第 39 卷第 8 期 西南大学学报(自然科学版) 2017 年 8 月
Vol. 39 No. 8 Journal of Southwest University (Natural Science Edition) Aug. 2017

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2017.08.011

平凡西罗限制模上的格林对应①

黄文林

中国人民大学 信息学院,北京 100872

摘要: 研究了平凡西罗限制 kG-模,刻画了不可分解平凡西罗限制 kG-模的格林对应,证明了,若任意 $x \in G-H$,都有 $P \cap H^x = 1$,特别地,若 H 是 G 的强 p-嵌入子群,那么,格林对应建立了不可分解平凡西罗限制 kG-模的同构类和不可分解平凡西罗限制 kH-模的同构类之间的一一对应.

关 键 词: 平凡西罗限制模;格林对应;强 p-嵌入子群

中图分类号: O152.6 **文献标志码:** A **文章编号:** 1673-9868(2017)08-0077-06

平凡西罗限制模是一类特别的内平凡模,内平凡模是内同态环(自同态环)在稳定模范畴中平凡的 kG-模[1],它是稳定模范畴的Picard群的元素[2],是内置换模的组成部分,而内置换模还是 p-可解群和 p-幂零群等某些有限群的不可约模的源;平凡西罗限制模还是一种特别的 p-置换模,而 p-置换模在块代数的 p-置换等价和 Dade 群的结构方面都有重要应用[3].

在文献[4]中,J. Green 首次提出了一种关于有限群 G 上的不可分解模与其子群 H 上的不可分解模之间的转移定理,也就是著名的格林对应定理;在文献[5]中,他再次提出该定理,并用于研究有限群公理化表示中的 G-函子上的转移定理.如今,格林对应定理已经成为有限群表示论中的十分重要的研究工具,例如,文献[6]研究了模覆盖和块覆盖与格林对应之间的关系.

本文研究平凡西罗限制模和它的格林对应,并刻画了平凡西罗限制 kG-模的盖、顶、维数、分解结构;证明了不可分解平凡西罗限制 kG-模的格林对应恰是它的限制模的盖,以及,对于群 G 的子群 H 和西罗 p-子群 P,若任意 $x \in G-H$,都有 $P \cap H^x = 1$,那么,不可分解平凡西罗限制 kH-模的诱导模仍是平凡西罗限制 kG-模.

此时,格林对应建立了不可分解平凡西罗限制 kG-模同构类和不可分解平凡西罗限制 kH-模同构类之间的一一对应.特别地,若子群 H 在群 G 中是强嵌入的,那么,格林对应也建立了不可分解平凡西罗限制 kG-模同构类和不可分解平凡西罗限制 kH-模同构类之间的一一对应.

1 平凡西罗限制 kG-模

本文中,我们设定,G 是一个有限群,p 是 G 的阶的素数因子,k 是一个特征为 p 的数域,所有的模都是有限生成的.关于本文的记号和术语,读者可参考文献[7-10].

① 收稿日期:2017-01-15
基金项目:国家自然科学基金项目(10826057).
作者简介:黄文林(1977-),男,湖北黄冈人,博士,主要从事有限群表示论研究.

定义 1 设 P 是有限群 G 的西罗 p-子群，M 是一个 kG-模，若 M 限制到 P 上有分解：$\mathrm{Res}_P^G M = k \oplus S$，$S$ 是一个投射 kP-模，则称 M 是一个平凡西罗限制 kG-模.

注 1 定义 1 中，由于

$$\mathrm{Res}_P^G \mathrm{End}(M) \cong \mathrm{End}(\mathrm{Res}_P^G M) \cong k \oplus \mathrm{End}(S)$$

而 $\mathrm{End}(S)$ 仍是投射模，所以，$\mathrm{Res}_P^G M$ 是内平凡 kP-模，从而，平凡西罗限制 kG-模 M 是内平凡 kG-模(参考文献[11]中的引理 2.2).

注 2 因为投射模的共轭模仍是投射模，所以定义 1 中的平凡西罗限制 kG-模 M 的定义不依赖于西罗 p-子群 P 的选择.

注 3 因为投射模都是置换模(参见文献[10]中的推论 27.2)，所以平凡西罗限制 kG-模是 p-置换 kG-模.

引理 1 设 P 是有限群 G 的西罗 p-子群，M 和 N 是平凡西罗限制 kG-模，U 是一个投射 kG-模，那么

1) 对偶模 M^* 是平凡西罗限制 kG-模；

2) 共轭模 M^g 平凡西罗限制 kG-模；

3) $M \otimes N$ 是平凡西罗限制 kG-模；

4) $M \oplus U$ 是平凡西罗限制 kG-模.

证 1) 设 $\mathrm{Res}_P^G M = k \oplus S$，$S$ 是投射 kP-模，则

$$\mathrm{Res}_P^G M^* = (\mathrm{Res}_P^G M)^* = k \oplus S^*$$

然而，由于 kG 是自内射代数，投射模 S 的对偶 S^* 仍是投射模(参考文献[6]中的性质 6.7)，所以，M^* 是平凡西罗限制 kG-模.

2) 同理，由参考文献[6]中的例 10.10 知，$M^g \cong M$，那么，$\mathrm{Res}_P^G M^g \cong \mathrm{Res}_P^G M = k \oplus S$，共轭模 M^g 是平凡西罗限制 kG-模.

3) 又设 $\mathrm{Res}_P^G N = k \oplus T$，$T$ 是投射 kP-模，那么

$$\mathrm{Res}_P^G (M \otimes N) = (k \oplus S) \otimes (k \oplus T) \cong k \oplus S \oplus T \oplus S \otimes T$$

而 $S \otimes T$ 是投射模，所以，$M \otimes N$ 是平凡西罗限制 kG-模.

4) $\mathrm{Res}_P^G (M \oplus U) = (k \oplus S) \oplus \mathrm{Res}_P^G U \cong k \oplus (S \oplus \mathrm{Res}_P^G U)$，而 $\mathrm{Res}_P^G U$ 是投射 kP-模，所以 $M \oplus U$ 是平凡西罗限制 kG-模.

引理 2 M 是平凡西罗限制 kG-模，那么 $\dim(M) = 1 (\mathrm{mod}\ |G|_p)$.

证 设 $\mathrm{Res}_P^G M = k \oplus S$，$S$ 是投射 kP-模，p 是 G 的西罗 p-子群，由文献[6]中的习题 21.2 知

$$\dim(S) = 1 (\mathrm{mod}\ |P|)$$

所以

$$\dim(M) = \dim(\mathrm{Res}_P^G M) = 1 + \dim(S) = 1 (\mathrm{mod}\ |G|_p)$$

性质 1 每个平凡西罗限制 kG-模 M 都可分解为一个不可分解平凡西罗限制 kG-模 N 和一个投射 kG-模 U 的直和，并且该分解在 kG-模同构的意义下是唯一的.

证 设 N 是 M 的不可分解非投射直因子，p 是 G 的西罗 p-子群，那么，由 Krull-Schmidt 定理知

$$\mathrm{Res}_P^G N = k \oplus X$$

式中，X 是一个投射 kP-模，所以，N 是一个不可分解平凡西罗限制 kG-模.

另一方面，若 M 还有与 N 一样的不可分解非投射直因子，则平凡模 k 在 $\mathrm{Res}_P^G M$ 的直和分解中的重数

是 2，这与 Krull-Schmidt 定理相矛盾.

我们称性质 1 中的不可分解平凡西罗限制 kG -模 N 为 M 的盖.

性质 2　1）设 M 是不可分解平凡西罗限制 kG -模，那么 M 的顶是群 G 的西罗 p -子群；

2）设 M 是 H -投射平凡西罗限制 kG -模，H 是 G 的子群，那么 H 包含群 G 的某个西罗 p -子群.

证　1）反证法. 若 M 的顶是 G 的真 p -子群，那么，由文献[6]中的习题 23.1 知

$$\dim(M)=0(\mathrm{mod}\ p)$$

这与引理 2 相矛盾.

2）由性质 1，设 N 是 M 的盖，那么，N 是不可分解 H -投射平凡西罗限制 kG -模，由(1)知，N 的顶是 G 的西罗 p -子群，这说明，H 必须包含 G 的某个西罗 p -子群.

由性质 2 得知，任何平凡西罗限制 kG -模的盖的顶是 G 的西罗 p -子群.

2　平凡西罗限制模上的格林对应

引理 3　设 H 是 G 的子群，M 是平凡西罗限制 kG -模，那么限制模 $\mathrm{Res}_H^G M$ 是平凡西罗限制 kH -模.

证　设 G 的西罗 p -子群 P 包含 H 的西罗 p -子群 Q，并设 $\mathrm{Res}_P^G M= k\oplus S$，$S$ 是投射 kP -模，那么

$$\mathrm{Res}_Q^H(\mathrm{Res}_H^G M)=\mathrm{Res}_Q^G M=\mathrm{Res}_Q^P(\mathrm{Res}_P^G M)=k\oplus \mathrm{Res}_Q^P S$$

而 $\mathrm{Res}_Q^P S$ 是投射 kQ -模，所以，$\mathrm{Res}_H^G M$ 是平凡西罗限制 kH -模.

推论 1　设 H 是 G 的子群，M 是 kG -模，若 H 包含群 G 的西罗 p -子群，那么，M 是平凡西罗限制 kG -模当且仅当限制模 $\mathrm{Res}_H^G M$ 是平凡西罗限制 kH -模.

证　由引理 3 得知必要性成立. 下面证明充分性. 设 H 包含 G 的西罗 p -子群 P，那么，若 $\mathrm{Res}_H^G M$ 是平凡西罗限制 kH -模，即

$$\mathrm{Res}_P^G M=\mathrm{Res}_P^H(\mathrm{Res}_H^G M)$$

而

$$\mathrm{Res}_P^H(\mathrm{Res}_H^G M)=k\oplus Y$$

且 Y 是投射 kP -模，所以，M 是平凡西罗限制 kG -模，充分性得证.

格林对应定理[9]　设 P 是群 G 的 p -子群，H 是 G 的子群，并且 $H\geqslant N_G(P)$；又设 V 是不可分解 kG -模，U 是不可分解 kH -模，并且 P 是它们的顶；那么

1）$\mathrm{Res}_H^G V$ 和 $\mathrm{Ind}_H^G U$ 分别有唯一的顶为 P 的不可分解直因子 $f(V)$ 和 $g(U)$；

2）$g(f(V))\cong V$ 和 $f(g(U))\cong U$，f 和 g 建立了顶为 P 的不可分解 kG -模同构类和顶为 P 的不可分解 kH -模同构类之间的一一对应(参见文献[9]中的定理 11.6.4).

上述一一对应也称为格林对应，它由 J. Green 在文献[4]中首次提出. 下面的引理 4 称为 Burry-Puig-Carlson 定理(参见文献[9]中的定理 11.6.9).

引理 4　设 P 是群 G 的 p -子群，H 是 G 的子群，并且 $H\geqslant N_G(P)$；又设 V 是一个不可分解 kG -模，并且 U 是 $\mathrm{Res}_H^G V$ 的不可分解直因子；若 P 是 U 的顶，那么，U 恰是 V 的格林对应.

定理 1　设 P 是群 G 的西罗 p -子群，H 是 G 的子群，并且 $H\geqslant N_G(P)$；若 M 是不可分解平凡西罗限制 kG -模，那么，M 的格林对应是一个不可分解平凡西罗限制 kH -模，并且，它恰是 $\mathrm{Res}_H^G M$ 的盖.

证　由引理 3 知，$\mathrm{Res}_H^G M$ 是平凡西罗限制 kH -模；由性质 1 和性质 2 得知，对于 $\mathrm{Res}_H^G M$，它的盖是其唯一的不可分解平凡西罗限制直因子，并且，它的盖的顶是 G 的西罗 p -子群，这说明，它的盖是其唯一

的顶为 G 的西罗 p-子群的不可分解直因子;再由引理4知,M 的格林对应恰是 $\mathrm{Res}_H^G M$ 的盖,它是一个不可分解平凡西罗限制 kH-模.

定理2 设 H 是 G 的子群,N 是平凡西罗限制 kH-模,并且 $M=\mathrm{Ind}_H^G N$;那么,M 是平凡西罗限制 kG-模当且仅当 H 包含 G 的西罗 p-子群 P 并且 $P\cap H^x=1$,$x\in G-H$.

证 若 H 的西罗 p-子群 Q 是 G 的西罗 p-子群 P 的真子群,那么,M 是 H 投射 kG-模,从而是 Q-投射 kG-模(参见文献[9]中的性质11.3.5),再由文献[6]中的习题23.1知

$$\dim(M)=0(\mathrm{mod}\ p)$$

结合引理2,得知 M 不是平凡西罗限制 kG-模.

下面的证明中,设 $Q=P$,即 H 包含 G 的西罗 p-子群 P;此时,由Frobenius互反律(参见文献[9]中的推论4.3.8)知

$$\mathrm{Res}_P^G M=\mathrm{Res}_P^G\mathrm{Ind}_H^G N=\bigoplus_{x\in P\backslash G/H}\mathrm{Ind}_{P\cap H^x}^P\mathrm{Res}_{P\cap H^x}^{H^x}N^x=$$

$$N\bigoplus_{x\in P\backslash G/H,\ x\neq 1}\mathrm{Ind}_{P\cap H^x}^P\mathrm{Res}_{P\cap H^x}^{H^x}N^x$$

这说明,若 M 是平凡西罗限制 kG-模,那么,一方面,由推论1得知,$\mathrm{Res}_P^G M$ 是平凡西罗限制 kP-模,再由性质1得知,对于每一个 $x\in P\backslash G/H$,$x\neq 1$,$\mathrm{Ind}_{P\cap H^x}^P N^x$ 都是投射 kP-模.

另一方面,共轭模 N^x 是平凡西罗限制 kH^x-模,从而

$$k\mid\mathrm{Res}_{P\cap H^x}^{H^x}N^x$$

以及

$$\mathrm{Ind}_{P\cap H^x}^P k\mid\mathrm{Ind}_{P\cap H^x}^P\mathrm{Res}_{P\cap H^x}^{H^x}N^x$$

这说明,$\mathrm{Ind}_{P\cap H^x}^P k$ 是投射 kP-模,所以 $P\cap H^x$ 是平凡子群,即 $P\cap H^x=1$. 必要性得证.

反之,若 $P\cap H^x=1$,$x\in G-H$,与上述必要性证明类似,结合性质1得知,$\mathrm{Res}_P^G M$ 是平凡西罗限制 kP-模,再由推论1,M 是平凡西罗限制 kG-模. 充分性得证.

设 H 是群 G 的子群,若 H 含有 p-元素,但对每个 $x\in G-H$,$H\cap H^x$ 都是 p' 群,则称 H 是 G 的强 p-嵌入子群. 强 p-嵌入子群 H 包含 G 的任何 p-子群的正规化子[12].

定理3 设 H 是群 G 的子群,N 是不可分解平凡西罗限制 kH-模;若 H 是 G 的强 p-嵌入子群,那么 N 的格林对应是一个不可分解平凡西罗限制 kG-模,并且,它恰是 $\mathrm{Ind}_H^G N$ 的盖.

证 设强 p-嵌入子群 H 包含 G 的西罗 p-子群 P,那么,$H\geqslant N_G(P)$,并且,对每个 $x\in G-H$,$H\cap H^x$ 都是 p'-群,从而,$P\cap H^x=1$,由定理2得知,$\mathrm{Ind}_H^G N$ 是平凡西罗限制 kG-模,由性质2知,$\mathrm{Ind}_H^G N$ 的盖是其唯一顶为 P 的不可分解直因子,再由引理4得知,$\mathrm{Ind}_H^G N$ 的盖是 N 的格林对应,它是一个不可分解平凡西罗限制 kG-模.

对于有限群 G 以及它的西罗 p-子群 P,若 $P\cap P^x=1$,$x\in G-N_G(P)$,则称西罗 p-子群 P 是平凡交的,此时,$N_G(P)$ 是 G 的强 p-嵌入子群;若 G 的任何两个不同的西罗 p-子群的交子群都是平凡的,我们称 G 为有平凡西罗交[13].

推论2 设 P 是群 G 的西罗 p-子群,H 是 G 的子群,并且 $H\geqslant N_G(P)$,N 是不可分解平凡西罗限制 kH-模;若 G 有平凡西罗交,那么 N 的格林对应是一个不可分解平凡西罗限制 kG-模,并且,它恰是 $\mathrm{Ind}_H^G N$ 的盖.

证 G 有平凡西罗交,那么,H 是 G 的强 p-嵌入子群,由定理3得知推论2成立.

推论3 设 P 是群 G 的西罗 p-子群,$H=N_G(P)$,N 是不可分解平凡西罗限制 kH-模;若 P 是平凡交的,那么 N 的格林对应是一个不可分解平凡西罗限制 kG-模,并且,它恰是 $\mathrm{Ind}_H^G N$ 的盖.

证　P 是平凡交的，那么，H 是 G 的强 p -嵌入子群，由定理 3 得知推论 3 成立.

定理 4　设群 G 的子群 H 和西罗 p -子群 P 满足 $G > H \geqslant N_G(P)$；若 $P \cap H^x = 1$，$x \in G - H$，那么格林对应建立了不可分解平凡西罗限制 kG -模同构类和不可分解平凡西罗限制 kH -模同构类之间的一一对应.

证　一方面，由定理 1 知，不可分解平凡西罗限制 kG -模 M 的格林对应 $f(M)$ 是一个不可分解平凡西罗限制 kH -模，并且，它恰是 $\mathrm{Res}_H^G M$ 的盖.

另一方面，由定理 2 知，不可分解平凡西罗限制 kH -模 N 的格林对应 $g(N)$ 是一个不可分解平凡西罗限制 kG -模，并且，它恰是 $\mathrm{Ind}_H^G N$ 的盖.

综上，在 $H \geqslant N_G(P)$，且 $P \cap H^x = 1$，$x \in G - H$ 的情形下，不可分解平凡西罗限制模在格林对应下封闭，那么，由格林对应定理得知，格林对应建立了不可分解平凡西罗限制 kG -模同构类和不可分解平凡西罗限制 kH -模同构类之间的一一对应.

定理 5　设 H 是 G 的子群，N 是平凡西罗限制 kH -模；若 H 是群 G 的强 p -嵌入子群，那么格林对应建立了不可分解平凡西罗限制 kG -模同构类和不可分解平凡西罗限制 kH -模同构类之间的一一对应.

证　设强 p -嵌入子群 H 包含 G 的西罗 p -子群 P. 那么，首先，$H \geqslant N_G(P)$；其次，由定理 1，不可分解平凡西罗限制 kG -模 M 的格林对应 $f(M)$ 是一个不可分解平凡西罗限制 kH -模，并且，它恰是 $\mathrm{Res}_H^G M$ 的盖；再次，由定理 3，不可分解平凡西罗限制 kH -模 N 的格林对应 $g(N)$ 是一个不可分解平凡西罗限制 kG -模，并且，它恰是 $\mathrm{Ind}_H^G N$ 的盖.

综上，结合格林对应定理得知，当 H 是群 G 的强 p -嵌入子群时，格林对应建立了不可分解平凡西罗限制 kG -模同构类和不可分解平凡西罗限制 kH -模同构类之间的一一对应.

推论 4　设 P 是群 G 的西罗 p -子群，H 是 G 的子群，并且 $H \geqslant N_G(P)$；若 G 有平凡西罗交，那么格林对应建立了不可分解平凡西罗限制 kG -模同构类和不可分解平凡西罗限制 kH -模同构类之间的一一对应.

证　由推论 2 和定理 5 的证明即可证得.

推论 5　设 P 是群 G 的西罗 p -子群，$H = N_G(P)$，N 是不可分解平凡西罗限制 kH -模；若 P 是平凡交的，那么格林对应建立了不可分解平凡西罗限制 kG -模同构类和不可分解平凡西罗限制 kH -模同构类之间的一一对应.

证　由推论 3 和定理 5 的证明即可证得.

参考文献：

[1]　CARLSON J F，THEVENAZ J. The Classification of Endo-Trivial Modules [J]. Invent Math，2004，158(2)：389－411.

[2]　CARLSON J F，ROUQUIER R. Self-Equivalences of Stable Module Categories [J]. Math Z，2000，233(1)：165－178.

[3]　PEREPELITSKY P N. p-Permutation Equivalences Between Blocks of Finite Groups [D]. California：University of California，2014.

[4]　GREEN J A. A Transfer Theorem for Modular Representations [J]. Journal of Algebra，1964，1(1)：73－84.

[5]　GREEN J A. Axiomatic Representation Theory for Finite Groups [J]. Journal of Pure & Applied Algebra，1971，1(1)：41－77.

[6]　COCONET T，MARCUS A. Module Covers and the Green Correspondence [J]. Journal of Algebra，2015，432：62－71.

[7]　徐明曜. 有限群导引：上册 [M]. 北京：科学出版社，1999.

[8]　徐明曜，黄建华，李慧陵. 有限群导引：下册 [M]. 北京：科学出版社，1999.

[9]　WEBB P. A Course in Finite Group Representation Theory [M]. New York：Cambridge University Press，2016.

[10] THEVENAZ J. G-Algebras and Modular Representation Theory [M]. Oxford: The Clarendon Press, 1995.

[11] LASSUEUR C, MALLE G, SCHULTE E. Simple Endotrivial Modules for Quasi-Simple Groups [J]. Journal Für Die Reine Und Angewandte Mathematik, 2016, 712: 141－174.

[12] PARKER C, STROTH G. Strongly p-Embedded Subgroups [J]. Pure & Applied Mathematics Quartely, 2009, 7(4): 797－858.

[13] BLAU H, MICHLER G. Modular Representation Theory of Finite Groups with T. I. Sylow p-Subgroups [J]. Transactions of The American Mathematical Society, 1990, 319(2): 417－468.

On Green Correspondence for the kG-Module with Trivial Sylow Restriction

HUANG Wen-lin

School of Information, Renmin University of China, Beijing 100872, China

Abstract: In this paper, we study the kG-module with trivial Sylow restriction, investigate its Green correspondent and prove that if $P \cap H^x = 1$ for any $x \in G - H$ and, in particular, H is a strongly p-embedded subgroup of G, then Green correspondence sets up a bijection between the isomorphism classes of the indecomposable kG-module with trivial Sylow restriction and of the indecomposable kH-module with trivial Sylow restriction.

Key words: module with trivial sylow restriction; green correspondence; strongly p-embedded subgroup

责任编辑 包 颖

崔玉洁