DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2017.08.012

关于不定方程 $5x(x+1)(x+2)(x+3)=6y(y+1)(y+2)(y+3)$ ①

李益孟，　罗　明

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要： 运用递归序列和平方剩余的方法，证明了不定方程 $5x(x+1)(x+2)(x+3)=6y(y+1)(y+2)(y+3)$ 仅有正整数解 $(x,y)=(21,20)$.

关 键 词： 不定方程；整数解；递归序列；平方剩余

中图分类号： O156.2　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1673-9868(2017)08-0083-06

当 $(p,q)=1$，$p,q\in\mathbb{N}^*$ 时，形如

$$px(x+1)(x+2)(x+3)=qy(y+1)(y+2)(y+3)$$

的不定方程已经有不少研究工作[1-10]. 在本文中，我们将运用递归数列方法证明当 $(p,q)=(5,6)$ 时，不定方程

$$5x(x+1)(x+2)(x+3)=6y(y+1)(y+2)(y+3) \tag{1}$$

仅有一组正整数解 $(x,y)=(21,20)$. 首先将方程(1)化为

$$[5(x^2+3x+1)]^2-30(y^2+3y+1)^2=-5 \tag{2}$$

容易知道方程 $x^2-30y^2=-5$ 的全部整数解由一个结合类(歧类)给出

$$x_n+y_n\sqrt{30}=\pm\left(5+\sqrt{30}\right)\left(11+2\sqrt{30}\right)^n \qquad n\in\mathbb{Z}$$

$$\overline{x}_n+\overline{y}_n\sqrt{30}=\pm\left(-5+\sqrt{30}\right)\left(11+2\sqrt{30}\right)^n \qquad n\in\mathbb{Z}$$

其中 $5+\sqrt{30}$ 是 $x^2-30y^2=-5$ 的最小正整数解，$11+2\sqrt{30}$ 是 Pell 方程 $u^2-30v^2=1$ 的基本解. 于是方程(2)的解应满足

$$(2y+3)^2=4y_n+5$$

$$(2y+3)^2=4\overline{y}_n+5$$

容易看出 $\overline{y}_n=y_{-n}$，于是方程(2)的解应满足

$$(2y+3)^2=\pm 4y_n+5 \qquad n\in\mathbb{Z} \tag{3}$$

容易验证下列关系式成立

$$u_{n+1}=22u_n-u_{n-1} \qquad u_0=1,\ u_1=11 \tag{4}$$

$$v_{n+1}=22v_n-v_{n-1} \qquad v_0=0,\ v_1=2 \tag{5}$$

---

① 收稿日期：2016-09-12
基金项目：国家自然科学基金项目(11471265).
作者简介：李益孟(1991-)，女，重庆忠县人，硕士研究生，主要从事代数数论的研究.

$$u_{2n}=2u_n^2-1 \qquad v_{2n}=2u_nv_n \tag{6}$$

$$y_{n+1}=22y_n-y_{n-1} \qquad y_0=1,\ y_1=21 \tag{7}$$

$$y_n=u_n+5v_n \tag{8}$$

$$u_{n+2km}\equiv(-1)^k u_n \pmod{u_m} \qquad v_{n+2km}\equiv(-1)^k v_n \pmod{u_m} \tag{9}$$

$$y_{n+2km}\equiv(-1)^k y_n \pmod{u_m} \tag{10}$$

下面将证明(3)式仅当 n 等于 0,2,−1,−3 时成立，由此求得方程(2)的全部整数解，进而求得(1)的全部正整数解.

1 $(2y+3)^2=4y_n+5$

本节考察当 n 取何值时，$4y_n+5$ 为完全平方数. 在做此工作之前我们先介绍几个引理.

引理 1 设 $2\mid n$，$n>0$，则 $\left(\dfrac{\pm 20v_{2n}+5}{u_{2n}}\right)=\left(\dfrac{u_n\pm 4v_n}{23}\right)$.

证 当 $2\mid n$ 时，$u_{2n}\equiv 1 \pmod 8$，$v_n\equiv 0 \pmod 2$，$u_n\equiv 1 \pmod 8$，于是

$$\left(\frac{\pm 20v_{2n}+5}{u_{2n}}\right)=\left(\frac{\pm 40u_nv_n+10u_n^2}{u_{2n}}\right)=\left(\frac{2}{u_{2n}}\right)\left(\frac{u_n}{u_{2n}}\right)\left(\frac{\pm 20v_n+5u_n}{u_{2n}}\right)=$$

$$\left(\frac{u_{2n}}{u_n}\right)\left(\frac{u_{2n}}{\pm 20v_n+5u_n}\right)=\left(\frac{-1}{u_n}\right)\left(\frac{30v_n^2+u_n^2}{\pm 20v_n+5u_n}\right)=$$

$$\left(\frac{46}{\pm 4v_n+u_n}\right)=\left(\frac{23}{\pm 4v_n+u_n}\right)=\left(\frac{u_n\pm 4v_n}{23}\right)$$

证毕.

引理 2 若 $4y_n+5$ 是平方数，则 $n\equiv 0,2,-1,-3 \pmod{2\times 5^2}$.

证 在此次证明中我们采用对序列 $\{4y_n+5\}$ 取模的方法证明，分两步

第一步：

mod 101，排除 $n\equiv 1,3 \pmod 5$，此时 $4y_n+5\equiv 89,89 \pmod{101}$，余 $n\equiv 0,2,4 \pmod 5$，即 $n\equiv 0,2,4,5,7,9,10,12,14,15,17,19,20,22,24 \pmod{25}$. mod 101 是对 $\{4y_n+5\}$ 取的，mod 5 指出所得剩余序列周期为 5. 89 为 mod 101 的平方非剩余，为节省篇幅，我们以下均按这种方式叙述.

mod 701，排除 $n\equiv 4,7,17,20 \pmod{25}$，此时 $4y_n+5\equiv 642,540,540,642 \pmod{701}$. 余 $n\equiv 0,2,5,9,10,12,14,15,19,22,24 \pmod{25}$.

mod 14401，排除 $n\equiv 5,12,19 \pmod{25}$，此时 $4y_n+5\equiv 14255,6834,14255 \pmod{14401}$，余 $n\equiv 0,2,9,10,14,15,22,24 \pmod{25}$.

mod 515401，排除 $n\equiv 9,10,14,15 \pmod{25}$，此时 $4y_n+5\equiv 502844,226595,226595,502844 \pmod{515401}$，余 $n\equiv 0,2,22,24 \pmod{25}$

即 $n\equiv 0,2,22,24,25,27,47,49,50,52,72,74,75,77,97,99 \pmod{100}$.

第二步：

mod 231841，排除 $n\equiv 3,4,5,7,12,14,15,16 \pmod{20}$，排除 $n\equiv 24,25,27,47,52,72,74,75 \pmod{100}$.

综上即余 $n\equiv 0,2,22,47,49,50,77,97,99 \pmod{100}$，即 $n\equiv 0,2,22,27,47,49 \pmod{50}$，mod 83401 排除 $n\equiv 22,27 \pmod{50}$，此时 $4y_n+5\equiv 81562,81562 \pmod{50}$.

综上 $n\equiv 0,2,-1,-3 \pmod{50}$.

引理 3 设 $n\equiv 0 \pmod{2\times 5^2}$，则仅当 $n=0$ 时，$4y_n+5$ 为平方数.

证 如果 $n\equiv 0 \pmod{2\times 5^2}$ 且 $n\neq 0$ 则可令

$$n=2\times k\times 5^2\times 2^t \qquad t\geqslant 0,\ 2\nmid k$$

对$\{u_n \pm 4v_n\}$取模 23，所得的两个剩余序列周期均为 3，而对$\{2^t\}$模 3 的剩余序列具有周期 2. 下面对 k 分两种情况讨论.

情况 Ⅰ　$k \equiv 1 \pmod 4$ 时，令

$$m=\begin{cases}2^t & t\equiv 0 \pmod 2\\ 5\cdot 2^t & t\equiv 1 \pmod 2\end{cases}$$

则有表 1.

表 1　$k\equiv 1 \pmod 4$ 数据情况表

$t(\geqslant 2) \pmod 2$	0	1
$m \pmod 3$	1	1
$u_m+4v_m \pmod{23}$	19	19

对表中所有 m，均有

$$\left(\frac{u_m+4v_m}{23}\right)=-1$$

于是，由(9)，(10) 及引理 1，有

$$4y_n+5\equiv 4y_{2m}+5\equiv 20v_{2m}+5 \pmod{u_{2m}}$$

进而得

$$\left(\frac{4y_n+5}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{20v_{2m}+5}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{u_m+4v_m}{23}\right)=-1$$

从而 $4y_n+5$ 是非平方数.

情况 Ⅱ　$k\equiv -1 \pmod 4$ 时，令

$$m=\begin{cases}5\cdot 2^t & t\equiv 0 \pmod 2\\ 2^t & t\equiv 1 \pmod 2\end{cases}$$

则有表 2.

表 2　$k\equiv -1 \pmod 4$ 数据情况表

$t(\geqslant 2) \pmod 2$	0	1
$m \pmod 3$	2	2
$u_m-4v_m \pmod{23}$	19	19

对表中所有 m，均有

$$\left(\frac{u_m-4v_m}{23}\right)=-1$$

于是，由(9)，(10) 式及引理 1，有

$$4y_n+5\equiv -4y_{2m}+5\equiv -20v_{2m}+5 \pmod{u_{2m}}$$

进而得

$$\left(\frac{4y_n+5}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{-20v_{2m}+5}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{u_m-4v_m}{23}\right)=-1$$

从而 $4y_n+5$ 是非平方数.

当 $n=0$ 时，$4y_n+5=3^2$. 证毕

引理 4　设 $n\equiv -1 \pmod{2\times 5^2}$，则仅当 $n=-1$ 时，$4y_n+5$ 为完全平方数.

证　如果 $n\equiv -1 \pmod{2\times 5^2}$ 且 $n\neq -1$，则可令

$$n=-1+2\times k\times 5^2\times 2^t \qquad t\geqslant 0,\ 2\nmid k$$

若取 m 为 2^t，5×2^t 之一，则由(10) 知：

$$y_n \equiv y_{-1\pm 2m} \equiv u_{-1\pm 2m} + 5v_{-1\pm 2m} \equiv$$
$$u_{-1}u_{\pm 2m} + 30v_{-1}v_{\pm 2m} + 5(v_{-1}u_{\pm 2m} + u_{-1}v_{\pm 2m}) \equiv$$
$$30v_{-1}v_{\pm 2m} + 5u_{-1}v_{\pm 2m} \equiv -5v_{\pm 2m} \pmod{u_{2m}}$$

于是

$$4y_n + 5 \equiv -20v_{\pm 2m} + 5 \equiv \mp 20v_{2m} + 5 \pmod{u_{2m}}$$

由引理 1 可知

$$\left(\frac{\pm 20v_{2m} + 5}{u_{2m}}\right) = \left(\frac{u_m \pm 4v_m}{23}\right)$$

只要完全按照引理 3 证明过程中的方式取 m，可得

$$\left(\frac{4y_n + 5}{u_{2m}}\right) = \left(\frac{\pm 20v_{2m} + 5}{u_{2m}}\right) = \left(\frac{u_m \pm 4v_m}{23}\right) = -1$$

从而 $4y_n + 5$ 不为平方数，假设不成立.

当 $n = -1$ 时，$4y_n + 5 = 3^2$，证毕.

引理 5 设 $n \equiv 2 \pmod{2 \times 5^2}$，则仅当 $n = 2$ 时，$4y_n + 5$ 为完全平方数.

证 如果 $n \equiv 2 \pmod{2 \times 5^2}$ 且 $n \neq 2$，则可令

$$n = 2 + 2 \times k \times 5^2 \times 2^t \qquad t \geqslant 0,\ 2 \nmid k$$

若取 m 为 2^t，5×2^t 之一，则由(10)知，

$$4y_n + 5 \equiv -4y_2 + 5 \equiv -1\,839 \pmod{u_m}$$

由于 $2|m$时，$u_m \equiv 1 \pmod 8$，$u_m \equiv 1 \pmod 3$. 故

$$\left(\frac{4y_n + 5}{u_m}\right) = \left(\frac{-1839}{u_m}\right) = \left(\frac{-1}{u_m}\right)\left(\frac{3}{u_m}\right)\left(\frac{613}{u_m}\right) = \left(\frac{u_m}{3}\right)\left(\frac{u_m}{613}\right) = \left(\frac{u_m}{613}\right)$$

$\{u_m\}$ 对 mod 613 的周期为 612，而$\{2^t\}$ 对 mod 612 的周期为 24.

令

$$m = \begin{cases} 2^t & t \equiv 0,1,7,8,9,10,11,13,14,15,18,19,22,23 \pmod{24} \\ 5 \cdot 2^t & t \equiv 3,6,16,17 \pmod{24} \\ 5^2 \cdot 2^t & t \equiv 2,4,12 \pmod{24} \\ 5^3 \cdot 2^t & t \equiv 20 \pmod{24} \\ 5^4 \cdot 2^t & t \equiv 5,21 \pmod{24} \end{cases}$$

对所有 m，均有$\left(\frac{u_m}{613}\right) = -1$. 于是由上可知

$$\left(\frac{4y_n + 5}{u_m}\right) = -1$$

从而 $4y_n + 5$ 不为平方数，假设不成立.

当 $n = 2$ 时，$4y_n + 5 = 43^2$，证毕.

引理 6 设 $n \equiv -3 \pmod{2 \times 5^2}$，则仅当 $n = -3$ 时，$4y_n + 5$ 为完全平方数.

证 如果 $n \equiv -3 \pmod{2 \times 5^2}$ 且 $n \neq -3$，则可令

$$n = -3 + 2 \times k \times 5^2 \times 2^t \qquad t \geqslant 0,\ 2 \nmid k$$

若取 m 为 2^t，5×2^t 之一，则由(10)知，

$$4y_n + 5 \equiv -4y_{-3} + 5 \equiv -1839 \pmod{u_m}$$

由于 $2|m$时，$u_m \equiv 1 \pmod 8$，$u_m \equiv 1 \pmod 3$. 故

$$\left(\frac{4y_n + 5}{u_m}\right) = \left(\frac{-1839}{u_m}\right) = \left(\frac{-1}{u_m}\right)\left(\frac{3}{u_m}\right)\left(\frac{613}{u_m}\right) = \left(\frac{u_m}{3}\right)\left(\frac{u_m}{613}\right) = \left(\frac{u_m}{613}\right)$$

只要完全按照引理 5 证明过程中的方式取 m，可得

$$\left(\frac{4y_n+5}{u_m}\right)=-1$$

从而 $4y_n+5$ 不为平方数，假设不成立.

当 $n=-3$ 时，$4y_n+5=43^2$，证毕.

2　关于 $(2y+3)^2=4\overline{y}_n+5$ 的证明

引理 7　仅当 $n=0$ 时，$4\overline{y}_n+5$ 是平方数.

证　要使 $4\overline{y}_n+5\geqslant 0$ 成立，即 $y_n\leqslant 1$，当且仅当 $n=0$ 时成立，此时 $4\overline{y}_n+5=1$. 证毕.

3　结　论

根据前面的讨论，现给出本文的主要结论.

定理　不定方程 $5x(x+1)(x+2)(x+3)=6y(y+1)(y+2)(y+3)$ 仅有一组正整数解 $(x,y)=(21,20)$.

证　由引理 7 知

$$(2y+3)^2=4\overline{y}_0+5=1$$

因此 $y=-1,-2$；

由引理 3 知

$$(2y+3)^2=4y_0+5=9$$

因此 $y=0,-3$；

由引理 4 知

$$(2y+3)^2=4y_{-1}+5=9$$

因此 $y=0,-3$；

由引理 5 知

$$(2y+3)^2=4y_2+5=43^2$$

因此 $y=20,-23$；

由引理 6 知

$$(2y+3)^2=4y_{-3}+5=43^2$$

因此 $y=20,-23$.

由此，容易知道方程(1)共有 20 组整数解，其中有 16 组平凡解使得(1)式两端都为零，即 $(0,-1)$，$(-3,-1)$，$(-2,-1)$，$(-1,-1)$，$(0,-2)$，$(-3,-2)$，$(-2,-2)$，$(-1,-2)$，$(0,0)$，$(-3,0)$，$(-2,0)$，$(-1,0)$，$(0,-3)$，$(-3,-3)$，$(-2,-3)$，$(-1,-3)$；另外 4 组非平凡解，它们是 $(-24,20)$，$(21,20)$，$(-24,-23)$，$(21,-23)$. 因此，不定方程 $5x(x+1)(x+2)(x+3)=6y(y+1)(y+2)(y+3)$ 仅有正整数解 $(x,y)=(21,20)$. 证毕.

参考文献：

[1]　COHN J H E. The Diophantine Equations $Y(Y+1)(Y+2)(Y+3)=2X(X+1)(X+2)(X+3)$ [J]. Pacific J Math, 1971, 37(2): 331－335.

[2]　PONNUDURAI T. The Diophantine Equation $Y(Y+1)(Y+2)(Y+3)=3X(X+1)(X+2)(X+3)$ [J]. J London Math soc, 1975, 10(2): 232－240.

[3]　宣体佐. 关于不定方程 $Y(Y+1)(Y+2)(Y+3)=5X(X+1)(X+2)(X+3)$ [J]. 北京师范大学学报(自然科学版), 1982(3): 27－34.

[4] 罗 明. 关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=7y(y+1)(y+2)(y+3)$[J]. 重庆师范学院学报(自然科学版), 1991, 8(1): 1-8.

[5] 程 瑶, 马玉林. 关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=11y(y+1)(y+2)(y+3)$[J]. 重庆师范学院学报(自然科学版), 2007, 24(3): 27-30.

[6] 段辉明, 杨春德. 关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=19y(y+1)(y+2)(y+3)$[J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2009, 32(1): 60-63.

[7] 罗 明, 朱德辉, 马芙蓉. 关于不定方程 $3x(x+1)(x+2)(x+3)=5y(y+1)(y+2)(y+3)$[J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2009, 34(5): 16-21.

[8] 瞿云云, 曹 慧, 罗永贵, 龙伟峰. 关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=15y(y+1)(y+2)(y+3)$[J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2012, 37(6): 9-14.

[9] 苟莎莎. 关于不定方程 $3x(x+1)(x+2)(x+3)=7y(y+1)(y+2)(y+3)$[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版), 2015, 32(9): 48-52.

[10] 柯 召, 孙 琦. 谈谈不定方程[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 1980, 26-27.

On the Diophantine Equation $5x(x+1)(x+2)(x+3)=6y(y+1)(y+2)(y+3)$

LI Yi-meng, LUO Ming

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: In this paper, with the primary methods of recurrence sequences and quadratic remainders, the authors show that the diophantine equation $5x(x+1)(x+2)(x+3)=6y(y+1)(y+2)(y+3)$ has a unique positive integer $(x, y)=(21, 20)$.

Key words: diophantine equation; integer solution; recurrence sequence; quadratic remainder

责任编辑 包 颖
崔玉洁