{d}x+\\&pt\int_{\mathbb{R}^N}(K_\alpha(x)*|u_*|^p)|u_*(x)|^{p-1}w(x)\mathrm{d}x+pt\int_{\mathbb{R}^N}(K_\alpha(x)*|u_*|^p)|u_*(y)|^{p-1}w(y)\mathrm{d}y\end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}I(u_*+tw)=&\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla(u_*+tw)|^2+V_\mu(x)(u_*+tw)^2)\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^N}f(u_*+tw)\mathrm{d}x-\\&\frac{1}{2p}\int_{\mathbb{R}^N}(K_\alpha(x)*((u_*+tw)^+)^p)((u_*+tw)^+)^p\mathrm{d}x<\\&\frac{1}{2}\|u_*\|_\mu^2+\frac{t^2}{2}\|w\|_\mu^2+t\int_{\mathbb{R}^N}(\nabla u_*\nabla w+V_\mu u_*w)\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^N}f(u_*+tw)\mathrm{d}x-\\&\frac{t^{2p}}{2p}\int_{\mathbb{R}^N}(K_\alpha(x)*|w|^p)|w|^p\mathrm{d}x-\frac{pt}{2p}\int_{\mathbb{R}^N}(K_\alpha(x)*|u_*|^p)|u_*(y)|^{p-1}|w(y)|\mathrm{d}y-\\&\frac{pt}{2p}\int_{\mathbb{R}^N}(K_\alpha(x)*|u_*|^p)|u_*(x)|^{p-1}|w(x)|\mathrm{d}x-\frac{1}{2p}\int_{\mathbb{R}^N}(K_\alpha(x)*|u_*|^p)|u_*|^p\mathrm{d}x=\\&I(u_*)+I_0(tw)-\frac{pt}{2p}\int_{\mathbb{R}^N}(K_\alpha(x)*|u_*|^p)|u_*(y)|^{p-1}|w(y)|\mathrm{d}y-t\int_{\mathbb{R}^N}fw\mathrm{d}x-\\&\frac{pt}{2p}\int_{\mathbb{R}^N}(K_\alpha(x)*|u_*|^p)|u_*(x)|^{p-1}|w(x)|\mathrm{d}x+t\int_{\mathbb{R}^N}(\nabla u_*\nabla w+V_\mu u_*w)\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{6}$$

又因 u_* 是方程(1) 的一个正解，则

$$\begin{aligned}&t\int_{\mathbb{R}^N}(\nabla u_*\cdot\nabla w+V_\mu(x)u_*w)\mathrm{d}x=\\&t\int_{\mathbb{R}^N}(K_\alpha(x)*|u_*|^p)|u_*|^{p-1}w\mathrm{d}x+t\int_{\mathbb{R}^N}fw\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{7}$$

根据(6),(7) 式可知

$$I(u_*+tw)<I(u_*)+I_0(tw)+\langle I'(u_*), u_*\rangle$$

设 w 是 I_0 的临界点[6]，当 $t=1$ 时，有

$$\langle I_0'(tw), w\rangle=0$$

即

$$\| w \|_{\mu}^{2} = \int_{\mathbb{R}^N} (K_{\alpha}(x) * |w^{+}|^{p}) |w^{+}|^{p} \mathrm{d}x$$

对 $I_0(tw)$ 关于 t 求二阶导，有

$$\begin{aligned} I_0''(tw) = & \| w \|_{\mu}^{2} - (2p-1)t^{2p-2}\int_{\mathbb{R}^N} (K_{\alpha}(x) * (w^{+})^{p})(w^{+})^{p} \mathrm{d}x = \\ & \| w \|_{\mu}^{2} - (2p-1)t^{2p-2} \| w \|_{\mu}^{2} = \\ & \| w \|_{\mu}^{2}(1-(2p-1)t^{2p-2}) \end{aligned}$$

当 $t \in \left(\frac{1}{(2p_1)^{\frac{1}{2p-2}}}, +\infty\right)$ 时，$I_0{}'(tw)$ 单调递减. 又因 $I_0{}'(w)=0$，所以当 $t>1$ 时，$I_0(tw)<I_0(w)$. 由 m 的定义，$I_0(tw)<I_0(w)<m$. 所以：

$$\sup_{t>0} I(u_{*}+tw) < I(u_{*})+m \qquad c < I(u_{*})+m$$

其次证明 $\{u_n\}$ 有界.

$$\begin{aligned} 1+c+o(1)\| u_n \|_{\mu} \geqslant & I(u_n) - \frac{1}{2p}\langle I'(u_n), u_n \rangle = \\ & \frac{1}{2}\| u_n \|_{\mu}^{2} - \frac{1}{2p}\int_{\mathbb{R}^N} (K_{\alpha}(x) * (u_n{}^{+})^{p})(u_n{}^{+})^{p} \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} f u_n \mathrm{d}x - \\ & \frac{1}{2p}\| u_n \|_{\mu}^{2} + \frac{1}{2p}\int_{\mathbb{R}^N} (K_{\alpha}(x) * (u_n{}^{+})^{p})(u_n{}^{+})^{p} \mathrm{d}x + \frac{1}{2p}\int_{\mathbb{R}^N} f u_n \mathrm{d}x \geqslant \\ & \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}\right)\| u_n \|_{\mu}^{2} - \left(1-\frac{1}{2p}\right)| f |_2 \| u_n \|_{\mu} \end{aligned}$$

当 $p>1$ 时，$\{u_n\}$ 在 $\mathscr{H}$ 中有界，从而存在子列(不妨记为 $\{u_n\}$) 及 $u_{**} \in \mathscr{H}$，使得当 $n \to \infty$ 时，在 $\mathscr{H}$ 中有 $u_n \rightharpoonup u_{**}$. 对任意 $\varphi \in \mathscr{H}$，有 $\langle I'(u_{**}), \varphi \rangle = 0$，故 u_{**} 是方程(1)的一个弱解.

当 $I(u_{**}) < I(u_{*}) < 0$ 时，$u_{**} \neq 0$;

当 $I(u_{**}) \geqslant I(u_{*})$ 时，根据 c 的估值，$c < I(u_{*}) + m \leqslant I(u_{**}) + m$. 由引理1知，在 $\mathscr{H}$ 中 $u_n \to u_{**}$，$\lim\limits_{n\to\infty} I(u_n) = I(u_{**}) = c > 0$. 则 $u_{**} \neq 0$. 下证 $u_{**} \geqslant 0$. 当 $\varphi = u_{**}^{-}$ 时，有

$$\langle I'(u_{**}), u_{**}^{-} \rangle = - \| u_{**}^{-} \|_{\mu}^{2} - \int_{\mathbb{R}^N} f u_{**}^{-} \mathrm{d}x = 0$$

所以 $\| u_{**}^{-} \|_{\mu}^{2} = 0$，$u = u_{**}^{+} \geqslant 0$. 再由强极大值原理知 $u_{**} > 0$. 综上可知 u_{*}，u_{**} 是方程(1)的两个正解.

参考文献：

[1] LIEB E H. Existence and Uniqueness of the Minimizing Solution of Choquard's Nonlinear Equation [J]. Studies in Appl Math, 1977, 57: 93-105.

[2] MOROZ V, VAN SCHAFTINGEN J. Groundstates of Nonlinear Choquard Equations: Existence, Qualitative Properties and Decay Asymptotics [J]. J Funct Anal, 2013, 265(2): 153-184.

[3] CLAPP M, SALAZAR D. Positive and Sign Changing Solutions to a Nonlinear Choquard Equation [J]. J Math Anal Appl, 2013, 407(1): 1-15.

[4] KÜPPER T, ZHANG Z J, XIA H Q. Multiple Positive Solutions and Bifurcation for an Equation Related to Choquard's Equation [J]. Proc Edinb Math Soc, 2003, 46(3): 597-607.

[5] LV D F. A Note on Kirchhoff-Type Equations with Hartree-Type Nonlinearities [J]. Nonlinear Anal, 2014, 99: 35-48.
[6] LV D F. Existence and Concentration of Solutions for a Nonlinear Choquard Equation [J]. Mediterr J Math, 2015, 12(3): 839-850.
[7] LIEB E H, LOSS M. Analysis [M]. 2th ed. Providence, RI: American Mathematical Society, 2001.
[8] MAWHIN J, WILLEM M. Critical Point Theory and Hamiltonian Systems [M]. New York: Springer-Verlag, 1989.
[9] WILLEN M. Minimax Theorems [M]. Boston: Birkhäuser, 1996.

Multiplicity of Positive Solutions for the Choquard Equation with a Disturbance Term

LI Hong-yao,　WU Xing-ping,　TANG Chun-lei
School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: In this article, we study a nonlinear Choquard equation with steep potential and a disturbance term

$$-\Delta u+V_{\mu}u=(K_{\alpha}(x)*|u|^{p})|u|^{p-2}u+f(x)\qquad x\in\mathbb{R}^{N}$$

Two positive solutions of the equation are obtained by the Ekeland variational principle and the mountain-pass lemma.

Key words: Choquard equation; steep potential; Ekeland variational principle; mountain-pass lemma

责任编辑　廖　坤