第 39 卷第 8 期 西 南 大 学 学 报 (自然科学版) 2017 年 8 月
Vol. 39 No. 8 Journal of Southwest University (Natural Science Edition) Aug. 2017

DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2017.08.014

可以表示成 3 个或 4 个交换子群并的群①

郭红如， 吕 恒

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：主要证明了一个群如果可以表示为 3 个或 4 个交换子群的并，则下列结论成立：① 群 G 可以表示成 3 个交换子群的并当且仅当 $G/Z(G) \cong Z_2 \times Z_2$；② 群 G 可以表示成 4 个交换子群的并当且仅当 $G/Z(G) \cong S_3$ 或 $G/Z(G) \cong Z_3 \times Z_3$.

关 键 词：交换子群；非交换集；幂零群

中图分类号：O152.1 **文献标志码**：A **文章编号**：1673－9868(2017)08－0097－04

一个群能表示成若干个交换子群的并和一个群可以表示成若干个真子群的并是有区别的，例如 D_{12} 能表示成3个真子群的并，但表示成交换子群的并时最少是4个. 文献[1－2]分别给出了有限群 G 表示为 3 个或 4 个真子群的并时，G 分别同态于 K_4 和同态于 S_3 或 $Z_3 \times Z_3$. 文献[3] 给出了当 G 是 n 阶有限群时，存在一个整数 $K \leqslant n/2+1$，使得 G 可以表示为 K 个交换子群的并；文献[4] 介绍并研究了能覆盖一般线性群 $GL_n(q)$ 的交换子群族，证明了这个交换子群族包含了所有的循环矩阵(特征多项式等于极小多项式的矩阵) 的中心化子，并且当 $q > n$ 时两者相等. 在研究有限群的真子群的覆盖问题上延伸出来的非交换群在什么条件下可以表示为交换子群的并的问题成为一个有趣的问题. 主要证明了一个有限非交换群 G 可以表示为 3 个交换子群的并的充分必要条件是 $G/Z(G) \cong Z_2 \times Z_2$；有限非交换群 G 可以表示为 4 个交换子群的充分必要条件是 $G/Z(G) \cong S_3$ 或 $G/Z(G) \cong Z_3 \times Z_3$.

在后面的叙述中，我们总假定群 G 非交换且能最少表示为 n 个不同的交换子群的并，并且这 n 个不同的交换子群总可以是 G 的极大的交换子群. 本文所用到的群论知识请参考文献[5].

1 主要结论及证明

下面给出本文的主要结论及证明.

引理 1 有限 p-群 P 不能表示为小于或者等于 p 个交换真子群的并.

证 显然 P 不能是循环群. 因此 $P/\Phi(P) \cong C_p \times C_p \times \cdots C_p$，其中 $\Phi(P)$ 是 P 的 Frattini 子群，C_p 是 p 阶循环子群. 易得 $P/\Phi(P)$ 的极大子群个数一定是大于或者等于 $p+1$. 又 P 的所有极大子群包含 $\Phi(P)$，从而可得 P 的极大子群个数一定是大于或者等于 $p+1$. 而对于 P 的任意交换子群 A，A 一定包含在 P 的一个极大子群内，故 G 不能表示为 p 个交换子群的并.

引理 2 设群 G 是其非交换子群 G_1 与非交换子群 G_2 的直积. 若 G_1 与 G_2 分别可以表示成 m 和 n 个交换子群的并，则 G 可以表示成至少 mn 个交换子群的并.

---

① 收稿日期：2016－10－27

基金项目：国家自然科学基金项目(11471266，11271301)；中央高校基本业务费专项资金资助(XDJK2015B033).

作者简介：郭红如(1991－)，女，山东临沂人，硕士，主要从事群论研究.

通信作者：吕 恒，教授.

证　设 $G_1 = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m$，$G_2 = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n$. 对任意的 $g \in G_1 \times G_2$，$g = g_1 g_2$，其中 $g_1 \in G_1$，$g_2 \in G_2$. 因此存在 i, j 使得

$$g_1 \in A_i \qquad g_2 \in B_j \qquad 1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n$$

于是 $g \in A_i B_j$. 显然 $A_i B_j$ 是交换群. 故 $G = \bigcup\limits_{i,j} A_i B_j$ 可以表示成 mn 个交换子群的并.

下面先证明

$$G \neq \bigcup_{i,j \neq 1} A_i B_j$$

令

$$K = \bigcup_{i,j \neq 1} A_i B_j$$

分别取

$$a_1 \in G_1 - \bigcup_{i \neq 1} A_i \qquad b_1 \in G_2 - \bigcup_{j \neq 1} B_j$$

即 $a_1 b_1 \in A_1 B_1$. 若 $a_1 b_1 \in K$，即存在 i, j 不同时为 1 使得

$$a_1 b_1 \in A_i B_j$$

于是存在 $a_i \in A_i$，$b_j \in B_j$ 使得

$$a_1 b_1 = a_i b_j$$

从而可得

$$a_1 a_i^{-1} = b_j b_1^{-1} = 1$$

即

$$a_1 = a_i \in A_i \qquad b_1 = b_j \in B_j$$

这与 $a_1 \in G_1 - \bigcup\limits_{i \neq 1} A_i$，$b_1 \in G_2 - \bigcup\limits_{j \neq 1} B_j$ 的选取矛盾. 因此 $K \neq G$.

若 $G = H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_k$，其中 H_i 是 G 的极大交换子群，$1 \leqslant i \leqslant k$. 下证 $k \geqslant mn$. 易得 $A_i = G_1 \cap H_i$，$B_i = G_2 \cap H_i$ 是 G_1 和 G_2 的极大交换子群. 令集合

$$A = \{G_1 \cap H_i \mid 1 \leqslant i \leqslant k\} \qquad B = \{G_2 \cap H_i \mid 1 \leqslant i \leqslant k\}$$

则可得

$$G_1 = \bigcup_{A_i \in A} A_i \qquad G_2 = \bigcup_{B_i \in B} B_i$$

由题设可得 $|A| \geqslant m$，$|B| \geqslant n$. 由前两段的证明可得 G 可以表示成 $|A||B| \geqslant mn$ 个交换子群的并，故 $k \geqslant mn$. 由此表明结论成立.

引理3　有限非交换 p-群 G 恰能表示为 $p+1$ 个交换真子群的并当且仅当 $G/Z(G) \cong C_p \times C_p$. 其中 C_p 是 p 阶循环子群.

证　充分性　若 $G/Z(G) \cong C_p \times C_p$，则易得 $G/Z(G)$ 可以表示成 $p+1$ 个循环子群的并，故 G 可以表示成 $p+1$ 个交换子群的并.

必要性　设 $G = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{p+1}$. A_i 是交换子群，$1 \leqslant i \leqslant p+1$. 若存在两个 A_i 不是极大子群，不妨设 A_i，A_2 不是极大子群，则

$$|G : A_i| \geqslant p^2 \qquad i = 1, 2$$

即

$$|A_i| \leqslant |G| / p^2 \qquad i = 1, 2$$

因此存在 $j \geqslant 2$ 使得

$$|A_j| > (|G| - |A_1| - |A_2|)/(p-1) \geqslant (1 - 2/p^2)(1/(p-1))\,|G| \geqslant (1/p)\,|G|$$

即 $A_i = G$，矛盾. 故 $A_1, \cdots, A_{p+1}$ 中至多一个子群不是极大子群. 现令 A_2, A_3 是两个互不相同的极大子群，则 $G = A_2 A_3$ 且 $|G : A_2 \cap A_3| = p^2$. 显然 $Z(G) = A_2 \cap A_3$ 且 $G/Z(G) \cong C_p \times C_p$.

定理1　群 G 可以表示为 3 个交换子群的并的充分必要条件为 $G/Z(G) \cong Z_2 \times Z_2$.

证　充分性　由于 $Z_2 \times Z_2$ 仅有 3 个循环子群，因此易得 G 可以表示成 3 个交换子群的并.

必要性　易得 G 存在极大交换子群 H 使得 $|G:H|<3$. 因此 $|G:H|=2$，则 $H \trianglelefteq G$. 任意取 $x \in G-H$，$y \in H$，若$[x, y^i] \neq 1$，$1 \leqslant i \leqslant m$，则易得 x，xy，xy^2，…，xy^m，y 两两互不交换，因此在互不相同的交换子群里面，即可得 $m=1$. 由于 G 不幂零，即 H 中只有 Sylow2 -子群存在元与 x 不交换. 因此 G 幂零且只有 Sylow2 -子群非交换. 于是 G 的 Sylow2 -子群可以表示为 3 个交换子群的并，由引理 3 知结论成立.

定理 2　若群 G 可以表示为 4 个交换子群的并的充分必要条件为 $G/Z(G) \cong S_3$ 或 $G/Z(G) \cong Z_3 \times Z_3$.

证　首先证明 G 可解. 假设 $G=H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup H_4$，其中 $H_i(1 \leqslant i \leqslant 4)$ 是群 G 的极大交换子群. 由于 $1 \in \bigcap H_i(i=1,2,\cdots,4)$，因此一定存在某个 H_i 使得 $|G:H_i|<4$(取阶最大的 H_i).

若 $|G:H_i|=2$，则 G 可解；若 $|G:H_i|=3$，则 $|G:(H_i)_G| \mid 6$，其中$(H_i)_G$ 为 H_i 在 G 中的核. 此时 $G/(H_i)_G$ 可解，故 G 可解.

充分性　要证明 $G/Z(G) \cong S_3$ 或 $G/Z(G) \cong Z_3 \times Z_3$，易得 $G/Z(G)$ 都可以表示成 4 个循环子群的并，故 G 可以表示成 4 个交换子群的并.

必要性　要证明 $G/Z(G) \cong S_3$ 或 $G/Z(G) \cong Z_3 \times Z_3$，首先证明 $q>3$ 时，G 的 Sylow$q$ -子群 $\boldsymbol{Q} \leqslant Z(G)$.

显然 Q 包含在一个正规的交换子群中，因此 Q 是 G 的正规子群. 仅需考虑对任意 $x \in G$，其中 $|x|=2^\alpha$ 或 $3^\beta(\alpha, \beta \geqslant 0)$. 考虑半直积 $H=\langle x \rangle \ltimes \boldsymbol{Q}$. 则$\langle x \rangle$ 是 H 的 Sylow2 -子群或 Sylow3 -子群. 若对任意 $y \in \boldsymbol{Q}$ 有$[x, x^y]=1$，由于$\langle x \rangle=\langle x^y \rangle$ 都是 H 的 Sylow -子群，因此$\langle x \rangle \trianglelefteq H$，于是可得$[\langle x \rangle, Q]=1$，即 $\boldsymbol{Q} \leqslant Z(G)$.

若存在 $y \in \boldsymbol{Q}$，使得$[x, y] \neq 1$，则集合

$$X=\left\{x, x^y, x^{y^2}, \cdots, x^{y^{q-1}}, (q>3)\right\}$$

中的元一定不是两两交换的. 否则设

$$[x^{y^i}, x^{y^j}]=1 \qquad 1 \leqslant i, j \leqslant q-1$$

于是

$$[x, x^{y^{j-i}}]=1$$

从而可得

$$\langle x \rangle=\langle x^{y^{j-i}} \rangle$$

即子群$\langle x \rangle \trianglelefteq \langle x, y^{j-i} \rangle$. 由此可得$[x, y^{j-i}]=1$，而$(j-i, q)=1$，同理可得$[x, y]=1$，矛盾. 因此集合 X 中任意两个元不能交换，即不能同时在一个交换子群里面. 又 $q \geqslant 5$，这与题设 G 可以表示为 4 个交换子群相矛盾.

所以当 G 幂零时，由引理 2 可得只有 G 的 Sylow3 -子群不是交换群，从而 G 的 Sylow3 -子群 P_3 可以表示成 4 个交换子群的并，进一步由引理 3 知

$$P_3/Z(P_3) \cong Z_3 \times Z_3$$

从而得到

$$G/Z(G) \cong Z_3 \times Z_3$$

G 不幂零时，前面证明存在极大交换子群 H 使得 $[G:H] \leqslant 3$. 若 $|G:H|=2$，则 $H \trianglelefteq G$. 类似定理 1 的证明，任意取 $x \in G-H$，$y \in H$，若$[x, y^i] \neq 1$，$1 \leqslant i \leqslant m$，则易得 x，xy，xy^2，…，xy^m，y 两两互不交换，因此在互不相同的交换子群里面，即可得 $m \leqslant 2$. 由于 G 不幂零，即 H 中只有 Sylow3 -子群存在元与 x 不交换. 又由文献[5] 的定理 2.7 知

$$H=C_H(\langle x \rangle) \times [H, \langle x \rangle]$$

其中$[H, \langle x \rangle]$包含在 H 的 Sylow3 -子群中且$[H, \langle x \rangle]$所有元与 x 不交换. 于是$[H, \langle x \rangle]$是 3 阶循环群，故 $Z(G)=C_H(\langle x \rangle)$ 且 $G/Z(G) \cong S_3$.

若 $|G:H|=3$ 且 $H \trianglelefteq G$，类似可得 H 中只有 Sylow2-子群存在元与 x 不交换且

$$H=C_H(\langle x\rangle)\times[H,\langle x\rangle]$$

其中 $[H,\langle x\rangle]$ 包含在 H 的 Sylow2-子群中，$[H,\langle x\rangle]$ 所有元与 x 不交换. 若 $|[H,\langle x\rangle]|\geqslant 4$，取互不相同非单位元 $y_1, y_2, y_3\in[H,\langle x\rangle]$，则易得 $x, xy_1, xy_2, xy_3, x^2y_1$ 是两两互不交换，矛盾. 故 $|[H,\langle x\rangle]|<4$，此时可得 $G/Z(G)$ 是6阶交换群，与 G 非幂零矛盾.

若 $|G:H|=3$ 且 H 不是 G 的正规子群，则 $H_G\leqslant Z(G)$ 且 $|G:H_G|=6$，由 G 非幂零，此时可得 $G/H_G\cong S_3$.

参考文献：

[1] 宋科研，陈贵云. 再论能表示为三个交换子群的并的群 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2009，31(4)：6－7.

[2] 宋科研，晏燕雄. 论能表为四个真子群的并的群 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2011，33(2)：6－7.

[3] MASON D R. On Covering of A Finite Group by Abelian Subgroups [J]. Math Proc Camb Phil Soc，1978，83(2)：205－209.

[4] AZAD A，IRANMANESH M A，PRAEGER C E. Abelian Coverings of Finite General Linear Groups and An Application to Their Non-Commuting Graphs [J]. J Algebraic Combin，2011，34：683－710.

[5] 徐明耀. 有限群论导引 [M]. 北京：科学出版社，2001.

On Groups Which Are the Unions of Three or Four Abelian Subgroups

GUO Hong-ru，　LÜ　Heng

School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：This paper investigates the groups which are the unions of three or four abelian subgroups and obtains the following results：(1) Group G is the union of three abelian subgroups if and only if $G/Z(G)\cong Z_2\times Z_2$；(2) Group G is the union of four abelian subgroups if and only if $G/Z(G)\cong S_3$ or $G/Z(G)\cong Z_3\times Z_3$.

Key words：abelian subgroup；non-commuting set；nilpotent group

责任编辑　胡　杨