DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2017.08.009

关于 Pell 方程组 $x^2-s^2(s^2-1)y^2=1$ 与 $y^2-Dz^2=4$ 的解[①]

赵建红[1]，　杜先存[2]

1. 丽江师范高等专科学校 数学与计算机科学系，云南 丽江 674199；2. 红河学院 教师教育学院，云南 蒙自 661100

摘要：设 $D=p_1\cdots p_j(1\leqslant j\leqslant 3)$，$p_1,\cdots,p_j(1\leqslant j\leqslant 3)$ 是互异的奇素数. 利用初等方法讨论了 Pell 方程组 $x^2-s^2(s^2-1)y^2=1(s\in\mathbb{Z}^+, s\geqslant 2)$ 与 $y^2-Dz^2=4$ 的解的情况.

关　键　词：Pell 方程；基本解；整数解；奇素数；递归序列

中图分类号：O156　　**文献标志码：A**　　**文章编号：**1673-9868(2017)08-0065-08

近年来，Pell 方程 $x^2-D_1y^2=k(D_1\in\mathbb{Z}^+, k\in\mathbb{Z})$ 与 $y^2-D_2z^2=m(D_2\in\mathbb{Z}^+, m\in\mathbb{Z})$ 的公解问题一直备受人们的关注. 当 $k=1$，$m=4$，D_1 为偶数，D_2 为奇数时，已有如下结果：

(i) 文献[1-5]对 $D_1=2$ 的情况做了一些研究；

(ii) 文献[6-7]对 $D_1=6$ 的情况做了一些研究.

本文主要讨论当 $D_1=s^2(s^2-1)$，$(s\in\mathbb{Z}^+, s\geqslant 2)$ 时及 D_2 为奇数时的情况，即证明了以下定理：

定理 1　若 $s\in\mathbb{Z}^+$，$s\geqslant 2$，$D=p_1\cdots p_j(1\leqslant j\leqslant 3)$，其中 $p_1,\cdots,p_j(1\leqslant j\leqslant 3)$ 是互异的奇素数，则 Pell 方程组

$$\begin{cases}x^2-s^2(s^2-1)y^2=1\\ y^2-Dz^2=4\end{cases}\tag{1}$$

除 D 为 $16s^4-16s^2+3$ 中不超过 3 个次数为奇次的素因子之积外均只有平凡解

$$(x, y, z)=(\pm(2s^2-1)\pm 2, 0)$$

1　关键性引理

引理 1[8]　不定方程 $x^4-Dy^2=1$ 除当 $D=1\ 785$，$4\times 1\ 785$，$16\times 1\ 785$ 时分别有两组正整数解 $(x, y)=(13,4)$，$(239,1\ 352)$；$(x, y)=(13,2)$，$(239,676)$；$(x, y)=(13,1)$，$(239,338)$ 外，最多只有一组正整数解 (x_1, y_1)，且满足 $x_1^2=x_0$ 或 $2x_0^2-1$，这里 $\varepsilon=x_0+y_0\sqrt{D}$ 是 Pell 方程 $x^2-Dy^2=1$ 的基本解.

引理 2[9]　当 $a>1$ 且 a 是平方数时，方程 $ax^4-by^2=1$ 至多有一组正整数解.

引理 3[10]　若 D 是一个非平方的正整数，方程 $x^2-Dy^4=1$ 至多有两组正整数解，而且方程恰有两组正整数解的充要条件是 $D=1\ 785$ 或 $D=28\ 560$ 或 $2x_1$ 和 y_1 都是平方数，这里 (x_1, y_1) 是方程 $x^2-Dy^2=1$

---

① 收稿日期：2016-07-14

基金项目：云南省科技厅应用基础研究计划青年项目(2013FD060)；云南省科技厅应用基础研究计划青年项目(Y0120160010)；红河学院校级教学改革项目(JJJG151010).

作者简介：赵建红(1981-)，男，云南巍山人，副教授，主要从事初等数论和课程与教学论研究.

通信作者：杜先存，副教授.

的基本解.

引理 4[11] 当 $A \in \mathbb{N}$, $A > 1$, $B \in \mathbb{N}$ 且 AB 不是平方数时，方程 $Ax^2 - By^4 = 1$ 至多只有 1 组正整数解.

引理 5 设 Pell 方程 $x^2 - s^2(s^2-1)y^2 = 1$ 的基本解为 (x_1, y_1)，其全部整数解为 (x_n, y_n), $n \in \mathbb{Z}$，则对任意 $n \in \mathbb{Z}$, x_n, y_n 具有如下性质：

(i) 若 $2s^2-1$ 及 $8s^2(s^2-1)+1$ 不为平方数，那么 x_n 为平方数当且仅当 $n=0$；若 $2s^2-1$ 为平方数，那么 x_n 为平方数当且仅当 $n=1$ 或 $n=0$；若 $8s^2(s^2-1)+1$ 为平方数，那么 x_n 为平方数当且仅当 $n=2$ 或 $n=0$；

(ii) $\dfrac{x_n}{2s^2-1}$ 为平方数当且仅当 $n=1$；

(iii) $\dfrac{y_n}{2}$ 为平方数当且仅当 $n=0$ 或 $n=1$.

证 设 (x_1, y_1) 是 Pell 方程 $x^2 - s^2(s^2-1)y^2 = 1$ 的基本解，(x_n, y_n) $(n \in \mathbb{Z})$ 是 Pell 方程 $x^2 - s^2(s^2-1)y^2 = 1$ 的整数解.

(i) 若 $x_n = a^2$，将其代入原方程得

$$a^4 - s^2(s^2-1)y^2 = 1 \tag{2}$$

又 Pell 方程 $x^2 - s^2(s^2-1)y^2 = 1$ 的基本解为 $(x_1, y_1) = (2s^2-1, 2)$，则

$$x_1 = 2s^2 - 1 \qquad 2x_1^2 - 1 = 8s^2(s^2-1)+1$$

根据引理 1 得，方程(2) 至多有一组正整数解. 当 $2s^2-1$ 及 $8s^2(s^2-1)+1$ 均不为平方数时，根据引理 1 得，方程(2) 仅有平凡解 $(a, y) = (\pm 1, 0)$，故 $x_n = 1$，从而 $n = 0$；当 $2s^2-1$ 为平方数时，根据引理 1 得，方程(2) 有整数解 $(a, y) = (\sqrt{2s^2-1}, 2)$ 及平凡解 $(a, y) = (\pm 1, 0)$，那么 $x_n = 2s^2-1$ 或 $x_n = 1$，从而 $n = 1$ 或 $n = 0$；$8s^2(s^2-1)+1$ 为平方数时，根据引理 1 得，方程(2) 有整数解 $(a, y) = (\sqrt{8s^2(s^2-1)+1}, 4(2s^2-1))$ 及平凡解 $(a, y) = (\pm 1, 0)$，那么 $x_n = 8s^2(s^2-1)+1$ 或 $x_n = 1$，从而 $n = 2$ 或 $n = 0$. 反之，显然.

(ii) 若 $\dfrac{x_n}{2s^2-1} = a^2$，则 $x_n = (2s^2-1)a^2$，代入原方程得

$$(2s^2-1)^2a^4 - s^2(s^2-1)y^2 = 1 \tag{3}$$

根据引理 2 得，方程(3) 仅有整数解 $(a, y) = (\pm 1, \pm 2)$，此时 $x_n = 2s^2-1$，从而 $n=1$. 反之，显然.

(iii) 若 $\dfrac{y_n}{2} = b^2$，则 $y_n = 2b^2$，代入原方程得

$$x^2 - 4s^2(s^2-1)b^4 = 1 \tag{4}$$

根据引理 3 得，方程(4) 有整数解 $(x, b) = (\pm(2s^2-1), \pm 1)$ 及平凡解 $(x, b) = (\pm 1, 0)$，此时 $y_n = 2$ 或 0，从而 $n=1$ 或 $n=0$. 反之，显然.

2 定理 1 的证明

证 设 (x_1, y_1) 为 Pell 方程 $x^2 - s^2(s^2-1)y^2 = 1$ $(s \in \mathbb{Z}^+, s \geqslant 2)$ 的基本解，则有 $(x_1, y_1) = (2s^2-1, 2)$，故 Pell 方程 $x^2 - s^2(s^2-1)y^2 = 1$ $(s \in \mathbb{Z}^+, s \geqslant 2)$ 的全部正整数解为：

$$x_n + y_n\sqrt{s^2(s^2-1)} = (x_1 + \sqrt{s^2(s^2-1)}\,y_1)^n = (2s^2-1+2\sqrt{s^2(s^2-1)})^n,\ n \in \mathbb{Z}^+$$

容易验证以下性质成立：

性质 a $y_n^2 - 4 = y_{n-1}y_{n+1}$；

性质 b $y_{2n} = 2x_ny_n$；

性质 c $x_{2n} = 2x_n^2 - 1$；

性质 d　$\gcd(x_n, y_n)=1$，$\gcd(x_n, x_{n+1})=1$，$\gcd(y_n, y_{n+1})=2$；

性质 e　$\gcd(x_{2n}, y_{2n+1})=\gcd(x_{2n+2}, y_{2n+1})=1$，$\gcd(x_{2n+1}, y_{2n})=\gcd(x_{2n+1}, y_{2n+2})=2s^2-1$；

性质 f　$x_n\equiv 1(\bmod 2)$，$x_n\equiv\pm 1(\bmod s^2)$，$x_n\equiv 1(\bmod (s^2-1))$，$x_{2n+1}\equiv 0(\bmod (2s^2-1))$，$x_{2n}\equiv\pm 1(\bmod (2s^2-1))$；

性质 g　$y_{2n+1}\equiv 2(\bmod 4)$，$y_{2n}\equiv 0(\bmod 4)$，$y_{2n+1}\equiv\pm 2(\bmod (2s^2-1))$，$y_{2n}\equiv 0(\bmod (2s^2-1))$.

情形 1　n 为正偶数，由(1)式得

$$s^2(s^2-1)Dz^2=x_n^2-(2s^2-1)^2=(x_n+2s^2-1)(x_n-2s^2+1) \tag{5}$$

令 $n=2m(m\in\mathbb{Z}^+)$，则(5)式成为

$$s^2(s^2-1)Dz^2=(x_{2m}+2s^2-1)(x_{2m}-2s^2+1) \tag{6}$$

由性质 c 得，(6)式可化为

$$s^2(s^2-1)Dz^2=(2x_m^2+2s^2-2)(2x_m^2-2s^2)=4(x_m^2+s^2-1)(x_m^2-s^2)$$

即

$$s^2(s^2-1)Dz^2=4(x_m^2+s^2-1)(x_m^2-s^2) \tag{7}$$

由性质 f 知

$$x_m^2\equiv 0, 1(\bmod 2s^2-1)$$

则

$$x_m^2-s^2\equiv\pm s^2(\bmod 2s^2-1)$$

则

$$\gcd(x_m^2+s^2-1, x_m^2-s^2)=\gcd(2s^2-1, \pm s^2)=\gcd(1, s^2)=1$$

由性质 f 知，

$$x_m^2\equiv 1(\bmod s^2)\qquad x_m^2\equiv 1(\bmod (s^2-1))$$

所以(7)式可分解为下面 2 种情形：

情形 Ⅰ　$4(x_m^2+s^2-1)=D_1s^2z_1^2$，$x_m^2-s^2=D_2(s^2-1)z_2^2$，$D=D_1D_2$，$z=z_1z_2$

情形 Ⅱ　$x_m^2+s^2-1=D_1s^2z_1^2$，$4(x_m^2-s^2)=D_2(s^2-1)z_2^2$，$D=D_1D_2$，$z=z_1z_2$

其中 $\gcd(D_1, D_2)=1$，$\gcd(z_1, z_2)=1$.

先讨论情形 Ⅰ：

由

$$4(x_m^2+s^2-1)=D_1s^2z_1^2 \text{ 及 } x_m^2-s^2(s^2-1)y_m^2=1$$

得

$$D_1z_1^2=4[x_m^2-(s^2-1)^2y_m^2]=4[x_m+(s^2-1)y_m][x_m-(s^2-1)y_m]$$

即

$$D_1z_1^2=4[x_m+(s^2-1)y_m][x_m-(s^2-1)y_m] \tag{8}$$

又

$$\begin{aligned}\gcd(x_m+(s^2-1)y_m, x_m-(s^2-1)y_m)&=\gcd(2(s^2-1)y_m, x_m-(s^2-1)y_m)=\\&\gcd(s^2-1, x_m)=1\end{aligned}$$

则(8)式可分解为下式：

$$x_m+(s^2-1)y_m=D_3z_3^2,\ x_m-(s^2-1)y_m=D_4z_4^2,\ D_1=D_3D_4,\ z_1=2z_3z_4 \tag{9}$$

其中

$$\gcd(D_3, D_4)=1\qquad \gcd(z_3, z_4)=1$$

由

$$x_m^2-s^2=D_2(s^2-1)z_2^2 \text{ 及 } x_m^2-s^2(s^2-1)y_m^2=1$$

得

$$D_2z_2^2=s^4y_m^2-x_m^2=(s^2y_m+x_m)(s^2y_m-x_m)$$

即

$$D_2z_2^2=(s^2y_m+x_m)(s^2y_m-x_m) \tag{10}$$

又

$$\gcd(s^2y_m+x_m,s^2y_m-x_m)=\gcd(2x_m,s^2y_m-x_m)=\gcd(x_m,s^2)=\gcd(1,s^2)=1$$

则(10)可分解为下式:

$$s^2y_m+x_m=D_5z_5^2,\ s^2y_m-x_m=D_6z_6^2,\ D_2=D_5D_6,\ z_2=z_5z_6 \tag{11}$$

其中

$$\gcd(D_5,D_6)=1 \qquad \gcd(z_5,z_6)=1$$

由(9),(11)式得 $D=D_1D_2=D_3D_4D_5D_6$,且 D_3,D_4,D_5,D_6 两两互素,而 $D=p_1\cdots p_s$ 且 $p_1,\cdots,p_s(1\leqslant s\leqslant 3)$ 是互异的奇素数,则 D_3,D_4,D_5,D_6 中至少有一个为1.

当 $D_3=1$ 时,(9)式的第一式为

$$x_m+(s^2-1)y_m=z_3^2$$

则

$$x_m=z_3^2-(s^2-1)y_m$$

代入 $x_m^2-s^2(s^2-1)y_m^2=1$,整理得

$$s^2z_3^4-(s^2-1)(y_m+z_3^2)^2=1$$

由引理2得

$$s^2z_3^4-(s^2-1)(y_m+z_3^2)^2=1$$

仅有一组正整数解 $(z_3,y_m+z_3^2)=(1,1)$,则有

$$(z_3,y_m)=(1,0)$$

此时方程(1)无正整数解.

当 $D_4=1$ 时,(9)式的第二式为

$$x_m-(s^2-1)y_m=z_4^2$$

则有

$$x_m=(s^2-1)y_m+z_4^2$$

代入

$$x_m^2-s^2(s^2-1)y_m^2=1$$

整理得

$$s^2z_4^4-(s^2-1)(y_m-z_4^2)^2=1$$

由引理2得

$$s^2z_4^4-(s^2-1)(y_m-z_4^2)^2=1$$

仅有一组正整数解

$$(z_4,|y_m-z_4^2|)=(1,1)$$

则有 $(z_4,y_m)=(1,0)$ 或 $(1,2)$,从而 $m=1$,则 $n=2$,此时有

$$Dz^2=y_2^2-4=(8s^2-4)^2-4=2^2\times(16s^4-16s^2+3)$$

则若 $16s^4-16s^2+3$ 中次数为奇次的素因子的个数不超过3个,则此时方程(1)有正整数解;若 $16s^4-16s^2+3$ 中次数为奇次的素因子的个数超过3个,则此时方程(1)仅有平凡解.

当 $D_5=1$ 时,(11)式的第一式为 $s^2y_m+x_m=z_5^2$,则有

$$x_m=z_5^2-s^2y_m$$

代入

$$x_m^2-s^2(s^2-1)y_m^2=1$$

整理得

$$s^2(y_m-z_5^2)^2-(s^2-1)z_5^4=1$$

由引理 4 得

$$s^2(y_m-z_5^2)^2-(s^2-1)z_5^4=1$$

仅有 1 组正整数解

$$(|y_m-z_5{}^2|,z_5)=(1,1)$$

则有$(z_5,y_m)=(1,0)$或$(1,2)$，从而 $m=1$，则 $n=2$，$m=2$，此时方程(1)的解的情况与 $D_4=1$ 的情形相同.

当 $D_6=1$ 时，(11)式的第二式为 $s^2y_m-x_m=z_6^2$，则有

$$x_m=s^2y_m-z_6^2$$

代入

$$x_m^2-s^2(s^2-1)y_m^2=1$$

整理得

$$s^2(y_m-z_6^2)^2-(s^2-1)z_6^4=1$$

由引理 4 得

$$s^2(y_m-z_6^2)^2-(s^2-1)z_6^4=1$$

仅有 1 组正整数解

$$(|y_m-z_6{}^2|,z_6)=(1,1)$$

则有$(z_6,y_m)=(1,0)$或$(1,2)$，从而 $m=1$，则 $n=2$，$m=2$，此时方程(1)的解的情况与 $D_4=1$ 的情形相同.

综上知情形 Ⅰ 不成立.

下面讨论情形 Ⅱ：

由

$$(x_m^2+s^2-1)=D_1s^2z_1^2 \text{ 及 } x_m^2-s^2(s^2-1)y_m^2=1$$

得

$$D_1z_1^2=x_m^2-(s^2-1)^2y_m^2=[x_m+(s^2-1)y_m][x_m-(s^2-1)y_m]$$

即

$$D_1z_1^2=[x_m+(s^2-1)y_m][x_m-(s^2-1)y_m] \tag{12}$$

又

$$\gcd(x_m+(s^2-1)y_m \qquad x_m-(s^2-1)y_m)=1$$

则(12)式可分解为下式：

$$x_m+(s^2-1)y_m=D_7z_7^2,\ x_m-(s^2-1)y_m=D_8z_8^2,\ D_1=D_7D_8,\ z_1=z_7z_8 \tag{13}$$

其中

$$\gcd(D_7,D_8)=1 \qquad \gcd(z_7,z_8)=1$$

由

$$4(x_m^2-s^2)=D_2(s^2-1)z_2^2 \text{ 及 } x_m^2-s^2(s^2-1)y_m^2=1$$

得

$$D_2z_2^2=4(s^4y_m^2-x_m^2)=4(s^2y_m+x_m)(s^2y_m-x_m)$$

即

$$D_2z_2^2=4(s^2y_m+x_m)(s^2y_m-x_m) \tag{14}$$

又

$$\gcd(s^2y_m+x_m,s^2y_m-x_m)=1$$

则(14)式可分解为下式:

$$s^2 y_m + x_m = D_9 z_9^2,\ s^2 y_m - x_m = D_{10} z_{10}^2,\ D_2 = D_9 D_{10},\ z_2 = 2z_9 z_{10} \tag{15}$$

其中

$$\gcd(D_9, D_{10}) = 1 \qquad \gcd(z_9, z_{10}) = 1$$

由(13),(15)式得 $D = D_1 D_2 = D_7 D_8 D_9 D_{10}$ 且 D_7, D_8, D_9, D_{10} 两两互素,而 $D = p_1 \cdots p_s$ 且 $p_1, \cdots, p_s (1 \leqslant s \leqslant 3)$ 是互异的奇素数,则 D_7, D_8, D_9, D_{10} 中至少有一个为1.

$D_7 = 1$ 时仿 $D_3 = 1$ 的证明可知此时情形 Ⅱ 不成立;$D_8 = 1$ 时仿 $D_4 = 1$ 的证明可知此时情形 Ⅱ 不成立;$D_9 = 1$ 时仿 $D_5 = 1$ 的证明可知此时情形 Ⅱ 不成立;$D_{10} = 1$ 时仿 $D_6 = 1$ 的证明可知此时情形 Ⅱ 不成立. 综上可知情形 Ⅱ 不成立.

情形2 n 为正奇数,令 $n = 2m - 1$,$m \in \mathbb{Z}^+$. 则由性质a得

$$Dz^2 = y_{2m-1}^2 - 4 = y_{2(m-1)} y_{2m} \tag{16}$$

由性质b知,(16)式可化为

$$Dz^2 = 4x_{m-1} y_{m-1} x_m y_m \tag{17}$$

由性质d知

$$\gcd(x_{m-1}, y_{m-1}) = \gcd(x_m, y_m) = 1 \qquad \gcd(x_m, x_{m-1}) = 1 \qquad \gcd(y_m, y_{m-1}) = 2$$

则

$$\gcd\left(\frac{y_m}{2}, \frac{y_{m-1}}{2}\right) = 1$$

m 为正偶数时,由性质e知

$$\gcd(x_m, y_{m-1}) = 1 \qquad \gcd(x_{m-1}, y_m) = 2s^2 - 1$$

则

$$\gcd\left(\frac{x_{m-1}}{2s^2-1}, \frac{y_m}{2s^2-1}\right) = 1$$

则有 $x_m, \dfrac{y_{m-1}}{2}, \dfrac{x_{m-1}}{2s^2-1}, \dfrac{y_m}{2(2s^2-1)}$ 两两互素.

由性质f知 $x_m, \dfrac{x_{m-1}}{2s^2-1}$ 均为奇数,由性质g知 m 为偶数时,$\dfrac{y_{m-1}}{2}$ 为奇数;由引理5(i)知仅当 $m = 0$ 时,x_m 为平方数;由引理5(ii)知仅当 $m = 2$ 时,$\dfrac{x_{m-1}}{2s^2-1}$ 为平方数;由引理5(iii)知仅当 $m = 1$ 或 $m = 2$ 时,$\dfrac{y_{m-1}}{2}$ 为平方数. 故有 $x_m, \dfrac{y_{m-1}}{2}, \dfrac{x_{m-1}}{2s^2-1}, \dfrac{y_m}{2(2s^2-1)}$ 两两互素,因此 $m > 2$ 为正偶数时,$x_m, \dfrac{y_{m-1}}{2}, \dfrac{x_{m-1}}{2s^2-1}$ 均为奇数且均不为平方数,故 $x_m, \dfrac{y_{m-1}}{2}, \dfrac{x_{m-1}}{2s^2-1}$ 至少为 D 提供3个互异的奇素数.

$m > 2$ 为正偶数时,因为 $D = p_1 \cdots p_s (1 \leqslant s \leqslant 3)$,$p_1, \cdots, p_s (1 \leqslant s \leqslant 3)$ 是互异的奇素数,所以 $\dfrac{y_m}{2(2s^2-1)}$ 为平方数. 令 $m = 2k$,$k \in \mathbb{Z}^+$,且 $k \geqslant 2$,则有

$$\frac{y_m}{2(2s^2-1)} = \frac{y_{2k}}{2(2s^2-1)} = \frac{2x_k y_k}{2(2s^2-1)} = \frac{x_k y_k}{2s^2-1}$$

即

$$\frac{y_m}{2(2s^2-1)} = \frac{x_k y_k}{2s^2-1} \tag{18}$$

若 $k \geqslant 2$ 为正偶数,则由性质b知

$$\frac{y_m}{2(2s^2-1)} = x_k \cdot \frac{y_k}{2s^2-1}$$

由性质 d 知

$$\gcd\left(x_k,\frac{y_k}{2s^2-1}\right)=1$$

则$\frac{y_m}{2(2s^2-1)}$为平方数需 x_k，$\frac{y_k}{2s^2-1}$ 同时为平方数，由引理 5 的(i)知 $k\geqslant 2$ 时 x_k 不为平方数，则 $\frac{y_m}{2(2s^2-1)}$ 不为平方数，故此时方程(1)无正整数解.

若 $k\geqslant 3$ 为正奇数，由性质 b 知

$$\frac{y_m}{2(2s^2-1)}=y_k\cdot\frac{x_k}{2s^2-1}$$

由性质 d 知

$$\gcd\left(y_k,\frac{x_k}{2s^2-1}\right)=1$$

则$\frac{y_m}{2(2s^2-1)}$为平方数，需 y_k，$\frac{x_k}{2s^2-1}$ 同时为平方数，由引理 6(i)知 $k\geqslant 3$ 时，x_k 不为平方数，则 $\frac{y_m}{2(2s^2-1)}$ 不为平方数，故此时方程(1)无正整数解.

$m=0$ 时，(17)式为

$$Dz^2=4x_{-1}y_{-1}x_0y_0=0$$

从而得方程(1)的平凡解

$$(x,y,z)=(\pm(2s^2-1),\pm 2,0)$$

$m=2$ 时，(17)式为

$$Dz^2=4x_1y_1x_2y_2=4\times(2s^2-1)\times 2\times(8s^4-8s^2+1)\times 4(2s^2-1)=\\2^5(2s^2-1)^2(8s^4-8s^2+1)$$

即

$$Dz^2=2^5(2s^2-1)^2(8s^4-8s^2+1)\tag{19}$$

又 D 为奇数，故(19)式左边 2 的次数为偶数次，而(19)式右边 2 的次数为 5 次，矛盾，故此时方程(1)无正整数解.

m 为正奇数时，仿情形 1 的证明可知此时方程(1)亦无正整数解.

3　相关推论

推论 1　Pell 方程组 $x^2-12y^2=1$ 与 $y^2-195z^2=4$ 有解$(x,y,z)=(\pm 97,\pm 28,\pm 2)$，$(\pm 7;\pm 2,0)$；

推论 2　Pell 方程组 $x^2-72y^2=1$ 与 $y^2-1155z^2=4$ 有解$(x,y,z)=(\pm 577,\pm 68,\pm 2)$，$(\pm 17;\pm 2,0)$；

推论 3　Pell 方程组 $x^2-240y^2=1$ 与 $y^2-427z^2=4$ 有解$(x,y,z)=(\pm 1921,\pm 124,\pm 6)$，$(\pm 31;\pm 2,0)$.

参考文献：

[1]　陈建华. 关于 Pell 方程 $x^2-2y^2=1$ 与 $y^2-Dz^2=4$ 的公解[J]. 武汉大学学报(理学版)，1990，(1)：8-12.

[2]　刘玉记. 关于 Pell 方程 $x^2-2y^2=1$ 与 $y^2-Dz^2=4$ 的公解[J]. 内蒙古民族师范学院学报：自然科学版，1994，9(2)：9-11.

[3]　曹珍富. 关于 Pell 方程 $x^2-2y^2=1$ 与 $y^2-Dz^2=4$ 的公解[J]. 科学通报，1986，31(6)：476.

[4] 曾登高. 也说 Pell 方程 $x^2-2y^2=1$ 与 $y^2-Dz^2=4$ 的公解 [J]. 数学的实践与认识，1995(1)：81－84.

[5] 陈永高. Pell 方程组 $x^2-2y^2=1$ 与 $y^2-Dz^2=4$ 的公解 [J]. 北京大学学报(自然科学版)，1994，30(3)：298－302.

[6] 苏小燕. 关于 Pell 方程 $x^2-6y^2=1$ 与 $y^2-Dz^2=4$ 的公解 [J]. 漳州师范学院学报(自然科学版)，2000，13(3)：35－38.

[7] 冉银霞，冉延平. 不定方程组 $x^2-6y^2=1$，$y^2-Dz^2=4$ [J]. 延安大学学报(自然科学版)，2008，27(4)：19－21.

[8] 孙 琦，袁平之. 关于不定方程 $x^4-Dy^2=1$ 的一个注记 [J]. 四川大学学报(自然科学版)，1997：34(3)：265－267.

[9] 乐茂华. 一类二元四次 Diophantine 方程 [J]. 云南师范大学学报(自然科学版)，2010，30(1)：12－17.

[10] WALSH G. A Note on a Theorem of Ljunggren and the Diophantine Equations $x^2-kxy^2+y^4=1$ or 4 [J]. ArchMath，1999，73(2)：504－513.

[11] LJUNGGREN W. EinSatzüber Die Diophantische Gleichung $Ax^2-By^4=C(C=1,2,4)$ [J]. Tolfte Skand Mat Lund，1953，8(2)：188－194.

On the Solutions of System of Pell Equations $x^2-s^2(s^2-1)y^2=1$ and $y^2-Dz^2=4$

ZHAO Jian-hong[1]， DU Xian-cun[2]

1. Department of Mathematics and Computer Science，Lijiang Teachers College，Lijiang Yunnan 674199，China；
2. College of Teachers Education，Honghe University，Mengzi Yunnan 661100，China

Abstract：Let D be not a perfect square positive integer which has at most three distinct prime factors. The integer solutions of the system of Pell equations in title are discussed with the help of the elementary method.

Key words：Pell equation；fundamental solution；integer solution；odd prime；recursive sequence

责任编辑 张 枸