DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2017.08.008

无穷直线上 K-解析函数的 Riemann 边值问题与 Hilbert 边值问题①

张建元[1]，　韩　艳[1]，　张毅敏[1]，
赵书芬[1]，　刘承萍[1]，　张　昕[2]

1. 昭通学院 数学与统计学院，云南 昭通 657000；2. 昭通市统计局，云南 昭通 657000

摘要：首先引入了无穷直线上(分片)K-解析函数的 Cauchy 型 K-积分的概念，利用 K-对称变换的方法研究了 Cauchy 型 K-积分的某些性质，然后借助函数在无穷直线上的指标与这些 Cauchy 型 K-积分的性质，得到了在无穷直线上 K-解析函数类中的 Riemann 边值问题的可解条件和解的表达式以及它们与指标之间的关系；进一步利用半平面内的 K-对称扩张函数，把 Hilbert 边值问题转化为无穷直线 X 上的 Riemann 边值问题，又得到了 Hilbert 边值问题的可解条件和解的表达式. 而解析函数和共轭解析函数都是 K-解析函数的特例，所得结果推广了解析函数和共轭解析函数中的相应结论.

关　键　词：$\hat{H}_k$ 类函数；直线上的 Cauchy 型 K-积分；(分片)K-解析函数；K-对称变换；K-对称扩张函数；边界值公式；Riemann 边值问题；Hilbert 边值问题；指标

中图分类号：O174.55；O175.5　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9868(2017)08-0057-08

在文献[1－4]中，给出 K-解析函数(变换)与 K-积分的概念以及 K-解析函数(在域内的值)可由其边界上的值来表示这一特性. 文献[5]给出了一个定义在全平面互补的两个区域内的分片 K-解析函数，只要它们(左右)的边界值(若存在)满足一定的条件，那么它也有此特性. 由于以上各种情况的区域边界是周线，那么当区域边界是通过无穷的曲线，且它在其上边界值也满足一定的条件时，该函数是否也具有类似特性？不失一般性，设该无穷曲线是实轴，记为 X，其正向与实轴相同，同时把以 X 为边界的上下半平面分别记为 Z^+，Z^-. 本文将在无穷直线 X 上对其相应的 Riemann 边值问题及 Hilbert 边值问题作出如下的讨论与研究.

1　基本概念

设 $z(k) \equiv x + iky (0 \neq k \in \mathbb{R})$ 为 $z = x + iy$ 的 K-复数，K-对称变换[2,6-8] $\zeta = z(k)$ 一对一地把 Z^+ 变为 K-平面 $Z^+(k)$，边界 X 变为 K-直线 L：$\xi = x(k)$，此时 X 与 L 分别关于区域 Z^+ 及 $Z^+(k)$ 是 K 保方(转)向，当 $k > 0$ 时，X 与 L 是保转向的；当 $k < 0$ 时，X 与 L 是反保转向的，X^+ 对应 L^-，反之亦然.

定义 1[9]　设 $f(z)$ 在 $\overline{Z^+}$ 上连续，若满足下列两个条件：

(ⅰ) 当 $z_1, z_2 \in \overline{Z^+}$，$|z_1(k)|$，$|z_2(k)| \leqslant R$ 时，

① 收稿日期：2016-10-13
基金项目：国家自然科学基金项目(11061028)；云南省教育厅科学研究基金项目(2012Y435，2013Y578)；云南省应用基础研究计划项目(2016FD082)；昭通学院校级科学研究课题(2016xj32).
作者简介：张建元(1956-)，男，云南昭通人，教授，主要从事复分析及边值问题的研究.

$$|f(z_1)-f(z_2)|<A|z_1(k)-z_2(k)|^{\alpha}$$

(ii) 当 $z_1, z_2 \in \overline{Z^+}$，$|z_1(k)|$，$|z_2(k)|>R$ 时，

$$|f(z_1)-f(z_2)|<A\left|\frac{1}{z_1(k)}-\frac{1}{z_2(k)}\right|^{\alpha}(0<\alpha\leqslant 1)$$

则称 $f(z)\in \hat{H}{}_k^{\alpha}(\overline{Z^+})$，简记为 $f(z)\in \hat{H}_k(\overline{Z^+})$ 或 $\hat{H}_k$. 同样可在$\overline{Z^-}$ 上定义 $\hat{H}{}_k^{\alpha}(\overline{Z^-})$ 以及在 X 上定义 $\hat{H}{}_k^{\alpha}(X)$.

显然，若 $f(x)\in \hat{H}_k(X)$，则

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=f(\pm\infty)=C(\text{存在})$$

定义 2[3-5, 8-13]　设 $f(x)\in \hat{H}_k(X)$，称积分

$$F(z)=\frac{\operatorname{sgn}(k)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)}{(t-z)(k)}\mathrm{d}t(k)\qquad z\notin X \tag{1}$$

是 X 上的 Cauchy 型 K-积分，$f(t)$ 叫做它的密度.

当 $x\in X$ 时，有

$$F(x)=\frac{\operatorname{sgn}(k)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)}{(t-x)(k)}\mathrm{d}t(k)\qquad x\in X \tag{2}$$

对于(1),(2) 式中的积分主值，有如下边界值性质.

定理 1[5, 9-13](边界值公式)　若 X 为 x 轴，$f(t)$ 在 X 上满足条件 $\hat{H}{}_k^{\alpha}(X)$，其中 $0<\alpha\leqslant 1$，则

$$F^{\pm}(x)=\frac{\pm 1}{2}f(x)+\frac{\operatorname{sgn}(k)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)}{(t-x)(k)}\mathrm{d}t(k)\qquad x\in X \tag{3}$$

$$\begin{cases}F^{+}(x)-F^{-}(x)=f(x)\\ F^{+}(x)+F^{-}(x)=\dfrac{\operatorname{sgn}(k)}{\pi i}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)}{(t-x)(k)}\mathrm{d}t(k)\end{cases}\qquad x\in X \tag{4}$$

其中 $F(x)=\dfrac{\operatorname{sgn}(k)}{2\pi i}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)}{(t-x)(k)}\mathrm{d}t(k)$ 为积分(1) 的 Cauchy 主值.

定理 2[5, 9-13](边界值性质)　在定理 1 的条件下，$F(x)$ 满足条件 $\hat{H}{}_k^{\alpha}(X)$ 且 $F(\infty)=0$.

引理 1　若无穷曲线 X 为 x 轴，变换 $\zeta=z(k)$ 把 X 变为 K-直线 L：$\xi=x(k)$，则

$$f(x)\in \hat{H}_k(x)\Leftrightarrow f(\xi(k^{-1}))\in \hat{H}(L)$$

更一般地，若变换 $\zeta=z(k)$ 把$\overline{Z^{\pm}}$ 变为$\overline{Z^{\pm}(k)}$，则

$$f(z)\in \hat{H}_k(\overline{Z^{\pm}})\Leftrightarrow f(\zeta(k^{-1}))\in \hat{H}(\overline{Z^{\pm}(k)})$$

我们只在$\overline{Z^+}$ 上对定义 1 中 (ii) 进行验证，其他情况可类似进行.

令

$$g(\zeta)=f(\zeta(k^{-1}))=f(z)$$

因 $f(z)\in \hat{H}_k(\overline{Z^+})$，当 $z_1, z_2\in \overline{Z^+}$，$|\zeta_1|=|z_1(k)|$，$|\zeta_2|=|z_2(k)|>R$ 时，有[1]

$$\begin{aligned}|g(\zeta_1)-g(\zeta_2)|=|f(\zeta_1(k^{-1}))-f(\zeta_2(k^{-1}))|\leqslant\\ A|[\zeta_1(k^{-1}k)]^{-1}-[\zeta_2(k^{-1}k)]^{-1}|^{\alpha}=\\ A|\zeta_1^{-1}-\zeta_2^{-1}|^{\alpha}\end{aligned}$$

故

$$g(\zeta)=f(\zeta(k^{-1}))\in \hat{H}(\overline{Z^+(k)})$$

反之也成立.

定理 1-2 的证明　由于 K-对称变换 $\zeta=z(k)$ 分别把 Z^+，Z^- 变为 K-平面 $Z(k)$，边界 X 与 L 分别关于相应的区域是 K 保方(转)向. 于是 X 上 Cauchy 型 K-积分(1) 变为 L 上 Cauchy 型积分

$$F(\zeta(k^{-1}))=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\tau(k^{-1}))}{\tau-\zeta}\mathrm{d}\tau$$

即

$$G(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(\tau)}{\tau-\zeta}\mathrm{d}\tau \qquad \zeta\notin L$$

由 $f(x)\in\hat{H}_k(X)\Leftrightarrow f(\xi(k^{-1}))\in\hat{H}(L)$，得 $G(\zeta)$ 解析[9]. 又 $G(\zeta)=F(\zeta(k^{-1}))$ 为解析 $\Leftrightarrow F(z)=G(z(k))(z\notin X)$ 为 K -解析[1]，由 X 上解析函数的普莱梅(J. Plemelj) 公式及普利瓦洛夫(Privalov) 定理[9] 得定理 1－2 成立，且

$$\begin{cases}G^{\pm}(\xi)=\dfrac{\pm 1}{2}g(\xi)+\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(\tau)}{\tau-\xi}\mathrm{d}\tau\\ G(\xi)\in H(L)\qquad G(\infty)=0\end{cases}$$

即

$$F^{\pm}(x)=\frac{\pm 1}{2}f(x)+\frac{\mathrm{sgn}(k)}{2\pi i}\int_L\frac{f(t)}{(t-x)(k)}\mathrm{d}t(k),\ F(x)\in\hat{H}_k(X),\ F(\infty)=0$$

此时 $\xi=x(k)\in L$，即(3) 式成立，进一步可证(4) 式与(3) 式等价.

注 1　关于定理 2 有如下更一般的结论，命题：在定理 1 的条件下，$F(z)$ 分别满足条件 $\hat{H}_k(\overline{Z^+})$，$\hat{H}_k(\overline{Z^-})$.

注 2　在定理 1－2 证明过程中知，(1) 式定义的函数 $F(z)(z\notin X)$ 分别在 Z^+，Z^- 内 K -解析，但在 X 上边界值有跳跃：$F^+(x)-F^-(x)=f(x)$，这样 $F(z)$ 就是一个分片(区)K -解析函数.

2　无穷直线上的 Riemann 边值问题

求一个包括无穷远点在内的分片 K -解析函数 $\Phi(z)$，使它在 X 上满足条件[5,9-14]：

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)+g(t)\qquad t\in X \tag{5}$$

其中 $G(t)\neq 0$，$g(t)\in\hat{H}_k(X)$ 的问题称为 X 上的 Riemann 边值问题，简称 Riemann 边值问题，记为 R 问题. 在 ∞ 处，因 $G(t)\neq 0$，$g(t)\in\hat{H}_k(X)$，$G(\infty)\neq 0$，$g(\infty)$ 皆存在. 若要求 $\Phi(z)$ 在 ∞ 处有界，即当 $z\in\overline{Z^{\pm}}$，$z\to\infty$ 时，$\Phi^{\pm}(z)\to\Phi^{\pm}(\infty)$ 存在，在 X 上 $\Phi^{\pm}(+\infty)=\Phi^{\pm}(-\infty)$.

把 $\kappa\triangleq\mathrm{sgn}(k)\mathrm{Ind}_X G(t)=(2\pi i)^{-1}\mathrm{sgn}(k)[\ln G(t)]_X=(2\pi)^{-1}\mathrm{sgn}(k)[\arg G(t)]_X$ 称为 R 问题的指标.

令

$$G_0(t)=Q(t)G(t)\qquad Q(t)\triangleq[(t+i)(k)/(t-i)(k)]^{\kappa}$$

易证

$$G_0(t)\in\hat{H}_k(X)$$
$$G_0(t)\neq 0,\ G_0(\infty)=G(\infty)\neq 0,\ \mathrm{Ind}_X G_0(t)=-\mathrm{sgn}(k)\kappa+\mathrm{Ind}_X G(t)=0$$

对于齐次 R 问题：

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)\qquad t\in X \tag{6}$$

改写：

$$\Psi^+(t)=G_0(t)\Psi^-(t)$$

其中

$$\psi(z)=\begin{cases}[(z+i)(k)]^{\kappa}\phi(z) & z\in Z^+\\ [(z-i)(k)]^{\kappa}\phi(z) & z\in Z^-\end{cases}$$

$\Psi(z)$ 分片 K -解析，且 $\Psi(z)=O(|z|^{\kappa})(z\to\infty)$.

令

$$\Gamma(z)=\frac{\mathrm{sgn}(k)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\ln G_0(t)}{(t-z)(k)}\mathrm{d}t(k) \tag{7}$$

因 $\mathrm{Ind}_X G_0(t)=0$，$\ln G_0(t)$ 单值 $\in \hat{H}_k(X)$，有

$$\Gamma^{\pm}(x)\in \hat{H}_k(X) \qquad \Gamma(\pm\infty)=0$$

再令

$$X(z)=\begin{cases}[(z+i)(k)]^{-\kappa}e^{\Gamma(z)} & z\in Z^+\\ [(z-i)(k)]^{-\kappa}e^{\Gamma(z)} & z\in Z^-\end{cases} \tag{8}$$

则

$$X^+(t)=G(t)X^-(t) \tag{9}$$

且 $X(z)$ 分片 K-解析，$X(z)\neq 0$(包括 $X^{\pm}(t)\neq 0$)，在 $z=\infty$ 处有有限阶.

由(6)，(9)式得：$\Phi^+(t)/X^+(t)=\Phi^-(t)/X^-(t)$，故 $F(z)=\Phi(z)/X(z)$ 在全平面 K-解析，在 $z=\infty$ 处有 κ 阶. 当 $\kappa\geqslant 0$ 时，因 ∞ 至多为 $\Phi(z)$ 的 0 阶极，$\Phi(z)/X(z)$ 在 ∞ 至多有 κ 阶极，由(广义)刘维尔定理得 $\Phi(z)/X(z)=P_\kappa(z)$，即 $\Phi(z)=P_\kappa(z)X(z)$；当 $\kappa<0$ 时，$\Phi(\infty)/X(\infty)=0$，由刘维尔定理得 $\Phi(z)\equiv 0$. 于是得如下结论.

定理 3 对于齐次 R 问题，若实数轴上 R 问题的指标为 κ，则当 $\kappa\geqslant 0$ 时，其一般解为 $\Phi(z)=P_\kappa(z)X(z)$(其中 $P_\kappa(z)$ 为 $z(k)$ 的 κ 次任复系数多项式，$P_0(z)\equiv C$，C 是任意常数)；当 $\kappa<0$ 时，$\Phi(z)\equiv 0$.

对于非齐次 R 问题，由(5)，(9)式得：

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)}=\frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)}+\frac{g(t)}{X^+(t)}$$

因一般情况下(除 $\kappa\leqslant 0$ 外)

$$\frac{g(t)}{X^+(t)}=[(t+i)(k)]^{\kappa}g(t)e^{-\Gamma^+(t)}\notin \hat{H}_k$$

若令

$$Y(z)=\begin{cases}e^{\Gamma(z)} & z\in Z^+\\ \left[\dfrac{(z+i)(k)}{(z-i)(k)}\right]^{\kappa}e^{\Gamma(z)} & z\in Z^-\end{cases} \tag{10}$$

有

$$\frac{\Phi^+(t)}{Y^+(t)}=\frac{\Phi^-(t)}{Y^-(t)}+\frac{g(t)}{Y^+(t)} \tag{11}$$

则

$$\frac{g(t)}{Y^+(t)}\in \hat{H}_k$$

令

$$\psi(z)=\frac{\mathrm{sgn}(k)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(t)}{Y^+(t)(t-z)(k)}\mathrm{d}t(k)$$

得

$$\frac{\Phi^+(t)}{Y^+(t)}-\psi^+(t)=\frac{\Phi^-(t)}{Y^-(t)}-\psi^-(t)$$

从而 $F(z)=\dfrac{\Phi(z)}{Y(z)}-\psi(z)$ 在全平面 K-解析，除在 $z=-i$ 处可能有极外. 当 $\kappa\geqslant 0$ 时，$F(z)$ 在 $z=-i$ 处有 κ 阶极，为了使它在此处有界，作 $[(z+i)(k)]^{\kappa}F(z)$，但在 $z=\infty$ 处它有 κ 阶，由(广义)刘维尔定理得 $[(z+i)(k)]^{\kappa}F(z)=P_\kappa(z)$. 由(7)，(8)，(10)式得非齐次 R 问题的一般解为：

$$\Phi(z)=\frac{\mathrm{sgn}(k)Y(z)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(t)}{Y^+(t)(t-z)(k)}\mathrm{d}t(k)+X(z)P_\kappa(z) \tag{12}$$

其中 $P_\kappa(z)$ 为 $z(k)$ 的 κ 次任意复系数多项式，$P_0(z)\equiv C$，C 是任意常数.

当 $\kappa<0$ 时，$F(z)$ 在全平面有界，由刘维尔定理得 $F(z)=C$，即

$$\Phi(z)=Y(z)[\Psi(z)+C] \qquad C\text{ 为常数} \tag{13}$$

但它在 $z=-i$ 处有极，为了消除极点，需且只需[1, 9, 15, 16] $\Psi(-i)=-C$，$\Psi_k^{(n)}(-i)=0$，即

$$\frac{\operatorname{sgn}(k)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(t)}{Y^+(t)(t+i)(k)}\mathrm{d}t(k)=-C \tag{14}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(t)}{Y^+(t)[(t+i)(k)]^{n+1}}\mathrm{d}t(k)=0 \qquad n=1,2,\cdots,-\kappa-1 \tag{15}$$

也就是当且仅当 $g(t)$ 满足条件(14)，(15) 时，非齐次 R 问题有唯一解(13)，于是得如下结论.

定理 4　若实数轴上 R 问题的指标为 κ，则非齐次 R 问题在 $\Phi(\infty)$ 有界的附加条件下，当 $\kappa\geqslant 0$ 时，问题有一般解(12)；当 $\kappa=-1$ 时，问题有唯一解(13)，其中 C 由(14) 式给出；当 $\kappa<0$ 时，当且仅当 $g(t)$ 满足条件(14)，(15) 时，R 问题有唯一解(13).

下面讨论非齐次 R 问题在 $\Phi(\infty)=0$ 的附加条件下的解. 要求 $\Phi(\infty)=0$，必有 $g(\infty)=0$，从而 $\Psi(\infty)=0$. 上述 $F(z)$ 在 $z=\infty$ 处也为零. 因此当 $\kappa\geqslant 0$ 时，

$$[(z+i)(k)]^{\kappa}F(z)=P_{\kappa-1}(z)$$

故问题有一般解

$$\Phi(z)=\frac{\operatorname{sgn}(k)Y(z)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(t)}{Y^+(t)(t-z)(k)}\mathrm{d}t(k)+X(z)P_{\kappa-1}(z) \tag{16}$$

其中 $P_{\kappa-1}(z)$ 为 $z(k)$ 的 $\kappa-1$ 次任意复系数多项式. 当 $\kappa=0$ 时，$P_{-1}(z)\equiv 0$；当 $\kappa\leqslant -1$ 时，$F(z)\equiv 0$. 故

$$\Phi(z)=Y(z)\Psi(z)=\frac{\operatorname{sgn}(k)Y(z)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(t)}{Y^+(t)(t-z)(k)}\mathrm{d}t(k) \tag{17}$$

但 $\Phi(z)$ 在 $z=-i$ 处有 $-\kappa$ 阶极，为了消除极点，应使[1,9,15-16] $\Psi_k^{(n)}(-i)=0$，$n=0,1,2,\cdots,-\kappa-1$. 即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(t)\mathrm{d}t(k)}{Y^+(t)[(t+i)(k)]^{n}}=0 \qquad n=1,2,\cdots,-\kappa \tag{18}$$

于是有如下结论.

定理 5　若实数轴上 R 问题的指标为 κ，则非齐次 R 问题在 $\Phi(\infty)=0$ 的附加条件下，当 $\kappa\geqslant 0$ 时，问题有一般解(16)；当 $\kappa\leqslant -1$ 时，当且仅当 $g(t)$ 满足 $-\kappa$ 个条件(18) 时，R 问题有唯一解(17).

3　半平面内的 Hilbert 边值问题

把满足条件：

$$z(k)\cdot z^*(k)=|z(k)|^2=|z^*(k)|^2$$

的点 z 与 z^* 称为是关于 X 的 K -对称点[6-9]. 显然

$$z^*=z(-1) \qquad (z(-1))^*=z^*(-1)=z^{**}=z \qquad x^*=x(x\in\mathbb{R})$$

命题 1　若 $z\in Z^{\pm}$，则 $z^*\in Z^{\mp}$.

定义 3[6-9]　设 $\Phi(z)$ 在 Z^+（或 Z^-）内有定义，$\Phi(z)$ 在 Z^-（或 Z^+）的 K -对称扩张函数为：

$$\overline{\Phi}(z)=\overline{\Phi(z(-1))} \qquad z\in Z^-\text{（或 }Z^+\text{）}$$

显然，若 $\Phi(z)$ 在 Z^++Z^- 内有定义，则 $\overline{\Phi}(z)$ 在 Z^-+Z^+ 内也有定义.

对于边界值(若存在)，有

$$\overline{\Phi}^-(x)=\overline{\Phi^+(x)} \qquad \overline{\Phi}^+(x)=\overline{\Phi^-(x)} \qquad x\in X \tag{19}$$

Z^+ 内的 Hilbert 边值问题[9-11](简称 H 问题)I：求一个在 Z^+ 内的 K -解析，在 Z^++X 上连续的函数 $\Phi(z)$，使在 X 上满足边界值条件：

$$\operatorname{Re}\{[a(t)+i\,b(t)]\Phi^+(t)\}=c(t)\text{ 或}(a+i\,b)\Phi^+(t)+(a-i\,b)\overline{\Phi^+(t)}=2c \qquad t\in X \tag{20}$$

其中 $a(t),b(t),c(t)\in\hat{H}_k(X)$ 是给定的实函数，且 $a^2(t)+b^2(t)\neq 0$ 于 X 上(包括 $t=\infty$).

当 $c(t)\equiv 0$ 时，此问题称为齐次 H 问题，当 $c(t)\neq 0$ 时，此问题称为非齐次 H 问题.

令

$$\Omega(z)=\begin{cases}\Phi(z) & z\in Z^{+}\\ \overline{\Phi}(z) & z\in Z^{-}\end{cases}$$

利用(19)式，改写(20)式得Riemann边值问题[5,9-14](简称R问题)Ⅱ：

$$(a+i\,b)\Omega^{+}(t)+(a-i\,b)\Omega^{-}(t)=2c \text{ 或 } \Omega^{+}(t)=G(t)\Omega^{-}(t)+g(t) \tag{21}$$

其中

$$G(t)=-(a-i\,b)/(a+i\,b) \qquad g(t)=2c/(a+i\,b)$$

于是H问题Ⅰ等价于在附加条件

$$\Omega^{-}(t)=\overline{\Omega^{+}(t)} \qquad t\in X \tag{22}$$

下求R问题Ⅱ的有界解.

命题2　若$\Omega(z)$是R问题Ⅱ的有界解，则$\overline{\Omega}(z)$，进而$\Omega_0(z)=[\Omega(z)+\overline{\Omega}(z)]/2$皆是这样的解，且$\Omega_0(z)$满足条件(22).

事实上，对(21)式取共轭：

$$(a-i\,b)\overline{\Omega^{+}(t)}+(a+i\,b)\overline{\Omega^{-}(t)}=2c$$

又

$$\overline{\Omega}^{+}(t)=\overline{\Omega^{-}(t)} \qquad \overline{\Omega}^{-}(t)=\overline{\Omega^{+}(t)}$$

则

$$(a+i\,b)\overline{\Omega}^{+}(t)+(a-i\,b)\overline{\Omega}^{-}(t)=2c$$

$$\Omega_0^{-}(t)=[\Omega^{-}(t)+\overline{\Omega}^{-}(t)]/2=[\overline{\overline{\Omega}^{+}(t)}+\overline{\Omega^{+}(t)}]/2=\overline{\Omega_0^{+}(t)}$$

把$\kappa\triangleq\pi^{-1}\operatorname{sgn}(k)[\arg(a-ib)]_{-\infty}^{+\infty}$称为$H$问题Ⅰ(即$R$问题Ⅱ)的指标，因$a,b\in\hat{H}_k(X)$，$a(-\infty)=a(+\infty)$，$b(-\infty)=b(+\infty)$，易得$\kappa$为一偶数. 又$|G(t)|=1$，由(7)式得

$$\Gamma(z)=\frac{\operatorname{sgn}(k)}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\theta(t)}{(t-z)(k)}\mathrm{d}t(k)$$

其中

$$\theta(t)=\arg\left\{-\left[\frac{(t+i)(k)}{(t-i)(k)}\right]^{\kappa}\frac{(a-ib)}{(a+ib)}\right\}=\arg\left\{-[(t+i)(k)]^{2\kappa}(a-ib)^{2}\right\}\in\mathbb{R}$$

故

$$\overline{\Gamma}(z)=\Gamma(z) \qquad \Gamma^{-}(t)=\overline{\Gamma^{+}(t)} \tag{23}$$

由于齐次H问题($c(t)\equiv 0$)的相应问题是齐次R问题($g(t)\equiv 0$)，对于后者由定理3知，当$\kappa\geqslant 0$时，其一般解为

$$\Omega(z)=X(z)(C_0 z^{\kappa}(k)+C_1 z^{\kappa-1}(k)+\cdots+C_{\kappa}) \tag{24}$$

其中$C_0,C_1,\cdots,C_{\kappa}$为任意复常数，$X(z)$由(8)式给出.

由(23)式得

$$\overline{X}(z)=X(z) \qquad \overline{\Omega}(z)=X(z)(\overline{C_0}z^{\kappa}(k)+\overline{C_1}z^{\kappa-1}(k)+\cdots+\overline{C_{\kappa}})$$

于是齐次H问题的一般解$\Phi(z)=[\Omega(z)+\overline{\Omega}(z)]/2$由(24)给出，但其中系数$C_j$($0\leqslant j\leqslant\kappa$)为任意实常数. 当$\kappa<0$时，$\Omega(z)\equiv 0$，因此$\Phi(z)\equiv 0$. 这样得如下结论.

定理6　对于齐次H问题，若实数轴上H问题的指标为κ，则当$\kappa\geqslant 0$时，其一般解为$\Phi(z)=P_{\kappa}(z)X(z)$(其中$P_{\kappa}(z)$为$z(k)$的$\kappa$次任意实系数多项式，$X(z)$由(8)式给出)；当$\kappa<0$时，$\Phi(z)\equiv 0$.

对于非齐次H问题，只要求出其一个特解，再由上述定理便可得其一般解，下面求非齐次H问题的一个特解$\Phi_0(z)$.

当$\kappa\geqslant 0$时，由(12)式知

$$\Omega_0(z)=\frac{\operatorname{sgn}(k)Y(z)}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{c(t)\mathrm{d}t(k)}{(a+bi)Y^{+}(t)(t-z)(k)}$$

为 R 问题一个特解，其中 $Y(z)$ 由(10) 式给出. 注意到(23) 式，当 $z\in Z^{\pm}$ 时，

$$\overline{Y}(z)=\overline{Y(z(-1))}=\left[\frac{(z-i)(k)}{(z+i)(k)}\right]^{\kappa}Y(z)$$

$$\overline{Y^{+}(t)}=\overline{Y}^{-}(t)=\left[\frac{(t-i)(k)}{(t+i)(k)}\right]^{\kappa}Y^{-}(t)$$

又

$$Y^{+}(t)=G(t)Y^{-}(t)$$

故

$$\overline{Y^{+}(t)}=-\left[\frac{(t-i)(k)}{(t+i)(k)}\right]^{\kappa}\frac{(a+ib)}{(a-ib)}Y^{+}(t)$$

这样

$$\overline{\Omega_{0}}(z)=\left[\frac{(z-i)(k)}{(z+i)(k)}\right]^{\kappa}\frac{\operatorname{sgn}(k)Y(z)}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{(t+i)(k)}{(t-i)(k)}\right]^{\kappa}\frac{c(t)\mathrm{d}t(k)}{(a+bi)Y^{+}(t)(t-z)(k)}$$

于是

$$\Phi_{0}(z)=\frac{\operatorname{sgn}(k)Y(z)}{2\pi i}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{c(t)\mathrm{d}t(k)}{(a+bi)Y^{+}(t)(t-z)(k)}+\left[\frac{(z-i)(k)}{(z+i)(k)}\right]^{\kappa}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{(t+i)(k)}{(t-i)(k)}\right]^{\kappa}\frac{c(t)\mathrm{d}t(k)}{(a+bi)Y^{+}(t)(t-z)(k)}\right\}\tag{25}$$

当 $\kappa\leqslant-2$ 时，由(14),(15) 式知当且仅当下列条件：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{c(t)\mathrm{d}t(k)}{(a+ib)Y^{+}(t)[(t+i)(k)]^{n}}=0\qquad n=2,3,\cdots,-\kappa\tag{26}$$

满足时，R 问题 Ⅱ 有唯一解：

$$\Phi_{0}(z)=\frac{\operatorname{sgn}(k)Y(z)}{\pi i}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{c(t)\mathrm{d}t(k)}{(a+ib)Y^{+}(t)(t-z)(k)}-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{c(t)\mathrm{d}t(k)}{(a+ib)Y^{+}(t)(t+i)(k)}\right]\tag{27}$$

由 R 问题 Ⅱ 解的唯一性，$\overline{\Phi_{0}}(z)=\Phi_{0}(z)$，从而(27) 式也就是非齐次 H 问题 Ⅰ 的唯一解. 于是有以下结论.

定理 7　若实数轴上 H 问题的指标为 κ，对于非齐次 H 问题，当 $\kappa\geqslant0$ 时，其一般解为

$$\Phi_{0}(z)+P_{\kappa}(z)X(z)$$

其中 $\Phi_{0}(z)$ 由(25) 式给出，$P_{\kappa}(z)$ 为 $z(k)$ 的 κ 次任意实系数多项式；当 $\kappa<0$ 时，当且仅当条件(26) 满足时有唯一解(27).

4　结束语

在前面部分，我们给出了无穷直线 X 上的 $\hat{H}_{k}$ 类函数、指标、Cauchy 型 K -积分及其边界值性质，利用它们分别得到无穷直线 X 上的 Riemann 边值问题有分片 K -解析函数解的条件和解的表达式，即定理 3 ～ 5. 进一步利用 K -对称扩张函数把 Hilbert 边值问题转化为无穷直线 X 上的 Riemann 边值问题，又得到了 K -解析函数类 $F(D(k))$ 中 Hilbert 边值问题的可解条件和解的表达式，即定理 6 ～ 7. 当 $k=\pm1$ 时，K -解析函数[1-7, 15, 16] 分别为解析函数[8-12] 与共轭解析函数[13-14, 17]，因此以上所得结果包含了(共轭) 解析函数中的相应结论[9-14]，它们是(共轭) 解析函数理论的继续和应用.

参考文献：

[1]　张建元. K -解析函数及其存在的条件 [J]. 云南民族大学学报(自然科学版)，2007，16(4)：298－302.

[2]　张建元. K -共形映射 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2010，32(10)：119－125.

[3]　张建元，张毅敏，姜锐武，等. 复变函数的 K -积分 [J]. 云南师范大学学报(自然科学版)，2009，29(1)：24－28.

[4]　张毅敏，张建元，赵书芬. K -留数及其应用 [J]. 云南师范大学学报(自然科学版)，2010，30(2)：15－20.

[5]　张建元，赵书芬，韩　艳. K -解析函数的 Riemann 边值问题 [J]. 应用数学和力学，2014，35(7)：805－814.

[6]　张建元，刘　秀，吴　科. K -对称变换及其 K 保圆(周)性 [J]. 西南民族大学学报(自然科学版)，2011，37(2)：

167－171.
[7] 张建元. K -解析变换下曲线的转向 [J]. 江西师范大学学报(自然科学版), 2011, 35(3): 292－296.
[8] 钟玉泉. 复变函数论 [M]. 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2004.
[9] 路见可. 解析函数边值问题教程 [M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2009.
[10] 赵 桢. 奇异积分方程 [M]. 北京: 北京师范大学出版社, 1984.
[11] 侯宗义, 李明忠, 张万国. 奇异积分方程论及其应用 [M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1990.
[12] 陈方权, 蒋绍惠. 解析函数论基础 [M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2008.
[13] 张建元. 共轭解析函数的 Riemann 边值问题 [J]. 北京工业大学学报, 1996, 22(3): 99－106.
[14] 张建元. 一类复调和函数的 Riemann 边值问题 [J]. 昭通师专学报, 1997, 19(2): 1－7.
[15] 张建元, 张毅敏, 刘承萍, 等. K -解析函数的幂级数展开式 [J]. 大理学院学报(综合版), 2009, 8(4): 14－18.
[16] 张建元, 张毅敏, 熊绍武. K -解析函数的双边幂级数与孤立奇点 [J]. 云南民族大学学报(自然科学版), 2009, 18(3): 198－201.
[17] 王见定. 半解析函数、共轭解析函数 [M]. 北京: 北京工业大学出版社, 1988.

Riemann Boundary Value Problem and Hilbert Boundary Value Problem for K-Analytic Function on an Infinite Straight Line

ZHANG Jian-yuan[1], HAN Yan[1], ZHANG Yi-min[1], ZHAO Shu-fen[1], LIU Cheng-ping[1], ZHANG xin[2]

1. *School of Mathematics and Statistics, Zhaotong University, Zhaotong Yunnan 657000, China;*
2. *Zhaotong Bureau of Statistics, Zhaotong Yunnan 657000, China*

Abstract: In this paper, we first introduce the concept of K-analytic function of Cauchy type K-integral on an infinite straight line (fragmentation) and use the K-symmetry transformation method to study some properties of the Cauchy type K-integral. Then, with the help of the index that functions on the infinite straight line and the properties of the Cauchy type K-integral, we obtain the solvable conditions and its expression of Riemann boundary value problem of the K-analytic function on the infinite straight line as well as the relationship between them and the index. Finally, we use the K-symmetry expansion function in a half plane to transform the Hilbert boundary value problem into Riemann boundary value problems on the infinite straight line X, thus obtaining the solvable conditions and its expression of the Hilbert boundary value problem. Both the analytic function and the conjugate analytic function are special cases of the K-analytic function. The results obtained in this paper generalize the analytic function and the conjugate analytic function in the corresponding conclusions.

Key words: $\hat{H}_k$-function; Cauchy type K-integral on a straight line; (Piecewise) K-analytic function; K-symmetry transformation; K-symmetry expansion function; boundary value formula; Riemann boundary value problem; Hilbert boundary value problem; index

责任编辑 崔玉洁