DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2017.08.010

Z-准连续 Domain 的性质及其等价刻画①

马　崛，　魏美华

榆林学院 数学与统计学院，陕西 榆林 719000

摘要：引入了 Z-准极小集，通过 Z-准极小集定义了 Z-准连续 Domain，给出了 Z-准连续 Domain 的等价刻画.

关　键　词：Z-准极小集； Z-准连续 Domain； Z-连续 Domain

中图分类号：O152.4　　　**文献标志码**：A　　　**文章编号**：1673-9868(2017)08-0073-04

Domain 理论为计算机程序设计语言的指称语义学奠定了数学基础，属于以格论、拓扑学、范畴论及理论计算机科学为基础的交叉领域[1]. 连续 Domain 是 Domain 理论中的重要研究对象. 文献[2]中给出了 Z-连续 Domain 的定义和一些基本性质，由文献[2]还可以看出 Z-连续 Domain 与连续 Domain 有好多相似的性质. 文献[3]中介绍了弱于连续 Domain 的一种结构 —— 准连续 Domain. 本文引入了弱于 Z-连续 Domain 的一种结构 ——Z-准连续 Domain，给出了它的一些等价刻画，并且讨论了 Z-准连续 Domain 的积结构、商结构和子结构. 一般来说，Z-连续 Domain 不一定是完备格，要给出 Z-连续 Domain 的等式刻画比较困难，本文最后给出了 Z-准连续 Domain 的等式刻画.

文中，Set 表示集合范畴，Poset 表示以所有偏序集为对象，保序映射为态射的范畴. Poset 的对象集记为 ob(Poset)，$\forall P \in \mathrm{ob(Poset)}$，$A \subseteq P$，$\forall a, b \in A$，$\exists c \in A$，使得 $a \leqslant c$ 且 $b \leqslant c$，则称 A 为定向集. 若 P 对定向并关闭，则称 P 为 Dcpo. $A \subseteq P$，记

$$l(A) = \{x \in P: \forall a \in A, x \leqslant a\}$$

即 $l(A)$ 为 A 在 P 中的所有下界之集.

定义 1[2]　函子 Z：Poste $\longrightarrow$ Set 称为 Poset 上的一个子集系统，简称一个子集系统，若 Z 满足以下条件：

(1) $\forall P \in \mathrm{ob(Poset)}$，$Z(P) \subseteq 2^P$；

(2) $\forall P, Q \in \mathrm{ob(Poset)}$，$f: P \to Q$ 是保序映射，$A \in Z(P) \Rightarrow f(A) \in Z(Q)$；

(3) $\exists P \in \mathrm{ob(Poset)}$，使得 $Z(P)$ 含有 P 的非单点的非空子集.

在以下讨论中，Z 总表示一个子集系统，$\forall P \in \mathrm{ob(Poset)}$，称 $Z(P)$ 为 P 上的一个子集系统. $\forall A \in Z(P)$，称 A 是 P 的 Z-集.

注 1[2]　(1) 设 $P \in \mathrm{ob(Poset)}$，则 $\forall x \in P$，$\{x\} \in Z(P)$.

(2) 设 $P \in \mathrm{ob(Poset)}$，$Q \subseteq P$，则 $\forall S \in Z(P)$，有 $S \in Z(Q)$.

定义 2[2]　设 $P \in \mathrm{ob(Poset)}$，称偏序集 P 是 Z-完备的，若 $\forall S \in Z(P)$，$\vee S$ 存在.

定义 3[2]　设 $P \in \mathrm{ob(Poset)}$，$x, y \in P$，称 x 是 Z-Waybelow y 的，记作 $x \ll_Z y$，若 $\forall S \in Z(P)$，$\vee S$ 存在，

$$y \leqslant \vee S \Longrightarrow \exists s \in S$$

① 收稿日期：2016-09-23

基金项目：国家自然科学基金(11501496)；陕西省教育厅科学研究项目(12GK0885)；陕西榆林市科技局项目(2014cxy-09).

作者简介：马　崛(1981-)，女，陕西榆林人，硕士研究生，讲师，主要从事格上拓扑与模糊推理研究.

使得 $x \leqslant s$. 记

$$J(x)=\{y \in P \mid y \ll_Z x\}$$

定义 4[2] 设 $P \in \mathrm{ob}(\mathrm{Poset})$，称 P 是 Z-连续的，若 $\forall x \in P$，$\exists S \in Z(P)$ 且 $S \subseteq J(x)$，使得 $x=\bigvee S$.

定义 5[2] 设 P 是 Z-完备的偏序集，$x \in P$，$A \in Z(P)$，称 A 为 x 的一个 Z-极小集，如果 $\sup A = x$ 且 $\forall S \in Z(P)$，$x \leqslant \sup S \Longrightarrow \forall a \in A$，$\exists s \in S$，使得 $a \leqslant s$.

命题 1[4] 设 P 是 Z-完备的偏序集，则下列条件等价：

(1) P 是 Z-连续 Domain；

(2) $\forall x \in P$，x 有 Z-极小集.

定义 6 设 P 是 Z-完备的偏序集，$x \in P$，$S \in Z(P)$，若 $x \leqslant \sup S$，则称 S 为 x 的 Z-覆盖.

定义 7 设 P 是 Z-完备的偏序集，$x \in P$，S 为 x 的 Z-覆盖，若 $\exists D \in Z(P)$，使得 $x=\sup D$，且 $\forall d \in D$，$\exists s \in S$，使得 $d \leqslant s$，则称 D 为 x 的相应于 S 的 Z-准极小集.

定义 8 设 P 是 Z-完备的偏序集，$\forall x \in P$，若对于 x 的任意 Z-覆盖，x 都有相应的 Z-准极小集，则称 x 有 Z-准极小集.

定义 9 设 P 是 Z-完备的偏序集，$\forall x \in P$，x 都有 Z-准极小集，则称 P 是 Z-准连续 Domain.

命题 2 设 P 是 Z-完备的偏序集，$x \in P$，若 x 有 Z-极小集，则 x 有 Z-准极小集.

由以上的定义和命题得到以下结果：

定理 1 Z-连续 Domain 是 Z-准连续 Domain.

证 由命题 1 知，若 P 是 Z-连续 Domain，则 $\forall x \in P$，x 有 Z-极小集. 又由命题 2 知，x 有 Z-准极小集，所以由定义 9 知，P 是 Z-准连续 Domain.

定义 10 设 $P \in \mathrm{ob}(\mathrm{Poset})$，$S \in Z(P)$，称保序映射 $s \mapsto x_s : S \to P$ 是 P 中的一个 Z-网，记 $(x_s)_{s \in S}$ 或 (x_s).

命题 3 设 $P \in \mathrm{ob}(\mathrm{Poset})$，$P$ 是 Z-完备的偏序集，则 P 中的 Z-集是 Z-网，反之，Z-网也是 Z-集.

证 $\forall S \in Z(P)$，嵌入映射 $s \mapsto x_s = s : S \to P$ 是保序映射，则由 Z-网的定义知 $(x_s)_{s \in S}$ 是 Z-网. 反之，对任意 P 中 Z-网 $(x_s)_{s \in S}$，由 Z-网的定义知，$s \mapsto x_s : S \to P$ 是保序映射. 定义 $f: P \to P$，具体地，$\forall p \in P$，若 $p \in S$，$f(p)=x_p$；否则 $f(p)=x_{\wedge S}$. 由 $s \mapsto x_s : S \to P$ 是保序映射及 P 是 Z-交封闭半格知，f 是保序映射. 由 Z 子集系统的定义知

$$f(S)=(x_s)_{s \in S} \in Z(P)$$

即 Z-网也是 Z-集.

定理 2 设 P 是 Z-完备的偏序集，则下列条件等价：

(1) P 是 Z-准连续 Domain；

(2) $\forall S \in Z(P)$，$\forall x \leqslant \sup S$，$\exists J \in Z(P)$ 且 $J \subseteq \bigcup_{s \in S} l(\{x, s\})$，使得 $x=\sup J$；

(3) $\forall x \in P$，$\forall S \in Z(P)$，恒有 $l(\{x, \sup S\})=\{\sup J : J \subseteq \bigcup_{s \in S} l(\{x, s\}),\ J \in Z(P)\}$；

(4) $\forall x \in P$，$\forall Z$-网 $(x_s)_{s \in S}$，恒有

$$l(\{x, \bigvee_{s \in S} x_s\})=\{\sup J : J \subseteq \bigcup_{x_s \in (x_s)_{s \in S}} l(\{x, s\}),\ J \in Z(P)\}$$

证 (1)$\Longrightarrow$(2) $\forall S \in Z(P)$，$\forall x \leqslant \sup S$，由 P 是 Z-准连续 Domain 知，x 有 Z-准极小集，则 $\exists J \in Z(P)$，使得 $x=\sup J$ 且 $\forall j \in J$，$\exists s \in S$，使得 $j \leqslant s$. 又由 $x=\sup J$ 知，

$$\forall j \in J,\ j \leqslant \sup J = x$$

所以 $j \in l(\{x, s\})$，从而

$$J \subseteq \bigcup_{s \in S} l(\{x, s\})$$

所以 $\exists J \in Z(P)$ 且 $J \subseteq \bigcup_{s \in S} l(\{x, s\})$，使得 $x=\sup J$.

(2)$\Longrightarrow$(1) $\forall x \in P$，$\forall S \in Z(P)$，若 $x \leqslant \sup S$，则由(2)知，$\exists J \in Z(P)$，使得

$$x=\sup J \qquad J \subseteq \bigcup_{s \in S} l(\{x, s\})$$

由 $J \subseteq \bigcup_{s\in S} l(\{x, s\})$ 知，$\forall j \in J$，$\exists s \in S$，使得 $j \in l(\{x, s\})$ 即 $j \leqslant x$，$j \leqslant s$. 所以 J 是 x 相应于 S 的 Z -准极小集. 又由 S 的任意性知，x 有 Z -准极小集. 再由 x 的任意性和 Z -准连续 Domain 的定义知，P 是 Z -准连续 Domain.

(2)$\Longrightarrow$(3) 显然(3) 中不等式左边包含右边. 另一方面，

$$\forall y \in l(\{x, \sup S\})$$

则 $y \leqslant x$，$y \leqslant \sup S$，由(2) 知，$\exists J \in Z(P)$ 且 $J \subseteq \bigcup_{s\in S} l(\{y, s\})$，使得 $y = \sup J$. 由 $y \leqslant x$ 知

$$J \subseteq \bigcup_{s\in S} l(\{y, s\}) \subseteq \bigcup_{s\in S} l(\{x, s\})$$

所以

$$y \in \{\sup J : J \subseteq \bigcup_{s\in S} l(\{x, s\}), J \in Z(P)\}$$

从而不等式右边也包含左边.

(3)$\Longrightarrow$(2) $\forall x \in P$，$\forall S \in Z(P)$，$x \leqslant \sup S$，则

$$l(\{x, \sup S\}) = \downarrow x$$

即

$$x \in l(\{x, \sup S\})$$

由(3) 知

$$l(\{x, \sup S\}) = \{\sup J : J \subseteq \bigcup_{s\in S} l(\{x, s\}), J \in Z(P)\}$$

所以

$$x \in \{\sup J : J \subseteq \bigcup_{s\in S} l(\{x, s\}), J \in Z(P)\}$$

即 $\exists J \in Z(P)$ 且 $J \subseteq \bigcup_{s\in S} l(\{x, s\})$，使得 $x = \sup J$. 所以(2) 成立.

(3)$\Longrightarrow$(4) 显然，由于每个 Z -网都是 Z -集.

(4)$\Longrightarrow$(3) 显然，由于每个 Z -集都是特殊的 Z -网.

定义 11[2]　设 $P, Q \in \mathrm{ob}(\mathrm{Poset})$，称映射 $f: P \longrightarrow Q$ 是 Z -连续的，若 $\forall S \in Z(P)$，$\vee S$ 存在，则有 $\vee f(S)$ 也存在且 $f(\vee S) = \vee f(S)$.

定理 3　设 $L_i (i \in I)$ 是有最小元的 Z -准连续 Domain，若

$$D \in Z(\prod_{i\in I} L_i) \Leftrightarrow D_i \in Z(L_i)$$

则 $\prod_{i\in I} L_i$ 是有最小元的 Z -准连续 Domain. 其中 D_i 是 D 在第 i 个坐标的投影，且

$$\forall x = (x_i)_{i\in I},\ y = (y_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} L_i,\ x \leqslant y \Leftrightarrow x_i \leqslant y_i (\forall i \in I)$$

证　$\forall x = (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} L_i$，设 $D \in Z(\prod_{i\in I} L_i)$ 且 $x \leqslant \sup D = (\sup_{L_i} D_i)_{i\in I}$，其中 D_i 是 D 在第 i 个坐标的投影，则

$$D_i \in \{Z(L_i)\} \text{ 且 } x_i \leqslant \sup_{L_i} D_i \qquad \forall i \in I$$

由于每个 L_i 都是 Z -准连续 Domain，所以 $\exists J_i \in Z(L_i)$，使得 $x_i = \sup J_i$ 且 $\forall j_i \in J_i$，$\exists d_i \in D_i$，使得 $j_i \leqslant d_i$，这样就有 $\prod_{i\in I} L_i$ 的 Z -集 $J = \{(j_i)_{i\in I} : j_i \in J_i\}$，显然 $x = \sup J$，$\forall j \in J$，$J = (j_i)_{i\in I}$，则 $j_i \in J_i$，由上知存在 $d_i \in D_i$，使得 $j_i \leqslant d_i$. 取 $d = (d_i)_{i\in I} \in D$，则 $j \leqslant d$，这样 J 就是 x 关于 D 的 Z -准极小集. 所以 $\prod_{i\in I} L_i$ 是有最小元的 Z -准连续 Domain.

定理 4　设 L 是 Z -准连续 Domain，$p: L \longrightarrow L$ 是 Z -连续投射，则 $p(L)$ 是 Z -准连续 Domain.

证　$\forall y \in p(L)$，$\exists x \in L$，使得 $y = p(x)$. 设 $D \in Z(p(L))$ 且 $p(x) \leqslant \sup D$，又由注 1(2) 知 $D \in Z(L)$，由 L 是 Z -准连续 Domain 知，存在 $J \in Z(L)$，使得 $p(x) = \sup J$ 且 $\forall j \in J$，$\exists d \in D$，使得 $j \leqslant d$. 由于 p 幂等且是 Z -连续的，所以

$$p(x) = p(\sup J) = \sup(p(J))$$

显然 $p(J) \in Z[p(L)]$ 且 $\forall j \in J$，$\exists d \in D$，使得

$$p(j) \leqslant p(d) = d$$

所以 $p(J)$ 是 y 相应于 D 的 Z-准极小集. 由 D 的任意性知，y 有 Z-准极小集. 由 y 的任意性知 $p(L)$ 是 Z-准连续 Domain.

定理 5 设 L 是 Z-准连续 Domain，$P \subseteq L$ 是关于 Z-集的并封闭的下集，则 P 在诱导序下是 Z-准连续 Domain.

证 由于 P 关于 Z-集是并封闭的，则 P 在诱导序下是 Z-完备的. 设 $x \in P$，$D \in Z(P)$ 且 $x \leqslant \sup D$，由注 1 知 $D \in Z(L)$. 由于 L 是 Z-准连续 Domain，则 x 有相应于 D 的 Z-准极小集，即 $\exists J \in Z(L)$，使得 $x = \sup J$ 且 $\forall j \in J$，$\exists d \in D$，使得 $j \leqslant d$. 由 P 是下集知 $J \subseteq P$，则 $J \in Z(P)$，(反之，若 J 不是 P 的 Z-集，由于含入映射 $i: P \longrightarrow L$ 是单调的，则 $i(J) = J$ 不是 L 的 Z-集，这与 $J \in Z(P)$ 相矛盾) 所以 J 是 x 相应于 D 的 Z-准极小集，因此 P 在诱导序下是 Z-准连续 Domain.

参考文献:

[1] GIERZ G，HOFMANN K H，KEIMEL K，et al. Continuous Lattices and Domain [M]. Cambridge：Cambridge University Press，2003.

[2] 阮小军，毕含宇，赵 洋. Z-极小集及其对 Z-连续偏序集的应用 [J]. 江西师范大学学报(自然科学版)，2006，30(4)：328－335.

[3] 尚 云. 连续 Domain 的若干特征定理 [J]. 西北大学学报(自然科学版)，2004，34(4)：631－635.

[4] 郭智莲，赵 彬. 准连续 Domain 和稳定映射 [J]. 纺织高校基础科学学报，2006，19(3)：210－213.

Properties and Characterizations of Z-Precontinous Posets

MA Jue， WEI Mei-hua

College of Mathematics and statistics，Yulin University，Yulin Shaanxi 719000，China

Abstract：In this paper，the notion of Z-precontinous Domain is introduced based on the Z-preminimal sets and Z-precontinous Domain are characterized terms of equalities.

Key words：Z-preminimal sets；Z-precontinous Domain；Z-continous Domain

责任编辑 夏 娟