第 39 卷第 6 期　　西 南 大 学 学 报 (自然科学版)　　2017 年 6 月
Vol. 39　No. 6　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Jun.　2017

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2017.06.013

一类带 Hardy-Sobolev 临界指数的 Kirchhoff 方程正解的存在性[①]

唐榆婷，　唐春雷

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：利用变分原理和山路引理研究一类带 Hardy-Sobolev 临界指数的 Kirchhoff 方程，得到了该方程正解的存在性.

关　键　词：Kirchhoff 方程；Hardy-Sobolev 临界指数；山路引理；正解

中图分类号：O176.3　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673－9868(2017)06－0081－06

本文研究如下一类带 Hardy-Sobolev 临界指数的 Kirchhoff 方程：

$$\begin{cases} -\left(a+b\int_{\Omega}|\nabla u|^{2}\mathrm{d}x\right)\Delta u=\dfrac{u^{3}}{|x|}+f(x,u) & x\in\Omega \\ u=0 & x\in\partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

其中，$a>0$，$b>0$，Ω 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一个有界光滑区域，且 $0\in\Omega$. Sobolev 空间 $H_0^1(\Omega)$ 中的范数为

$$\|u\|=\left(\int_{\Omega}|\nabla u|^{2}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

当 $a=1$，$b=0$，$f(x,u)=0$ 时，方程(1) 已被广泛研究，文献[1] 得到了其正解的存在性. 当 $a>0$，$b\geqslant 0$ 时，方程(1) 为 Kirchhoff 方程. 近年来，Kirchhoff 方程引起了许多学者的兴趣，文献[2－5] 得到了很多有关 Kirchhoff 方程的临界指数正解的存在性结论. 但至今类似方程(1) 的带 Hardy-Sobolev 临界指数的奇异 Kirchhoff 方程仍未被研究. 受到文献[1，4] 的启发，本文将研究方程(1) 正解的存在情况. 我们定义 I 为方程(1) 对应的能量泛函，即

$$I(u)=\frac{a}{2}\|u\|^{2}+\frac{b}{4}\|u\|^{4}-\frac{1}{4}\int_{\Omega}\frac{(u^{+})^{4}}{|x|}\mathrm{d}x-\int_{\Omega}F(x,u^{+})\mathrm{d}x$$

其中 $u^{\pm}=\max\{\pm u,0\}$，$F(x,u)$ 为 $f(x,u)$ 的原函数，记

$$F(x,u)=\int_{0}^{u}f(x,s)\mathrm{d}s \qquad x\in\Omega,\ u\in\mathbb{R}$$

如果 $u\in H_0^1(\Omega)$ 且 $u>0$，并满足

$$\langle I'(u),v\rangle=(a+b\|u\|^{2})\int_{\Omega}(\nabla u,\nabla v)\mathrm{d}x-\int_{\Omega}\frac{(u^{+})^{3}v}{|x|}\mathrm{d}x-\int_{\Omega}f(x,u^{+})v\mathrm{d}x=0 \qquad \forall v\in H_0^1(\Omega)$$

我们称 u 是方程(1) 的正解.

本文主要的结果是：

---

① 收稿日期：2016－09－14
基金项目：国家自然科学基金项目(11471267).
作者简介：唐榆婷(1991－)，女，四川绵阳人，硕士研究生，主要从事非线性分析的研究.
通信作者：唐春雷，教授，博士研究生导师.

定理1 假设 $a>0$，$0<b<A^{-2}$，且 f 满足条件(f_1),(f_2)：

(f_1) $f\in C(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$ 且 $\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{f(x,t)}{t^3}=0$，当 $x\in\overline{\Omega}$ 时，一致地有 $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{f(x,t)}{t^5}=0$ 成立；

(f_2) 存在常数 ρ,$\rho>4$，使得对所有 $x\in\overline{\Omega}$，$t\in\mathbb{R}_+\setminus\{0\}$，有 $0<\rho F(x,t)\leqslant f(x,t)t$ 成立.
此时，方程(1)至少有一个正解.

1 预备知识

我们定义 Hardy-Sobolev 常数

$$A=\inf_{u\in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}}\frac{\|u\|^2}{\left(\int_\Omega\frac{u^4}{|x|}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}}\tag{2}$$

由文献[6]知，当 $\Omega=\mathbb{R}^3$，$\varepsilon>0$，$y_\varepsilon(x)=\dfrac{(2\varepsilon)^{\frac{1}{2}}}{\varepsilon+|x|}$ 时，A 可以达到. 显然 $y_\varepsilon(x)$ 是方程 $-\Delta u=\dfrac{u^3}{|x|}$ 在 $\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$ 的解. 令 $c_\varepsilon=(2\varepsilon)^{\frac{1}{2}}$，$U_\varepsilon(x)=\dfrac{y_\varepsilon(x)}{c_\varepsilon}$，我们可以选择 $R>0$，$\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$ 为截断函数，且满足：当 $|x|\leqslant R$ 时，$\varphi(x)=1$；当 $|x|\geqslant 2R$ 时，$\varphi(x)=0$；当 $B_{2R}(0)\subset\Omega$ 时，$0\leqslant\varphi(x)\leqslant1$. 定义：

$$u_\varepsilon(x)=\varphi(x)U_\varepsilon(x)\qquad v_\varepsilon=\frac{u_\varepsilon(x)}{\left(\int_\Omega\frac{u_\varepsilon^4}{|x|}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{4}}}$$

则

$$\int_\Omega\frac{v_\varepsilon^4}{|x|}\mathrm{d}x=1$$

运用类似文献[7]的方法，我们有：

$$A+C_1\varepsilon\leqslant\|v_\varepsilon\|^2\leqslant A+C_2\varepsilon\tag{3}$$

$$C_3\varepsilon^{\frac{6-q}{4}}\leqslant\int_\Omega|v_\varepsilon|^q\mathrm{d}x\leqslant C_4\varepsilon^{\frac{6-q}{4}}\qquad 3<q<6\tag{4}$$

$$A^2+C_5\varepsilon\leqslant\|v_\varepsilon\|^4\leqslant A^2+C_6\varepsilon\tag{5}$$

其中本文出现的 $C_i(i=1,2,3,\cdots)$ 均表示不同的正常数.

引理1 若 $a>0$，$0<b<A^{-2}$，且 f 满足条件(f_1),(f_2)，如果 $\{u_n\}\subset H_0^1(\Omega)$ 为 I 的 $(PS)_c$ 序列，且 $c\in\left(0,\dfrac{(aA)^2}{4(1-bA^2)}\right)$，则 $\{u_n\}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中有强收敛子列.

证 设 $\{u_n\}$ 是 I 的 $(PS)_c$ 序列，对于 $c\in\left(0,\dfrac{(aA)^2}{4(1-bA^2)}\right)$，有：

$$I(u_n)\to c,\ I'(u_n)\to0\qquad n\to\infty\tag{6}$$

首先，我们证明 $\{u_n\}$ 有界. 由条件(f_2)可得

$$\begin{aligned}c+o(1)\|u_n\|\geqslant I(u_n)-\frac{1}{4}\langle I'(u_n),u_n\rangle=\\ \frac{a}{4}\|u_n\|^2+\int_\Omega\left(\frac{1}{4}f(x,u_n^+)u_n-F(x,u_n^+)\right)\mathrm{d}x\geqslant\\ \frac{a}{4}\|u_n\|^2\end{aligned}$$

可知 $\{u_n\}$ 有界，从而存在子列(不妨仍记为 $\{u_n\}$)及 $u\in H_0^1(\Omega)$，使得当 $n\to\infty$ 时，有 $u_n\rightharpoonup u$. 由条件(f_1)可知，对于 $\varepsilon>0$，存在 $a(\varepsilon)$ 使得

$$|f(x,t)|\leqslant\frac{1}{2C_7}\varepsilon t^5+a(\varepsilon)$$

令

$$\delta=\frac{\varepsilon}{2a(\varepsilon)}$$

当 $E\subset\Omega$，$\operatorname{mes}E<\delta$ 时，有

$$\begin{aligned}\left|\int_E f(x,u_n)u_n\mathrm{d}x\right|&\leqslant\int_E|f(x,u_n)u_n|\mathrm{d}x\leqslant\\&\int_E a(\varepsilon)\mathrm{d}x+\frac{1}{2C_7}\varepsilon\int_E|u_n|^6\mathrm{d}x\leqslant\\&a(\varepsilon)\operatorname{mes}E+\frac{1}{2C_7}\varepsilon C_7\leqslant\varepsilon\end{aligned}$$

因此$\left\{\int_\Omega f(x,u_n)u_n\mathrm{d}x:n\in\mathbb{N}\right\}$是等度绝对连续的. 从而根据 Vitali 收敛定理[8]，可知

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f(x,u_n)u_n\mathrm{d}x=\int_\Omega f(x,u)u\mathrm{d}x\tag{7}$$

使用同样的方法，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega F(x,u_n)\mathrm{d}x=\int_\Omega F(x,u)u\mathrm{d}x\tag{8}$$

令 $w_n=u_n-u$，假设$\lim\limits_{n\to\infty}\|w_n\|=l$（$l$ 为正常数）成立. 由于在$(H_0^1(\Omega))^*$ 中，有 $I'(u_n)\to0$，则

$$a\|u_n\|^2+b\|u_n\|^4-\int_\Omega\frac{(u_n^+)^4}{|x|}\mathrm{d}x-\int_\Omega f(x,u_n^+)u_n\mathrm{d}x=o(1)\tag{9}$$

这里的 $o(1)$ 是 $n\to\infty$ 时的无穷小量. 又因为 $u_n\rightharpoonup u$，可得：

$$\int_\Omega|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x=\int_\Omega|\nabla w_n|^2\mathrm{d}x+\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x+o(1)$$

$$\left(\int_\Omega|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x\right)^2=\left(\int_\Omega|\nabla w_n|^2\mathrm{d}x\right)^2+\left(\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^2+2\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x\int_\Omega|\nabla w_n|^2\mathrm{d}x+o(1)$$

由文献[7]，有

$$\int_\Omega\frac{(u_n^+)^4}{|x|}\mathrm{d}x=\int_\Omega\frac{(w_n^+)^4}{|x|}\mathrm{d}x+\int_\Omega\frac{(u^+)^4}{|x|}\mathrm{d}x+o(1)$$

再结合(7)式，可得

$$\begin{aligned}o(1)=&a\|w_n\|^2+a\|u\|^2+b\|w_n\|^4+b\|u\|^4+2b\|w_n\|^2\|u\|^2-\\&\left(\int_\Omega\frac{(u^+)^4}{|x|}\mathrm{d}x+\int_\Omega\frac{(w_n^+)^4}{|x|}\mathrm{d}x\right)-\int_\Omega f(x,u^+)u\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{10}$$

由(6)式可知

$$0=\lim_{n\to\infty}\langle I'(u_n),u\rangle=a\|u\|^2+bl^2\|u\|^2+b\|u\|^4-\int_\Omega\frac{(u^+)^4}{|x|}\mathrm{d}x-\int_\Omega f(x,u^+)u\mathrm{d}x\tag{11}$$

一方面，由(11)式及条件(f_2)，可得

$$I(u)=\frac{a}{4}\|u\|^2-\frac{1}{4}bl^2\|u\|^2+\int_\Omega\left(\frac{1}{4}f(x,u^+)u-F(x,u)\right)\mathrm{d}x\geqslant-\frac{1}{4}bl^2\|u\|^2\tag{12}$$

另一方面，通过(10)式和(11)式，可得：

$$I(u_n)=I(u)+\frac{a}{2}\|w_n\|^2+\frac{b}{4}\|w_n\|^4+\frac{b}{2}\|w_n\|^2\|u\|^2-\frac{1}{4}\int_\Omega\frac{(w_n^+)^4}{|x|}\mathrm{d}x+o(1)\tag{13}$$

$$a\|w_n\|^2+b\|w_n\|^4+b\|w_n\|^2\|u\|^2-\int_\Omega\frac{(w_n^+)^4}{|x|}\mathrm{d}x=o(1)\tag{14}$$

由(14)式及(2)式，有

$$al^2+bl^4+bl^2\|u\|^2=\int_\Omega\frac{(w_n^+)^4}{|x|}\mathrm{d}x\leqslant\frac{l^4}{A^2}$$

又因 $b < A^{-2}$，有

$$l^2 \geqslant \frac{(a+b\|u\|^2)A^2}{1-bA^2} \geqslant \frac{aA^2}{1-bA^2}$$

再通过(13) 式和(14) 式可知，当 $n\to\infty$ 时，有

$$\begin{aligned} I(u) = I(u_n) - \frac{a}{4}\|w_n\|^2 - \frac{b}{4}\|w_n\|^2\|u\|^2 + o(1) = \\ c - \frac{a}{4}l^2 - \frac{1}{4}bl^2\|u\|^2 \leqslant \\ c - \frac{(aA)^2}{4(1-bA^2)} - \frac{1}{4}bl^2\|u\|^2 < \\ -\frac{1}{4}bl^2\|u\|^2 \end{aligned}$$

与(12) 式矛盾，所以假设不成立，即

$$\lim_{n\to\infty}\|w_n\| = 0$$

从而在 $H_0^1(\Omega)$ 中，当 $n\to\infty$ 时，$u_n \to u$，因此 I 满足$(\mathrm{PS})_c$ 条件.

引理 2 若 $a>0$，$0<b<A^{-2}$，且 f 满足条件(f_1)，(f_2)，则存在常数 $\varepsilon_1>0$，对于任意的 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1)$，有 $\sup\limits_{t\geqslant 0} I(tv_\varepsilon) < \dfrac{(aA)^2}{4(1-bA^2)}$ 成立.

证 考虑如下函数：

$$g(t) = I(tv_\varepsilon) = \frac{at^2}{2}\|v_\varepsilon\|^2 + \frac{bt^4}{4}\|v_\varepsilon\|^4 - \frac{t^4}{4}\int_\Omega F(x, tv_\varepsilon)\mathrm{d}x$$

由于 $b<A^{-2}$，从而：

$$\lim_{t\to+\infty} g(t) = -\infty \qquad g(0)=0$$

当 $t\to 0^+$ 时，$g(t)>0$，所以存在 $t_\varepsilon>0$，使得 $\sup\limits_{t\geqslant 0} g(t)$ 达到. 又由于

$$0 = g'(t_\varepsilon) = t_\varepsilon\left(a\|v_\varepsilon\|^2 + bt_\varepsilon^2\|v_\varepsilon\|^4 - t_\varepsilon^2 - \frac{1}{t_\varepsilon}\int_\Omega f(x, tv_\varepsilon)v_\varepsilon\mathrm{d}x\right)$$

从而

$$a\|v_\varepsilon\|^2 + bt_\varepsilon^2\|v_\varepsilon\|^4 = t_\varepsilon^2 + \frac{1}{t_\varepsilon}\int_\Omega f(x, tv_\varepsilon)v_\varepsilon\mathrm{d}x \geqslant t_\varepsilon^2$$

令

$$\varepsilon_1 = \frac{1-bA^2}{C_6 b}$$

由(5) 式可知

$$1 - b\|v_\varepsilon\|^4 \geqslant 1 - b(A^2 + C_6\varepsilon) = 1 - bA^2 - bC_6\varepsilon > 0$$

从而

$$t_\varepsilon \leqslant \left(\frac{a\|v_\varepsilon\|^2}{1-b\|v_\varepsilon\|^4}\right)^{\frac{1}{2}} = t_\varepsilon^0$$

由条件(f_2)，容易得到

$$F(x, t) \geqslant C_8 |t|^\rho \tag{15}$$

再由(3)，(4)，(5) 及(15) 式可得

$$\begin{aligned} g(t) \leqslant g(t_\varepsilon^0) = \frac{a^2\|v_\varepsilon\|^4}{4(1-b\|v_\varepsilon\|^4)} - \int_\Omega F(x, t_\varepsilon^0 v_\varepsilon)\mathrm{d}x \leqslant \\ \frac{a^2(A^2+C_6\varepsilon)}{4(1-b(A^2+C_6\varepsilon))} - C_8\int_\Omega |t_\varepsilon^0|^\rho |v_\varepsilon|^\rho \mathrm{d}x \leqslant \end{aligned}$$

$$\frac{(aA)^2}{4(1-bA^2)}+C_9\varepsilon-C_{10}\int_\Omega|v_\varepsilon|^\rho\mathrm{d}x\leqslant$$
$$\frac{(aA)^2}{4(1-bA^2)}+C_9\varepsilon-C_{11}\varepsilon^{\frac{6-\rho}{4}}$$

当 ε 足够小，且 $\rho>4$ 时，$C_9\varepsilon-C_{11}\varepsilon^{\frac{6-\rho}{4}}<0$. 因此存在常数 $\varepsilon_1=\dfrac{1-bA^2}{bC_6}>0$，当 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1)$ 时，有

$$\sup_{t\geqslant0}I(tv_\varepsilon)=g(t_\varepsilon^0)<\frac{(aA)^2}{4(1-bA^2)}$$

2　定理 1 的证明

由条件(f_1)可知，存在常数 $M>0$，使得对所有 $\varepsilon>0$，$t\in\mathbb{R}_+$，$x\in\overline{\Omega}$，有 $|f(x,t)|\leqslant\varepsilon t^3+Mt^5$ 成立，从而有

$$|F(x,t)|\leqslant\frac{1}{4}\varepsilon t^4+C_{12}t^6$$

又因为

$$I(u)\geqslant\frac{a}{2}\|u\|^2+\frac{b}{4}\|u\|^4-\frac{\|u\|^4}{4A^2}-\int_\Omega\left(\frac{1}{4}\varepsilon|u^+|^4+C_{12}|u^+|^6\right)\mathrm{d}x\geqslant$$
$$\frac{a}{2}\|u\|^2+\frac{bA^2-1}{4A^2}\|u\|^4-C_{13}\varepsilon\|u\|^4-C_{14}\|u\|^6$$

由于 ε 足够小，则存在足够小的 $\alpha>0$ 及 $\beta>0$，使得当 $\|u\|=\alpha$ 时，有 $I(u)\geqslant\beta$ 成立. 由引理 2 可知

$$I(tv_\varepsilon)=\frac{at^2}{2}\|v_\varepsilon\|^2+\frac{bt^4}{4}\|v_\varepsilon\|^4-\frac{t^4}{4}-\int_\Omega F(x,tv_\varepsilon)\mathrm{d}x\leqslant$$
$$\frac{at^2}{2}\|v_\varepsilon\|^2+\frac{bt^4}{4}\|v_\varepsilon\|^4-\frac{t^4}{4}\leqslant$$
$$\frac{at^2}{2}(A+C_2\varepsilon)+\frac{bA^2-1+bC_6\varepsilon}{4}t^4$$

又由于

$$\varepsilon<\varepsilon_1=\frac{1-bA^2}{bC_6}$$

从而

$$\lim_{t\to+\infty}I(tv_\varepsilon)=-\infty$$

因此存在 $t_0>0$，取 $u_0=t_0v_\varepsilon$，使得当 $\|u_0\|>\alpha$ 时，有 $I(u_0)<0$ 成立.

由山路引理[9] 知，存在$\{u_n\}\in H_0^1(\Omega)$，使得当 $n\to\infty$ 时，有

$$I(u_n)\to c>\beta>0\qquad I'(u_n)\to0$$

其中：

$$\Gamma=\{\gamma\in C([0,1],H_0^1(\Omega)):\gamma(0)=0,\gamma(1)=u_0\}$$
$$c=\inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]}I(\gamma(t))$$

由引理 2，有

$$0<\beta<c\leqslant\max_{t\in[0,1]}I(tu_0)\leqslant\sup_{t\geqslant0}I(tv_\varepsilon)<\frac{(aA)^2}{4(1-bA^2)}$$

由引理 1 可知$\{u_n\}\subset H_0^1(\Omega)$有强收敛子列(仍记为$\{u_n\}$)，假设 $u\in H_0^1(\Omega)$，且$\{u_n\}$收敛到 u，通过 I' 的连续性，可知 u 是方程(1)的弱解. 由$\langle I'(u),u^-\rangle=0$，可得 $\|u^-\|=0$，从而 $u\geqslant0$，又当 $c>0$ 时，$u\neq0$，由强极大值原理知 u 是方程(1)的正解.

参考文献:

[1] GHOUSSOUB N, KANG X S. Hardy-Sobolev Critical Elliptic Equations with Boundary Singularities [J]. Ann I H Poincaré-AN, 2004, 21(6): 767-793.

[2] LEI C Y, LIAO J F, TANG C L. Multiple Positive Solutions for Kirchhoff Type of Problems with Singularity and Critical Exponents [J]. J Math Anal Appl, 2015, 421: 521-538.

[3] LIU X, SUN Y J. Multiple Positive Solutions for Kirchhoff Type Problems with Singularity [J]. Commun Pure Appl Anal, 2013, 12: 721-733.

[4] NAIMEN D. The Critical Problem of Kirchhoff Type Elliptic Equations in Dimension Four [J]. J Differential Equations, 2014, 257(4): 1168-1193.

[5] XIE Q L, WU X P, TANG C L. Existence and Multiplicity of Solutions for Kirchhoff Type Problem with Critical Exponent [J]. Commun Pure Appl Anal, 2013, 12(6): 706-713.

[6] KANG D S, PENG S J. Positive Solutions for Singular Critical Elliptic Problems [J]. Appl Math Lett, 2005, 17(4): 411-416.

[7] GHOUSSOUB N, YUAN C. Multiple Solutions for Quasi-Linear PDEs Involving the Critical Sobolev and Hardy Exponents [J]. Trans Amer Math Soc, 2000, 352(12): 5703-5743.

[8] RUDIN W. Real and Complex Analysis [M]. New York: McGraw-Hill, 1966.

[9] RABINOWITZ P H. Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations [M]. Providence, RI: American Mathematical Society, 1985.

Existence of Positive Solutions for Kirchhoff Type Problems with Hardy-Sobolev Critical Exponents

TANG Yu-ting, TANG Chun-lei

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: The variational method and the mountain pass lemma are used to study a class of Kirchhoff type problems with critical weighted Hardy-Sobolev exponents, and the existence and multiplicity of their positive solutions are obtained.

Key words: Kirchhoff type equation; Hardy-Sobolev critical exponent; mountain pass lemma; positive solution

责任编辑 廖 坤