DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2017.07.016

Asplund 空间中随机集值隐函数的度量正则性①

蒋观敏[1]， 杨明歌[2]

1. 重庆邮电大学移通学院，重庆 401520；2. 上海大学 管理学院，上海 200444

摘要：在 Asplund 空间中讨论随机集值隐函数的度量正则性，所使用的工具有 Ekeland 变分原理、Fermat 原理、Lipschitz 函数的次微分以及次梯度的加法原理等. 首先，给出随机集值隐函数的局部度量正则性成立的充分条件. 其次，利用上述结果，分别给出随机集值隐函数的度量正则性和 Lipschitz 性质成立的充分条件. 所得结果改进了已有文献中的相关结果.

关 键 词：正规上导数；随机集值隐函数；(局部)度量正则性；Lipschitz 性质；Asplund 空间

中图分类号：O224 **文献标志码**：A **文章编号**：1673－9868(2017)07－0104－06

设$(\Omega, \mathscr{A})$是可测空间，X，P 是拓扑空间，Y 是拓扑向量空间，$F: \Omega \times X \times P \rightrightarrows Y$ 是集值映射，$(x_0, p_0) \in X \times P$，且对所有的 $\omega \in \Omega$ 有 $0 \in F(\omega, x_0, p_0)$ 成立. 定义集值映射 $G: \Omega \times P \rightrightarrows X$ 如下：

$$G(\omega, p)=\{x \in X \mid 0 \in F(\omega, x, p)\} \tag{1}$$

若对任意的 $p \in P$，$G(\cdot, p): \Omega \rightrightarrows X$ 是可测的，则称集值映射 G 为由包含关系 $0 \in F(\omega, x, p)$ 定义的随机集值隐函数. 文献[1]在可分 Asplund 空间给出了随机集值隐函数(1)的局部度量正则性、度量正则性、Lipschitz 性质、非空性和下半连续性成立的充分条件. 值得注意的是，文献[1]必须假设度量投射的内半紧性. 本文在不假设度量投射的内半紧性的情况下证明随机集值隐函数的度量正则性.

定理 1 设 X，Y 是可分 Asplund 空间，P 是拓扑空间，$(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ 是完全 σ-有限可测空间，集值映射 $F: \Omega \times X \times P \rightrightarrows Y$ 满足对任意的 $p \in P$，$F(\cdot, \cdot, p): \Omega \times X \rightrightarrows Y$ 是可测的. 设 $G: \Omega \times P \rightrightarrows X$ 是由(1)式定义的集值映射，$(x_0, p_0) \in X \times P$ 满足对任意 $\omega \in \Omega$ 有 $0 \in F(\omega, x_0, p_0)$. 记 $F_{\omega,p}(\cdot)=F(\omega, \cdot, p)$. 若对任意的 $\omega \in \Omega$，存在常数 $r>0$ 和 $\sigma>0$ 使得

(i) 任意的 $p \in B(p_0, r)$，集值映射 $F_{\omega,p}(\cdot)$ 是闭的；

(ii) 任意的 $(x, p) \in B(x_0, r) \times B(p_0, r)$ 且 $0 \notin F(\omega, x, p)$，

$$\sigma \leqslant \inf\{\|x^*\|: x^* \in D_N^* F_{\omega,p}(x, y)(y^*),\ y \in B(0, r) \cap F_{\omega,p}(x),\ \|y^*\|=1\}$$

则

1) 任意的 $p \in P$，$G(\cdot, p): \Omega \rightrightarrows X$ 是 $\mathscr{B}$-可测的；

2) 任意的 $\omega \in \Omega$，$G(\omega, \cdot): P \rightrightarrows X$ 在 (x_0, p_0) 周围是局部度量正则的且具有系数 $\dfrac{1+\sigma}{\sigma}$. 事实上，任

① 收稿日期：2016－09－16
基金项目：国家自然科学基金资助项目(11301254)；中国博士后科学基金资助项目(2014M551312)；河南省高等学校重点科研项目(15A110036).
作者简介：蒋观敏(1981－)，女，重庆江北人，讲师，主要从事非线性泛函分析及应用的研究.
通信作者：杨明歌，副教授.

意的 $\mu \in \left(0, \frac{r\sigma}{2(1+\sigma)}\right)$，任意的 $(x, p) \in B(x_0, \frac{r}{2}) \times B(p_0, r)$ 且 $\operatorname{dist}(0, F(\omega, x, p)) < \mu$，有

$$\operatorname{dist}(x, G(\omega, p)) \leqslant \frac{1+\sigma}{\sigma} \operatorname{dist}(0, F(\omega, x, p)) \tag{2}$$

成立.

证 1) 任意的 $p \in P$，考虑 $G(\cdot, p): \Omega \rightrightarrows X$ 的图像

$$\begin{aligned} \operatorname{gph} G(\cdot, p) = &\{(\omega, x) \in \Omega \times X: x \in G(\omega, p)\} = \\ &\{(\omega, x) \in \Omega \times X: 0 \in F(\omega, x, p)\} = \\ &\{(\omega, x) \in \Omega \times X: F(\omega, x, p) \cap \{0\} \neq \varnothing\} \end{aligned}$$

因为 $F(\cdot, \cdot, p): \Omega \times X \rightrightarrows Y$ 可测，所以

$$\{(\omega, x) \in \Omega \times X: F(\omega, x, p) \cap \{0\} \neq \varnothing\} \in \mathscr{A} \times \mathscr{B}(X)$$

从而

$$\operatorname{gph} G(\cdot, p) \in \mathscr{A} \times \mathscr{B}(X)$$

任给 $B \in \mathscr{B}(X)$，由文献[2] 定理 8.3.2 得

$$\pi_\Omega(\operatorname{gph} G(\cdot, p) \cap (\Omega \times B)) \in \mathscr{A}$$

因为

$$\begin{aligned} \pi_\Omega(\operatorname{gph} G(\cdot, p) \cap (\Omega \times B)) = &\{\omega \in \Omega: \exists \in X, (\omega, x) \in \operatorname{gph} G(\cdot, p) \cap (\Omega \times B)\} = \\ &\{\omega \in \Omega: \exists \in B, x \in G(\omega, p)\} = \\ &\{\omega \in \Omega: G(\omega, p) \cap B \neq \varnothing\} \end{aligned}$$

所以

$$\{\omega \in \Omega: G(\omega, p) \cap B \neq \varnothing\} \in \mathscr{A}$$

从而 $G(\cdot, p): \Omega \rightrightarrows X$ 是 $\mathscr{B}$-可测的.

2) 任给 $\omega \in \Omega$. 由假设条件，存在常数 $r > 0$ 和 $\sigma > 0$ 满足条件 (i) 和 (ii). 任意的 $\mu \in \left(0, \frac{r\sigma}{2(1+\sigma)}\right)$，任意的 $(x, p) \in B(x_0, \frac{r}{2}) \times B(p_0, r)$ 且 $\operatorname{dist}(0, F(\omega, x, p)) < \mu$，现在证明(2) 式成立. 若 $\operatorname{dist}(0, F(\omega, x, p)) = 0$，则 $0 \in F(\omega, x, p)$，故 $x \in G(\omega, p)$，从而(2) 式两边均为 0，即(2) 式成立. 不妨假设 $\operatorname{dist}(0, F(\omega, x, p)) = \alpha$，其中 $\alpha \in (0, \mu)$，下面只需证明

$$\operatorname{dist}(x, G(\omega, p)) \leqslant \frac{\alpha(1+\sigma)}{\sigma}$$

因为

$$0 < \alpha < \mu < \frac{r\sigma}{2(1+\sigma)}$$

所以

$$\frac{2\alpha}{r} < \frac{\sigma}{1+\sigma}$$

任意的 $\varepsilon \in (0, r-\mu)$ 且

$$\frac{2(\alpha+\varepsilon)}{r} < \frac{\sigma}{1+\sigma}$$

由距离函数的定义，存在 $\bar{y} \in F_{\omega,p}(x)$ 使得 $\|\bar{y}\| < \alpha + \varepsilon < \mu + \varepsilon < r$. 定义函数 $f_p: X \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ 为

$$f_p(x', y) = \|y\| + \delta((x', y); \operatorname{gph} F_{\omega,p}) \qquad \forall (x', y) \in X \times Y$$

则根据条件 (i)，f_p 在 $X \times Y$ 上是下半连续的. 任意的 $t \in \left(\frac{2(\alpha+\varepsilon)}{r}, \frac{\sigma}{1+\sigma}\right)$，令

$$\beta = f_p(x, \bar{y}) = \| \bar{y} \|$$

易知

$$f_p(x, \bar{y}) = t \cdot \frac{\beta}{t}$$

显然，

$$f_p(x, \bar{y}) \leqslant \inf_{(x', y) \in B(x_0, r) \times B(0, r)} f_p(x', y) + t \cdot \frac{\beta}{t}$$

由文献[3]定理 2.26 中的 Ekeland 变分原理，存在$(\hat{x}, \hat{y}) \in B(x_0, r) \times B(0, r)$满足

$$f_p(\hat{x}, \hat{y}) \leqslant f_p(x, \bar{y}), \ \| (\hat{x}, \hat{y}) - (x, \bar{y}) \| \leqslant \frac{\beta}{t}$$

和

$$f_p(\hat{x}, \hat{y}) \leqslant f_p(x', y) + t \cdot \| (x', y) - (\hat{x}, \hat{y}) \| \qquad \forall (x', y) \in B(x_0, r) \times B(0, r)$$

这意味着

$$(\hat{x}, \hat{y}) \in \operatorname{gph} F_{w,p}, \ \| \hat{y} \| \leqslant \| \bar{y} \|, \ \| \hat{x} - x \| + \| \hat{y} - \bar{y} \| \leqslant \frac{\beta}{t}$$

且对任意的$(x', y) \in B(x_0, r) \times B(0, r)$，

$$\| \hat{y} \| \leqslant \| y \| + t(\| x' - \hat{x} \| + \| y - \hat{y} \|) + \delta((x', y); \operatorname{gph} F_{w,p}) \tag{3}$$

下面证明 $0 \in F_{\omega,p}(\hat{x})$. 假设 $0 \notin F_{\omega,p}(\hat{x})$，则 $\hat{y} \neq 0$. 显然，$\hat{x} \in B(x_0, r)$，$\hat{y} \in B(0, r)$. 因为

$$\| \hat{x} - x_0 \| \leqslant \| \hat{x} - x \| + \| x - x_0 \| \leqslant \frac{\beta}{t} + \frac{r}{2} < \frac{\alpha + \varepsilon}{t} + \frac{r}{2} < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$$

和

$$\| \hat{y} \| \leqslant \| \bar{y} \| = \beta < \alpha + \varepsilon < \mu + \varepsilon < r$$

所以

$$(\hat{x}, \hat{y}) \in \operatorname{int} B(x_0, r) \times \operatorname{int} B(0, r) = \operatorname{int} (B(x_0, r) \times B(0, r))$$

定义函数 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3: X \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ 分别为

$$\varphi_1(x', y) = \| y \|$$

$$\varphi_2(x', y) = t(\| x' - \hat{x} \| + \| y - \hat{y} \|)$$

$$\varphi_3(x', y) = \delta((x', y); \operatorname{gph} F_{w,p}) \qquad \forall (x', y) \in X \times Y$$

由(3)式知，$(\hat{x}, \hat{y})$是函数 $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$ 在 $X \times Y$ 上的局部极小值点. 由文献[3]命题 1.114 得

$$(0, 0) \in \partial(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)(\hat{x}, \hat{y})$$

显然，φ_1 和 φ_2 在 $X \times Y$ 上是局部 Lipschitz 连续的，且 φ_3 在 $X \times Y$ 上是下半连续的. 由文献[3]推论 1.81，易知 $\partial^\infty \varphi_1(\hat{x}, \hat{y}) = \{(0, 0)\}$，$\partial^\infty \varphi_2(\hat{x}, \hat{y}) = \{(0, 0)\}$ 和 $\partial \varphi_2(\hat{x}, \hat{y}) \subset tB_{X^*} \times 0 + 0 \times tB_{Y^*}$. 由文献[3]定理 3.36 得

$$(0, 0) \in \partial \varphi_1(\hat{x}, \hat{y}) + \partial \varphi_2(\hat{x}, \hat{y}) + \partial \varphi_3(\hat{x}, \hat{y})$$

由函数 φ_1 和 φ_3 的定义得

$$\partial \varphi_1(\hat{x}, \hat{y}) = \{0\} \times \partial \| \cdot \| (\hat{y}) \qquad \partial \varphi_3(\hat{x}, \hat{y}) = N((\hat{x}, \hat{y}); \operatorname{gph} F_{w,p})$$

因为 $\hat{y} \neq 0$，由文献[4]命题 2.124 得

$$\partial \| \cdot \| (\hat{y}) = \{ y^* \in Y^*: \| y^* \| = 1, \langle y^*, \hat{y} \rangle = \| \hat{y} \| \}$$

故存在 $y_1^* \in Y^*$ 和$(x_3^*, y_3^*) \in N((\hat{x}, \hat{y}); \operatorname{gph} F_{w,p})$使得

$$\| y_1^* \| = 1,\ \langle y_1^*,\ \hat{y} \rangle = \| \hat{y} \|,\ \| x_3^* \| \leqslant t,\ \| y_1^* + y_3^* \| \leqslant t$$

因此,

$$\| y_3^* \| \geqslant 1 - t > 0$$

令

$$x^* = \frac{x_3^*}{\| y_3^* \|} \qquad y^* = -\frac{y_3^*}{\| y_3^* \|}$$

则$(x^*, -y^*) \in N((\hat{x}, \hat{y});\ \mathrm{gph}\ F_{\omega,p})$,从而$x^* \in D_N^* F_{\omega,p}(\hat{x}, \hat{y})(y^*)$. 易知

$$\| y^* \| = 1,\ \| x^* \| = \frac{\| x_3^* \|}{\| y_3^* \|} \leqslant \frac{t}{1-t} < \sigma$$

这与条件(ii)矛盾,故$0 \in F_{\omega,p}(\hat{x})$,即$\hat{x} \in G(\omega, p)$,从而

$$\mathrm{dist}(x, G(\omega, p)) \leqslant \| x - \hat{x} \| \leqslant \frac{\beta}{t} < \frac{\alpha + \varepsilon}{t}$$

因为$t < \dfrac{\sigma}{1+\sigma}$,令$t \to \dfrac{\sigma}{1+\sigma}$和$\varepsilon \to 0$,则

$$\mathrm{dist}(x, G(\omega, p)) \leqslant \frac{\alpha(1+\sigma)}{\sigma} = \frac{1+\sigma}{\sigma}\mathrm{dist}(0, F(\omega, x, p))$$

注1 文献[1]定理3.1需要假设度量投射的内半紧性,但是定理1不需要. 从定理1的证明过程可以看出,若将拓扑空间P换成度量空间,定理的结论仍然成立.

定理2 假设定理1的条件(i),(ii)满足,且

(iii) 任意的$\omega \in \Omega$,$F(\omega, \cdot, \cdot)$在(x_0, p_0)是下半连续的.

则

1) 任意的$p \in P$,$G(\cdot, p): \Omega \rightrightarrows X$是$\mathscr{B}$-可测的;

2) 任意的$\omega \in \Omega$,$G(\omega, \cdot): P \rightrightarrows X$在$(x_0, p_0)$周围是度量正则的,且具有系数$\dfrac{1+\sigma}{\sigma}$. 事实上,存在$x_0$的邻域$V$和$p_0$的邻域$U$,使得对所有的$(x, p) \in V \times U$有

$$\mathrm{dist}(x, G(\omega, p)) \leqslant \frac{1+\sigma}{\sigma}\mathrm{dist}(0, F(\omega, x, p))$$

成立.

证 显然,定理2的结论1)成立. 现在证明定理2的结论2)也成立. 任意的$\omega \in \Omega$,由定理1,任意的$\mu \in \left(0, \dfrac{r\sigma}{2(1+\sigma)}\right)$,任意的$(x, p) \in B(x_0, \dfrac{r}{2}) \times B(p_0, r)$且$\mathrm{dist}(0, F(\omega, x, p)) < \mu$,有

$$\mathrm{dist}(x, G(\omega, p)) \leqslant \frac{1+\sigma}{\sigma}\mathrm{dist}(0, F(\omega, x, p))$$

成立. 注意到$0 \in F(\omega, x_0, p_0) \cap \mathrm{int}\ B_\mu(0)$. 由条件(iii),存在$x_0$的邻域$\widetilde{V}$和$p_0$的邻域$\widetilde{U}$,使得对所有的$(x, p) \in \widetilde{V} \times \widetilde{U}$有

$$F(\omega, x, p) \cap \mathrm{int}\ B_\mu(0) \neq \varnothing$$

成立. 从而对所有的$(x, p) \in \widetilde{V} \times \widetilde{U}$有$\mathrm{dist}(0, F(\omega, x, p)) < \mu$.

令

$$V = B(x_0, \frac{r}{2}) \cap \widetilde{V} \qquad U = B(p_0, r) \cap \widetilde{U}$$

下面证明V,U和$\dfrac{1+\sigma}{\sigma}$满足定理2的结论2). 事实上,任意的$(x, p) \in V \times U$,则$(x, p) \in \widetilde{V} \times \widetilde{U}$,故

$$\mathrm{dist}(0, F(\omega, x, p)) < \mu$$

又因为$(x, p) \in B(x_0, \frac{r}{2}) \times B(p_0, r)$，所以

$$\mathrm{dist}(x, G(\omega, p)) \leqslant \frac{1+\sigma}{\sigma}\mathrm{dist}(0, F(\omega, x, p))$$

定理 3　假设定理 1 的条件 (i),(ii) 满足，P 是赋范空间的子集，且

(iii) 任意的 $\omega \in \Omega$，存在 x_0 的邻域 V，p_0 的邻域 U 和常数 $l > 0$ 满足

$$F(\omega, x, p') \subset F(\omega, x, p) + l \| p' - p \| B_Y \qquad \forall x \in V, \forall p, p' \in U \tag{4}$$

则

1) 任意的 $p \in P$，$G(\cdot, p): \Omega \rightrightarrows X$ 是 $\mathscr{B}$-可测的；

2) 任意的 $\omega \in \Omega$，$G(\omega, \cdot): P \rightrightarrows X$ 在(p_0, x_0)周围是 Lipschitz 的.

证　显然，定理 3 的结论 1) 成立. 下面证明定理 3 的结论 2) 成立. 任意的 $\omega \in \Omega$，由定理 1 知任意的 $\mu \in \left(0, \frac{r\sigma}{2(1+\sigma)}\right)$，对所有的$(x, p) \in B(x_0, \frac{r}{2}) \times B(p_0, r)$且 $\mathrm{dist}(0, F(\omega, x, p)) < \mu$，有

$$\mathrm{dist}(x, G(\omega, p)) \leqslant \frac{1+\sigma}{\sigma}\mathrm{dist}(0, F(\omega, x, p)) \tag{5}$$

成立. 现在证明 $G(\omega, \cdot)$ 在(p_0, x_0)周围是 Lipschitz 的，即存在常数 $l' > 0$，p_0 的邻域 $\widetilde{U}$ 和 x_0 的邻域 $\widetilde{V}$，使得对所有的 $p, p' \in \widetilde{U}$ 有

$$G(\omega, p) \cap \widetilde{V} \subset G(\omega, p') + l' \cdot \| p - p' \| B_X$$

假设存在序列 $x_k \to x_0$，$p_k \to p_0$ 和 $p'_k \to p_0$ 且对所有的 $k = 1, 2, \cdots$ 有

$$x_k \in G(\omega, p_k) \backslash [G(\omega, p'_k) + k \| p_k - p'_k \| B_X]$$

则对所有的 $k = 1, 2, \cdots$，有

$$k \| p_k - p'_k \| \leqslant \mathrm{dist}(x_k, G(\omega, p'_k)) \tag{6}$$

因为 $0 \in F(\omega, x_k, p_k)$，由(4)式，对充分大的 k 有

$$0 \in F(\omega, x_k, p'_k) + l \| p_k - p'_k \| B_Y$$

从而对充分大的 k 有

$$\mathrm{dist}(0, F(\omega, x_k, p'_k)) \leqslant l \| p_k - p'_k \| \tag{7}$$

特别地，对充分大的 k，有

$$\mathrm{dist}(0, F(\omega, x_k, p'_k)) < \mu \tag{8}$$

综合(5)－(8)式可得

$$k \| p_k - p'_k \| \leqslant \mathrm{dist}(x_k, G(\omega, p'_k)) \leqslant \frac{1+\sigma}{\sigma}\mathrm{dist}(0, F(\omega, x_k, p'_k)) \leqslant \frac{l(1+\sigma)}{\sigma} \| p_k - p'_k \|$$

故当 k 充分大时有 $k \leqslant \frac{l(1+\sigma)}{\sigma}$，这是一个矛盾.

注 2　定理 3 所使用的证明方法起源于文献[5]定理 4.3，这与文献[6]定理 3.5，文献[7]定理 3.2 和文献[8]定理 3.3 的证明方法不同.

参考文献：

[1] YANG M G，HUANG N J. Random Implicit Function Theorems in Asplund Spaces with Applications [J]. Journal of Nonlinear and Convex Analysis，2013，14(3)：497－517.

[2] AUBIN J P，FRANKOWSKA H. Set-Valued Analysis [M]. Berlin：Birkhäuser，1990.

[3] MORDUKHOVICH B S. Variational Analysis and Generalized Differentiation，Vol. I：Basic Theory，Vol. II：Applica-

tions [M]. Berlin: Springer, 2006.
[4] BONNANS J F, SHAPIRO A. Perturbation Analysis of Optimization Problems [M]. New York: Springer, 2000.
[5] CHIEU N H, YAO J C, YEN N D. Relationships between Robinson Metric Regularity and Lipschitz-Like Behavior of Implicit Multifunctions [J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, 2010, 72(9-10): 3594-3601.
[6] HUY N Q, YAO J C. Stability of Implicit Multifunctions in Asplund Spaces [J]. Taiwanese Journal of Mathematics, 2009, 13(1): 47-65.
[7] HUY N Q, KIM D S, NINH K V. Stability of Implicit Multifunctions in Banach Spaces [J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2012, 155(2): 558-571.
[8] LEE G M, TAM N N, YEN N D. Normal Coderivative for Multifunctions and Implicit Function Theorems [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2008, 338(1): 11-22.

Metric Regularity of Random Implicit Multifunctions in Asplund Spaces

JIANG Guan-min[1], YANG Ming-ge[2]

1. College of Mobile Telecommunications, Chongqing University of Posts and Telecom, Hechuan Chongqing 401520, China;
2. School of Management, Shanghai University, Shanghai 200444, China

Abstract: This paper is mainly devoted to the discussion of metric regularity of random implicit multifunctions in Asplund spaces with the Ekeland variational principle, the Fermat rule, subdifferentials of Lipschitzian functions and sum rules for basic and singular subgradients. Firstly, the new sufficient conditions for the local metric regularity of random implicit multifunctions are given. Secondly, by using the above result, sufficient conditions for the metric regularity and the Lipschitz property of random implicit multifunctions are given in Asplund spaces. These results improve the corresponding results known in literature.

Key words: normal coderivative; random implicit multifunction; (local) metric regularity; Lipschitz property; Asplund space

责任编辑 张 构