第 39 卷第 6 期 西南大学学报(自然科学版) 2017 年 6 月
Vol. 39 No. 6 Journal of Southwest University (Natural Science Edition) Jun. 2017

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2017.06.014

离散时滞脉冲微分动力系统的指数稳定性判据[①]

黄家琳[1], 牟天伟[2]

1. 四川三河职业学院 基础部,四川 泸州 646200;2. 成都师范学院 数学系,成都 611130

摘要: 给出了一类脉冲微分动力系统的新条件,利用不动点方法获得了新的指数稳定性判据. 值得一提的是,新判据中 LMI 条件完全可以用计算机 Matlab LMI 工具箱验证,符合工程实际中涉及的大规模计算要求.

关 键 词: 时滞微分方程组;离散时滞;脉冲;LMI 工具箱

中图分类号: O193 **文献标志码:** A **文章编号:** 1673-9868(2017)06-0087-05

本文对一类 Cohen-Grossberg 神经网络(CGNNs)的稳定性问题进行了研究. CGNNs 在多领域都有其应用前景,如模式识别、并行计算、联想记忆、组合优化、信号和图像处理等. 然而,这些成功的应用都依赖于 CGNNs 平衡解的稳定性. 现在我们考虑用压缩映像原理来给出 CGNNs 的稳定性判据. 由于脉冲项增加了不动点方法运用的难度,我们考虑设置一些新条件,通过数学分析技巧,获得了一个新的基于 LMI 条件的指数型稳定判据.

考虑如下 CGNNs 模型:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t} = -\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}(t))\{\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}(t)) - \boldsymbol{D}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t-\tau(t)))\} & t \geqslant 0,\ t \neq t_i \\ \Delta x_j(t_i) = x_j(t_i^+) - x_j(t_i) = \zeta_{ji}(x_j(t_i)) & i = 1,2,\cdots \\ x_j(\theta) = \phi_j(\theta) & -\tau \leqslant \theta \leqslant 0,\ j \in \mathcal{N} = \{1,2,\cdots,n\} \end{cases} \tag{1}$$

其中:

$$\boldsymbol{x}(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t))^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}(t)) = \mathrm{diag}(a_1(x_1(t)), \cdots, a_n(x_n(t)))$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}(t)) = \mathrm{diag}(b_1(x_1(t)), \cdots, b_n(x_n(t)))$$

$a_j(x_j(t))$ 和 $b_j(x_j(t))$ 分别表示 t 时刻的放大函数与恰当行为函数.

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t-\tau(t))) = (g_1(\boldsymbol{x}(t-\tau_1(t))), \cdots, g_n(\boldsymbol{x}(t-\tau_n(t))))^{\mathrm{T}}$$

为神经元激活函数,离散时滞 $\tau_j(t) \in [0, \tau]$. $\boldsymbol{D} = (d_{ij})_{n\times n}$,其中 d_{ij} 表示连接系数. 脉冲时刻 $t_i (i = 1,2,\cdots)$ 满足 $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots$, $\lim\limits_{i\to+\infty} t_i = +\infty$. $x_j(t_i^+)$ 和 $x_j(t_i^-)$ 分别表示 $x_j(t)$ 在 t_i 时刻的右极限和左极限. $\zeta_{ji}(x_j(t_i))$ 表示 $x_j(t)$ 在脉冲时刻 t_i 的变化量,并且 $\zeta_{ji}(\cdot) \in C[\mathbb{R}, \mathbb{R}]$.

本文假设:

(H1) 存在正定对角矩阵 $\boldsymbol{G} = \mathrm{diag}(G_1, \cdots, G_n)$,使得

$$|\boldsymbol{g}(r) - \boldsymbol{g}(s)| \leqslant \boldsymbol{G}|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| \qquad \forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$$

---

① 收稿日期: 2016-07-28

基金项目: 国家 973 项目(2010CB732501).

作者简介: 黄家琳(1949-),男,浙江浦江人,教授,主要从事微分方程理论及其应用的研究.

通信作者: 牟天伟,副教授.

(H2) 存在正定对角矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}=\mathrm{diag}(\overline{a}_1,\cdots,\overline{a}_n)$ 和 $\widetilde{\boldsymbol{A}}=\mathrm{diag}(\widetilde{a}_1,\cdots,\widetilde{a}_n)$，使得：

$$0<\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\leqslant\overline{\boldsymbol{A}}\qquad |\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{x})|\leqslant\widetilde{\boldsymbol{A}}\qquad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$$

(H3) 存在正定对角矩阵 $\boldsymbol{H}=\mathrm{diag}(h_1,\cdots,h_n)$，使得

$$|\zeta_{ji}(r)-\zeta_{ji}(s)|\leqslant h_j\,|r-s|\qquad \forall r,s\in\mathbb{R},\ j\in\mathcal{N},\ i=1,2,\cdots$$

(H4) 存在正定对角矩阵 $\boldsymbol{\Gamma}=\mathrm{diag}(\gamma_1,\cdots,\gamma_n)$，使得

$$\Upsilon_j(t)\geqslant\gamma_j\qquad \forall t\geqslant0,\ a_j(r)b_j(r)=\Upsilon_j(t)r,\ r\in\mathbb{R}$$

在给出本文主要结果之前，我们还需假设$\inf\limits_i(t_i-t_{i-1})\geqslant\mu$，其中 $\mu>0$ 是常数.

定理1 假如存在正数 $\lambda<1$，使得以下线性不等式成立：

$$\mu\,|\boldsymbol{D}|\,\boldsymbol{G}+(\boldsymbol{I}+\mu\boldsymbol{\Gamma})\boldsymbol{H}-\lambda\mu\boldsymbol{\Gamma}<0 \tag{2}$$

则系统(1)是全局指数型稳定的.

证 下面分3步来证明定理1：

步骤1 建立函数空间框架.

设 $\mathcal{R}=\mathcal{R}_1\times\mathcal{R}_2\times\cdots\times\mathcal{R}_n$，而 $\mathcal{R}_j\ (j\in\mathcal{N})$ 是由函数 $q_j(t)$：$[-\tau,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ 构成的，满足对任意 $j\in\mathcal{N}$，有：

(a) $q_j(t)$ 关于 $t\in[0,\infty)$ 连续，且 $t\neq t_i\ (i=1,2,\cdots)$；

(b) $q_j(\theta)=\phi_j(\theta)$，$-\tau\leqslant\theta\leqslant0$；

(c) $\mathrm{e}^{\beta t}q_j(t)\to0\ (t\to+\infty)$，其中 $\beta>0$ 是常数，满足 $\beta<\min\left\{\liminf\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\int_0^t\Upsilon_j(s)\mathrm{d}s}{t},\ \gamma_j\right\}$；

(d) 极限$\lim\limits_{t\to t_i^-}q_j(t)$ 和$\lim\limits_{t\to t_i^+}q_j(t)$ 都存在，此外，$\lim\limits_{t\to t_i^-}q_j(t)=q_j(t_i)\ (i=1,2,\cdots)$.

显然，$\mathcal{R}$ 是以下距离意义下的完备距离空间：

$$\mathrm{dist}(\boldsymbol{q},\breve{\boldsymbol{q}})=\max_{j=1,2,\cdots,n}\left(\sup_{t\geqslant-\tau}|q_j(t)-\breve{q}_j(t)|\right)$$

其中：

$$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}(t)=(q_1(t),q_2(t),\cdots,q_n(t))^{\mathrm{T}}\in\mathcal{R}$$
$$\breve{\boldsymbol{q}}=\breve{\boldsymbol{q}}(t)=(\breve{q}_1(t),\breve{q}_2(t),\cdots,\breve{q}_n(t))^{\mathrm{T}}\in\mathcal{R}$$

特别指出，以下涉及的极限都是指在此距离下的极限.

步骤2 构造 $\mathcal{R}$ 上的映射.

将系统(1)的第一个方程写成分量形式，两边积分，则对于 $t>0$ 及 $t\neq t_i\ (i=1,2,\cdots)$，有

$$\frac{\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{\int_0^t\Upsilon_j(s)\mathrm{d}s}x_j(t)\right)}{\mathrm{d}t}=\Upsilon_j(t)\mathrm{e}^{\int_0^t\Upsilon_j(s)\mathrm{d}s}x_j(t)+\mathrm{e}^{\int_0^t\Upsilon_j(s)\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x_j(t)}{\mathrm{d}t}=$$
$$\mathrm{e}^{\int_0^t\Upsilon_j(s)\mathrm{d}s}a_j(x_j(t))\sum_{k=1}^n d_{jk}g_k(x_k(t-\tau_j(t)))$$

让 $\varepsilon>0$ 足够小，再从 $t_{i-1}+\varepsilon$ 积分到 $t\in(t_{i-1},t_i)\ (i=1,2,\cdots)$，有

$$\mathrm{e}^{\int_0^t\Upsilon_j(s)\mathrm{d}s}x_j(t)-\mathrm{e}^{\int_0^{t_{i-1}+\varepsilon}\Upsilon_j(s)\mathrm{d}s}x_j(t_{i-1}+\varepsilon)=\int_{t_{i-1}+\varepsilon}^t\mathrm{e}^{\int_0^s\Upsilon_j(l)\mathrm{d}l}a_j(x_j(s))\sum_{k=1}^n d_{jk}g_k(x_k(s-\tau_j(s)))\mathrm{d}s$$

令 $\varepsilon\to0$，则

$$\mathrm{e}^{\int_0^{\mathrm{T}}\Upsilon_j(s)\mathrm{d}s}x_j(t)-\mathrm{e}^{\int_0^{t_{i-1}}\Upsilon_j(s)\mathrm{d}s}x_j(t_{i-1}{}^+)=$$
$$\int_{t_{i-1}}^t\mathrm{e}^{\int_0^s\Upsilon_j(l)\mathrm{d}l}a_j(x_j(s))\sum_{k=1}^n d_{jk}g_k(x_k(s-\tau_j(s)))\mathrm{d}s\qquad t\in(t_{i-1},t_i),\ i=1,2,\cdots$$

取 $t=t_i-\varepsilon\ (\varepsilon>0)$，则有

$$\mathrm{e}^{\int_0^{t_i-\varepsilon}\Upsilon_j(s)\mathrm{d}s}x_j(t_i-\varepsilon)-\mathrm{e}^{\int_0^{t_{i-1}}\Upsilon_j(s)\mathrm{d}s}x_j(t_{i-1}{}^+)=\int_{t_{i-1}}^{t_i-\varepsilon}\mathrm{e}^{\int_0^s\Upsilon_j(l)\mathrm{d}l}a_j(x_j(s))\sum_{k=1}^n d_{jk}g_k(x_k(s-\tau_j(s)))\mathrm{d}s \tag{3}$$

令 $\varepsilon \to 0$，有

$$\mathrm{e}^{\int_0^{t_i} \Upsilon_j(s)\mathrm{d}s} x_j(t_i) - \mathrm{e}^{\int_0^{t_{i-1}} \Upsilon_j(s)\mathrm{d}s} x_j(t_{i-1}{}^{+}) = \mathrm{e}^{\int_0^{t_i} \Upsilon_j(s)\mathrm{d}s} x_j(t_i^{-}) - \mathrm{e}^{\int_0^{t_{i-1}} \Upsilon_j(s)\mathrm{d}s} x_j(t_{i-1}{}^{+}) =$$

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \mathrm{e}^{\int_0^{s} \Upsilon_j(l)\mathrm{d}l} a_j(x_j(s)) \sum_{k=1}^{n} d_{jk} g_k(x_k(s-\tau_j(s)))\mathrm{d}s \tag{4}$$

则由(4)式得出

$$\mathrm{e}^{\int_0^{t} \Upsilon_j(s)\mathrm{d}s} x_j(t) - \mathrm{e}^{\int_0^{t_{i-1}} \Upsilon_j(s)\mathrm{d}s} (x_j(t_{i-1}) + \zeta_{j(i-1)}(x_j(t_{i-1}))) =$$

$$\mathrm{e}^{\int_0^{t} \Upsilon_j(s)\mathrm{d}s} x_j(t) - \mathrm{e}^{\int_0^{t_{i-1}} \Upsilon_j(s)\mathrm{d}s} x_j(t_{i-1}{}^{+}) =$$

$$\int_{t_{i-1}}^{t} \mathrm{e}^{\int_0^{s} \Upsilon_j(l)\mathrm{d}l} a_j(x_j(s)) \sum_{k=1}^{n} d_{jk} g_k(x_k(s-\tau_j(s)))\mathrm{d}s \qquad t_{i-1} < t \leqslant t_i,\ i = 1,2,\cdots \tag{5}$$

让(5)式在相间脉冲点间积分相加，不难得到

$$x_j(t) = \mathrm{e}^{-\int_0^{t} \Upsilon_j(s)\mathrm{d}s} \phi_j(0) + \mathrm{e}^{-\int_0^{t} \Upsilon_j(s)\mathrm{d}s} \int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^{s} \Upsilon_j(l)\mathrm{d}l} \left[a_j(x_j(s)) \sum_{k=1}^{n} d_{jk} g_k(x_k(s-\tau_j(s)))\right]\mathrm{d}s +$$

$$\mathrm{e}^{-\int_0^{t} \Upsilon_j(s)\mathrm{d}s} \sum_{0<t_i<t} (\zeta_{ji}(x_j(t_i)))\, \mathrm{e}^{\int_0^{t_i} \Upsilon_j(s)\mathrm{d}s} \qquad t > 0$$

综上分析，我们定义映射 $\boldsymbol{\Phi}$：$\boldsymbol{x}(t) \longrightarrow \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})(t)$，其中：

$$\boldsymbol{x}(t) = (x_1(t), \cdots, x_j(t), \cdots, x_n(t))^{\mathrm{T}} \in \mathscr{R}$$

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})(t) = (\boldsymbol{\Phi}(x_1)(t), \cdots, \boldsymbol{\Phi}(x_j)(t), \cdots, \boldsymbol{\Phi}(x_n)(t))^{\mathrm{T}}$$

此外，对于任给的 $j \in \mathscr{N}$，$\boldsymbol{\Phi}(x_j)(t)$：$[-\tau, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ 满足

$$\boldsymbol{\Phi}(x_j)(t) = \mathrm{e}^{-\int_0^{t} \Upsilon_j(s)\mathrm{d}s} \phi_j(0) + \int_0^t \mathrm{e}^{-\int_s^{t} \Upsilon_j(l)\mathrm{d}l} \Big[a_j(x_j(s)) \sum_{k=1}^{n} (c_{jk} f_k(x_k(s)) +$$

$$d_{jk} g_k(x_k(s-\tau_j(s))))\Big]\mathrm{d}s + \mathrm{e}^{-\int_0^{t} \Upsilon_j(s)\mathrm{d}s} \sum_{0<t_i<t} \left(\zeta_{ji}(x_j(t_i))\mathrm{e}^{\int_0^{t_i} \Upsilon_j(s)\mathrm{d}s}\right) \qquad t \geqslant 0 \tag{6}$$

以及 $\boldsymbol{\Phi}(x_j)(\theta) = \phi_j(\theta)(-\tau \leqslant \theta \leqslant 0)$.

接着我们证明 $\boldsymbol{\Phi}(\mathscr{R}_j) \subset \mathscr{R}_j (\forall j \in \mathscr{N})$. 显然条件(a)和(b)在 $\boldsymbol{\Phi}(\mathscr{R}_j)$ 中成立. 下证 $x_j(t) \in \mathscr{R}_j$，

$$|\mathrm{e}^{\beta t} \boldsymbol{\Phi}(x_j)| \to 0 \qquad t \to +\infty$$

显然

$$|\mathrm{e}^{\beta t} \boldsymbol{\Phi}(x_j)| \leqslant |\mathrm{e}^{\beta t} \mathrm{e}^{-\int_0^{t} \Upsilon_j(s)\mathrm{d}s} \phi_j(0)| + \left|\mathrm{e}^{\beta t} \int_0^t \mathrm{e}^{-\int_s^{t} \Upsilon_j(l)\mathrm{d}l} a_j(x_j(s)) \sum_{k=1}^{n} d_{jk} g_k(x_k(s-\tau_j(s)))\mathrm{d}s\right| +$$

$$\left|\mathrm{e}^{\beta t} \mathrm{e}^{-\int_0^{t} \Upsilon_j(s)\mathrm{d}s} \sum_{0<t_i<t} (\zeta_{ji}(x_j(t_i)))\, \mathrm{e}^{\int_0^{t_i} \Upsilon_j(s)\mathrm{d}s}\right| \tag{7}$$

首先由 $\beta < \liminf\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\int_0^t \Upsilon_j(s)\mathrm{d}s}{t}$ 知 $\mathrm{e}^{\beta t} \mathrm{e}^{-\int_0^{t} \Upsilon_j(s)\mathrm{d}s} = \mathrm{e}^{\left(\beta - \frac{\int_0^{\mathrm{T}} \Upsilon_j(s)\mathrm{d}s}{t}\right) t} \to 0\ (t \to +\infty)$. 从而

$$|\mathrm{e}^{\beta t} \mathrm{e}^{-\int_0^{t} \Upsilon_j(s)\mathrm{d}s} \phi_j(0)| \to 0 \qquad t \to \infty \tag{8}$$

其次，由条件(H1)－(H4)、积分换元法、函数$\left(\int_0^{\mathrm{T}} \Upsilon_j(s)\mathrm{d}s - \beta t\right)$关于$t$的递增性，以及 x_j 满足条件(c)，不难推导得

$$\left|\mathrm{e}^{\beta t} \int_0^t \mathrm{e}^{-\int_s^{t} \Upsilon_j(l)\mathrm{d}l} a_j(x_j(s)) \sum_{k=1}^{n} d_{jk} g_k(x_k(s-\tau_j(s)))\mathrm{d}s\right| \leqslant$$

$$\left(\mathrm{e}^{\beta\tau} \bar{a}_j \sum_{k=1}^{n} |d_{jk}| \boldsymbol{G}_k \sup_{s\in[-\tau, N+\tau]} |\mathrm{e}^{\beta s} x_k(s)| (N+\tau) \max_{s\in[-\tau, N+\tau]} \mathrm{e}^{\left(\int_0^{s} \Upsilon_j(l)\mathrm{d}l - \beta s\right)}\right) \mathrm{e}^{-\left(\int_0^{t} \Upsilon_j(s)\mathrm{d}s - \beta t\right)} +$$

$$\frac{\mathrm{e}^{\beta\tau} \bar{a}_j \sum_{k=1}^{n} |d_{jk}| \boldsymbol{G}_k}{\gamma_j - \beta} \varepsilon$$

由 ε 的任意性知

$$\left| \mathrm{e}^{\beta t} \int_0^t \mathrm{e}^{-\int_s^t \Upsilon_j(l)\mathrm{d}l} a_j(x_j(s)) \sum_{k=1}^{n} d_{jk} g_k(x_k(s-\tau_j(s)))\mathrm{d}s \right| \to 0 \qquad t \to \infty \tag{9}$$

且仍由 ε 的任意性知

$$\begin{aligned} &\left| \mathrm{e}^{\beta t} \mathrm{e}^{-\int_0^t \Upsilon_j(s)\mathrm{d}s} \sum_{0<t_i<t} (\zeta_{ji}(x_j(t_i))) \mathrm{e}^{\int_0^{t_i} \Upsilon_j(s)\mathrm{d}s} \right| \leqslant \\ &\mathrm{e}^{-\left(\int_0^t \Upsilon_j(s)\mathrm{d}s - \beta t\right)} \sum_{0<t_i \leqslant N} h_j \mid x_j(t_i) \mid \mathrm{e}^{\int_0^{t_i} \Upsilon_j(s)\mathrm{d}s} + h_j \frac{\varepsilon}{\gamma-\beta} + \mu h_j \varepsilon \to 0 \qquad t \to +\infty \end{aligned} \tag{10}$$

于是由(7)-(10)式知，$\mid \mathrm{e}^{\beta t} \boldsymbol{\Phi}(x_j) \mid \to 0$ $(t \to +\infty)$. 换而言之，条件(c)成立.

再证条件(d)也在 $\boldsymbol{\Phi}(\mathscr{R}_j)$ 中成立.

事实上，由(6)式有

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})(t_i+r) - \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})(t_i) = Q_1 + Q_2$$

这里：

$$\begin{aligned} Q_1 = &\left\{ \mathrm{e}^{-\int_0^{t_i+r} \Upsilon_j(s)\mathrm{d}s} \phi_j(0) + \int_0^{t_i+r} \mathrm{e}^{-\int_s^{t_i+r} \Upsilon_j(l)\mathrm{d}l} \left[a_j(x_j(s)) \sum_{k=1}^{n} d_{jk} g_k(x_k(s-\tau_j(s))) \right] \mathrm{d}s \right\} - \\ &\left\{ \mathrm{e}^{-\int_0^{t_i} \Upsilon_j(s)\mathrm{d}s} \phi_j(0) + \int_0^{t_i} \mathrm{e}^{-\int_s^{t_i} \Upsilon_j(l)\mathrm{d}l} \left[a_j(x_j(s)) \sum_{k=1}^{n} d_{jk} g_k(x_k(s-\tau_j(s))) \right] \mathrm{d}s \right\} \\ Q_2 = &\mathrm{e}^{-\int_0^{t_i+r} \Upsilon_j(s)\mathrm{d}s} \sum_{0<t_k<t_i+r} (\zeta_{jk}(x_j(t_k))) \mathrm{e}^{\int_0^{t_k} \Upsilon_j(s)\mathrm{d}s} - \mathrm{e}^{-\int_0^{t_i} \Upsilon_j(s)\mathrm{d}s} \sum_{0<t_k<t_i} (\zeta_{jk}(x_j(t_k))) \mathrm{e}^{\int_0^{t_k} \Upsilon_j(s)\mathrm{d}s} \end{aligned} \tag{11}$$

显然 $Q_1 \to 0$ $(r \to 0)$. 在(11)式中，让 $r<0$ 足够小，则由

$$Q_2 = \left(\mathrm{e}^{-\int_0^{t_i+r} \Upsilon_j(s)\mathrm{d}s} - \mathrm{e}^{-\int_0^{t_i} \Upsilon_j(s)\mathrm{d}s} \right) \sum_{0<t_k<t_i} (\zeta_{jk}(x_j(t_k))) \mathrm{e}^{\int_0^{t_k} \Upsilon_j(s)\mathrm{d}s}$$

有 $\lim\limits_{r \to 0^-} Q_2 = 0$. 让 $r<0$ 足够小，有

$$\begin{aligned} Q_2 = &\mathrm{e}^{-\int_0^{t_i+r} \Upsilon_j(s)\mathrm{d}s} \left[\sum_{0<t_k<t_i} \left(\zeta_{jk}(x_j(t_k)) \mathrm{e}^{\int_0^{t_k} \Upsilon_j(s)\mathrm{d}s} \right) + \zeta_{ji}(x_j(t_i)) \mathrm{e}^{\int_0^{t_i} \Upsilon_j(s)\mathrm{d}s} \right] - \\ &\mathrm{e}^{-\int_0^{t_i} \Upsilon_j(s)\mathrm{d}s} \sum_{0<t_k<t_i} (\zeta_{jk}(x_j(t_k))) \mathrm{e}^{\int_0^{t_k} \Upsilon_j(s)\mathrm{d}s} = \\ &\left(\mathrm{e}^{-\int_0^{t_i+r} \Upsilon_j(s)\mathrm{d}s} - \mathrm{e}^{-\int_0^{t_i} \Upsilon_j(s)\mathrm{d}s} \right) \sum_{0<t_k<t_i} \left(\zeta_{jk}(x_j(t_k)) \mathrm{e}^{\int_0^{t_k} \Upsilon_j(s)\mathrm{d}s} \right) + \mathrm{e}^{-\int_0^{t_i+r} \Upsilon_j(s)\mathrm{d}s} \zeta_{ji}(x_j(t_i)) \mathrm{e}^{\int_0^{t_i} \Upsilon_j(s)\mathrm{d}s} \end{aligned}$$

这意味着

$$\lim_{r \to 0^+} Q_2 = \zeta_{ji}(x_j(t_i))$$

从而条件(d)在 $\boldsymbol{\Phi}(\mathscr{R}_j)$ 中成立. 所以 $\boldsymbol{\Phi}(\mathscr{R}_j) \subset \mathscr{R}_j$.

步骤 3　证明 $\boldsymbol{\Phi}$ 是 $\mathscr{R}$ 上的压缩映射.

事实上，对任给的 $\boldsymbol{x}(t) = (x_1(t), \cdots, x_j(t), \cdots, x_n(t))^{\mathrm{T}} \in \mathscr{R}$，$\boldsymbol{y}(t) = (\boldsymbol{y}_1(t), \cdots, \boldsymbol{y}_j(t), \cdots, \boldsymbol{y}_n(t))^{\mathrm{T}} \in \mathscr{R}$，由(6)式、三角不等式、微分中值定理、距离定义式子以及 LMI 条件(2)，不难推导得

$$\mid \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{y}) \mid \leqslant \left(\mid \boldsymbol{D} \mid \boldsymbol{G} + \frac{1}{\mu} \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \boldsymbol{H} + \boldsymbol{H} \right) \mathrm{dist}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})(1, 1, \cdots, 1)^{\mathrm{T}} < \lambda \mathrm{dist}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})(1, 1, \cdots, 1)^{\mathrm{T}}$$

则由距离的定义，进一步有

$$\mathrm{dist}(\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{y})) < \lambda \mathrm{dist}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

这就证明了 $\boldsymbol{\Phi}$ 是 $\mathscr{R}$ 上的压缩映射，$\boldsymbol{\Phi}$ 在 $\mathscr{R}$ 上有唯一的不动点 $\boldsymbol{x}(t)$，也是系统(1)关于每个给定初值 $\phi(\theta)$ 对应的唯一解，满足 $\mathrm{e}^{\beta t} \| \boldsymbol{x}(t) \| \to 0$ $(t \to \infty)$.

注 1　相比已知文献[1-4]，本文定理 1 的判据条件是线性矩阵不等式，可以用计算机 Matlab LMI 工具箱来执行，方便实际工程中的大型运算，这是本文的创新点. 本文的方法也不同于有关脉冲时滞系统的相关文献中的方法[5-6]. 以下数值实例证实了我们方法的有效性：

例 1　给系统(1) 配置如下参数：

$$\boldsymbol{\Gamma}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1.9\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}-0.2 & 0.01\\ 0 & 0.3\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{G}=\begin{pmatrix}0.3 & 0\\ 0 & 0.1\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}0.2 & 0\\ 0 & 0.3\end{pmatrix}\qquad \mu=0.3$$

那么直接运用计算机 Matlab LMI 工具箱解 LMI 条件(2)，获得可行性问题解的数据如下

$$\lambda=0.875\,3$$

显然 $0<\lambda<1$，由定理 1 知，系统(1) 是全局指数型稳定的.

参考文献：

[1] RAO R F，ZHONG S M，PU Z L. On the Role of Diffusion Factors in Stability Analysis for p-Laplace Dynamical Equations Involved to BAM Cohen-Grossberg Neural Network [J]. Neurocomputing，2017，223：54－62.

[2] RAO R F，PU Z L. LMI-Based Stability Criterion of Impulsive T-S Fuzzy Dynamic Equations via Fixed Point Theory [J]. Abstract and Applied Analysis，2013，2013：1－9.

[3] 倖　卫. T-S 模糊马尔可夫跳跃时滞 Cohen-Grossberg 神经网络的几乎必然指数稳定性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2015，40(5)：10－12.

[4] 黄家琳，饶若峰. Cohen-Grossberg 神经网络的全局指数稳定性 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2016，38(2)：78－82.

[5] RAO R F，ZHONG S M，PU Z L. LMI-Based Robust Exponential Stability Criterion of Impulsive Integro-Differential Equations with Uncertain Parameters Via Contraction Mapping Theory [J]. Advances in Difference Equations，2017，2017：1－16.

[6] RAO R F，ZHONG S M. Contraction Mapping Theory and Approach to LMI-Based Stability Criteria of T-S Fuzzy Impulsive Time-Delays Integrodifferential Equations [J]. Journal of Function Spaces，2016，2016：1－14.

A New Exponential Stability Criterion for Impulsive Differential Dynamical Systems with Discrete Delays

HUANG Jia-lin[1]，　MU Tian-wei[2]

1. Department of Basic Courses，Sichuan Sanhe Vocational College，Luzhou Sichuan 646200，China；

2. Department of Mathematics，Chengdu Normal University，Chengdu 611130，China

Abstract：In this paper，a kind of new assumptions on the differential dynamic system are given. Then，a new exponential stability criterion is obtained with the fixed point method. It is worth mentioning that the new criterion in LMI conditions can be verified with the MATLAB LMI toolbox，meeting the requirements of large-scale calculation in engineering practice.

Key words：delay differential equation；discrete time delay；pulse；LMI toolbox

责任编辑　廖　坤