DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2017.08.015

一类锥约束变分不等式问题的间隙函数和误差界①

董 文[1]， 欧小庆[2]， 李金富[1]， 陈加伟[1]

1. 西南大学 数学与统计学院，重庆 400715；2. 重庆人文科技学院 管理学院，重庆 401524

摘要：鉴于间隙函数与误差界在优化方法中有重要的作用，特别地，误差界能刻画可行点和变分不等式解集之间的有效估计距离. 利用像空间分析法，构造了带锥约束变分不等式的间隙函数. 然后，利用此间隙函数，得到了带锥约束变分不等式的误差界.

关 键 词：约束变分不等式；像空间分析；间隙函数；误差界

中图分类号：O151.25 **文献标志码**：A **文章编号**：1673-9868(2017)08-0101-07

众所周知，变分不等式在优化理论和方法、经济管理与交通等方面都有着广泛的应用[1-3]. 间隙函数的概念首次被引入用于凸优化问题的研究，随后才应用于变分不等式. 一方面，由于间隙函数将变分不等式问题转换为等价的优化问题，故可用优化求解法和算法来求得变分不等式的解. 另一方面，间隙函数在设计新的全局收敛算法和分析一些迭代方法的收敛速率以及导出误差界等方面非常有用[4-5].

本文主要研究带锥约束的变分不等式，旨在利用像空间分析得到间隙函数. 像空间分析法是一个非常有力的工具，用于研究各种类型的问题，它把各类问题等价地表示成一个参数系统的不可行性以及约束优化像空间中两个集合的分离性，近年来，像空间分析法受到相当大的关注[6-9].

本文由三部分组成. 第一部分简要回顾了一些准备知识，并分析了像空间分析的一般特征；第二部分利用像空间分析，给出了带锥约束变分不等式的两个间隙函数；第三部分利用两个间隙函数，得到了在逆强伪单调假设条件下带锥约束变分不等式的解集的误差界.

1 预备知识

首先回顾一些符号和定义，集合 $M \subseteq \mathbb{R}^n$ 的内部和边界分别表示为 $\mathrm{int}M$ 和 ∂M. 设 $K \subset \mathbb{R}^n$ 为内部非空的闭凸点锥.

给定函数 $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. 本文考虑如下带锥约束的变分不等式：找到 $x^* \in \mathbb{R}^n$，使得

$$f(x^*) \in \Omega \qquad (y - f(x^*))^{\mathrm{T}} x^* \geqslant 0 \qquad \forall\, y \in \Omega \tag{1}$$

其中 $\Omega = \{y \in \mathbb{R}^n : g(y) \in D\}$，$g: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 为向量值映射，$D \subseteq \mathbb{R}^m$ 为内部非空的闭凸点锥.

接下来，我们给出变分不等式(1)像的主要特点. 给定 $x^* \in \mathbb{R}^n$，定义映射

$$A_{x^*}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{1+2m} \qquad A_{x^*}(y) = ((f(x^*) - y)^{\mathrm{T}} x^*,\ g(y),\ g(f(x^*)))$$

考虑集合

① 收稿日期：2016-11-07

基金项目：重庆市基础与前沿研究项目(cstc2016jcyjA0239)；中央高校基本科研业务费专项(XDJK2014C073).

作者简介：董 文(1995-)，女，重庆人，硕士研究生，主要从事最优化理论、算法及应用方面的研究.

通信作者：陈加伟，副教授.

$$\mathscr{K}(x^*)=\{(u,v,\tau)\in\mathbb{R}^{1+2m}:(u,v,\tau)=A_{x^*}(y),\ y\in\mathbb{R}^n\}$$

$$\mathscr{H}=\{(u,v,\tau)\in\mathbb{R}^{1+2m}:u>0,(v,\tau)\in D\times D\}$$

其中 $\mathscr{K}(x^*)$ 称为变分不等式(1) 的像，$\mathbb{R}^{1+2m}$ 称为像空间. 显然，$x^*\in\mathbb{R}^n$ 是变分不等式(1) 的解，当且仅当广义系统

$$A_{x^*}\in\mathscr{H}\qquad y\in\mathbb{R}^n\tag{2}$$

是不可行的，或等价于

$$\mathscr{K}(x^*)\cap\mathscr{H}=\emptyset$$

对于定义在集合 $X\subseteq\mathbb{R}^n$ 和 $\alpha\in\mathbb{R}$ 的函数 h，集合

$$\mathrm{lev}_{\geqslant\alpha}h=\{x\in X:h(x)\geqslant\alpha\}\qquad \mathrm{lev}_{>\alpha}h=\{x\in X:h(x)>\alpha\}$$

分别称为函数 h 的非负水平集和正水平集.

定义 1 给定 $e\in-\mathrm{int}K$，定义 Gerstewitz 函数 $\xi_{e,K}:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ 为：

$$\xi_{e,K}(y)=\min\{r\in\mathbb{R}:y\in re+K\}\qquad y\in\mathbb{R}^n$$

命题 1[11-12] 对任意给定的 $e\in-\mathrm{int}K$，$y\in\mathbb{R}^n$ 和 $r\in\mathbb{R}$，有下面的结论成立：

(ⅰ) $\xi_{e,K}(y)<r\Leftrightarrow y\in re+\mathrm{int}K$；

(ⅱ) $\xi_{e,K}(y)\leqslant r\Leftrightarrow y\in re+K$；

(ⅲ) $\xi_{e,K}(y)=r\Leftrightarrow y\in re+\partial K$；

(ⅳ) Gerstewitz 函数 $\xi_{e,K}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上是下降的，即

$$x-y\in K\Rightarrow\xi_{e,K}(x)\leqslant\xi_{e,K}(y)\qquad\forall x,y\in\mathbb{R}^n$$

2 间隙函数

本节构造了变分不等式(1) 的两个间隙函数. 首先回顾一下变分不等式的间隙函数的基本定义.

定义 2 称函数 $P:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ 为变分不等式(1) 的间隙函数，若

(ⅰ) $P(x)\geqslant 0$，$\forall x\in\mathbb{R}^n$；

(ⅱ) $P(x^*)=0$ 当且仅当 $x^*\in S$.

设 $\bar\theta>0$. 考虑函数

$$P_1(x)=\sup_{(u,v,\tau)\in\mathscr{K}(x)}\ \inf_{\lambda,\beta\in\mathbb{R}_+}[\bar\theta u-\lambda\xi_{e,D}(v)-\beta\xi_{e,D}(\tau)]\qquad\forall x\in\mathbb{R}^n$$

$$P_2(x)=\sup_{(u,v,\tau)\in\mathscr{K}(x)}\ \inf_{\lambda,\beta\in\mathbb{R}_+}[\bar\theta u+\sup_{z\in\{v\}-D}(-\lambda\xi_{e,D}(z)-r(z))+\sup_{t\in\{\tau\}-D}(-\beta\xi_{e,D}(t)-r\sigma(t))]\qquad\forall x\in\mathbb{R}^n$$

其中 $e\in-\mathrm{int}D$，r 为正实数，扩张函数 $\sigma:\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}$ 上半连续且

$$\arg\min_{z\in\mathbb{R}^m}\sigma(z)=\{0_{\mathbb{R}^m}\}\qquad\sigma(0_{\mathbb{R}^m})=0$$

引理 1 设 $\bar\theta>0$，且

$$\omega(u,v,\tau;\bar\theta,\lambda,\beta)=\bar\theta u+\sup_{z\in\{v\}-D}(-\lambda\xi_{e,D}(z)-r\sigma(z))+\sup_{t\in\{\tau\}-D}(-\beta\xi_{e,D}(t)-r\sigma(t))\qquad\lambda,\beta\in\mathbb{R}_+$$

则

$$\mathscr{H}=\bigcap_{\lambda,\beta\in\mathbb{R}_+}\mathrm{lev}_{>0}\omega(\cdot;\bar\theta,\lambda,\beta)=\mathrm{lev}_{>0}\inf_{\lambda,\beta\in\mathbb{R}_+}\omega(\cdot;\bar\theta,\lambda,\beta)\tag{3}$$

证 为了得到式(3)，只需证

$$\mathscr{H}=\bigcap_{\lambda,\beta\in\mathbb{R}_+}\mathrm{lev}_{>0}\omega(\cdot;\bar\theta,\lambda,\beta)\supseteq\mathrm{lev}_{>0}\inf_{\lambda,\beta\in\mathbb{R}_+}\omega(\cdot;\bar\theta,\lambda,\beta)\supseteq\mathscr{H}\tag{4}$$

首先证式(4) 中的等号成立. 对任意 $\lambda,\beta\in\mathbb{R}_+$，$(u,v,\tau)\in\mathscr{H}$，均有 $\bar\theta u>0$. 又由命题 1(ⅱ)，$0_{\mathbb{R}_m}\in(\{v\}-D)\cap(\{\tau\}-D)$ 和 $\sigma(0_{\mathbb{R}_m})=0$ 知

$$\omega(u,v,\tau;\bar\theta,\lambda,\beta)=\bar\theta u+\sup_{z\in\{v\}-D}(-\lambda\xi_{e,D}(z)-r\sigma(z))+\sup_{t\in\{\tau\}-D}(-\beta\xi_{e,D}(t)-r\sigma(t))>0$$

这意味着

$$\bigcap_{\lambda,\beta\in\mathbb{R}_+}\mathrm{lev}_{>0}\,\omega(\cdot;\bar{\theta},\lambda,\beta)\supseteq\mathscr{H}\tag{5}$$

下证

$$\bigcap_{\lambda,\beta\in\mathbb{R}_+}\mathrm{lev}_{>0}\,\omega(\cdot;\bar{\theta},\lambda,\beta)\subseteq\mathscr{H}\tag{6}$$

为此，只需证当$(u,v,\tau)\notin\mathscr{H}$时，存在$\lambda,\beta\in\mathbb{R}_+$，使得$\omega(u,v,\tau;\bar{\theta},\lambda,\beta)\leqslant 0$即可. 设$(u,v,\tau)\notin\mathscr{H}$，下面分 3 种情形来讨论：

情形 1　若$u\leqslant 0$，$(v,\tau)\in D\times D$，则不妨设$\lambda,\beta=0$. 由于$\arg\min\limits_{z\in\mathbb{R}^m}\sigma(z)=\{0_{\mathbb{R}^m}\}$，$\sigma(0_{\mathbb{R}^m})=0$，因此$\sigma(z)\geqslant 0$对所有$z\in\mathbb{R}^m$均成立. 再由$0_{\mathbb{R}_m}\in(\{v\}-D)\cap(\{\tau\}-D)$和$\sigma(0_{\mathbb{R}^m})=0$知

$$\sup_{z\in\{v\}-D}(-r\sigma(z))=0\qquad\sup_{t\in\{\tau\}-D}(-r\sigma(t))=0$$

故有$\omega(u,v,\tau;\bar{\theta},\lambda,\beta)=\bar{\theta}u\leqslant 0$.

情形 2　若$u>0$，$v\notin D$，$\tau\in D$，则不妨设$\lambda=\dfrac{\bar{\theta}u}{\xi_{e,D}(v)}$，$\beta=0$，由命题 1(ⅱ)知$\lambda,\beta\in\mathbb{R}_+$. 再由$\xi_{e,D}(\cdot)$在$\mathbb{R}^m$上是下降的且对所有$z\in\mathbb{R}^m$，$\sigma(z)\geqslant 0$. 从而有

$$\omega(u,v,\tau;\bar{\theta},\lambda,\beta)\leqslant\bar{\theta}u+\sup_{z\in\{v\}-D}(-\lambda\xi_{e,D}(z))\leqslant\bar{\theta}u-\lambda\xi_{e,D}(v)=0$$

情形 3　若$u>0$，$v\in D$，$\tau\notin D$，则不妨设$\lambda=0$，$\beta=\dfrac{\bar{\theta}u}{\xi_{e,D}(\tau)}$，由命题 1(ⅱ)知$\lambda,\beta\in\mathbb{R}_+$. 再由$\xi_{e,D}(\cdot)$在$\mathbb{R}^m$上是下降的且对所有$z\in\mathbb{R}^m$，$\sigma(z)\geqslant 0$. 故有

$$\omega(u,v,\tau;\bar{\theta},\lambda,\beta)\leqslant\bar{\theta}u-\beta\,\xi_{e,D}(\tau)=0$$

由式(5)和式(6)可得式(4)中的等号成立.

接下来，我们证式(4)的第一个包含关系. 任取$(u,v,\tau)\in\mathrm{lev}_{>0}\inf\limits_{\lambda,\beta\in\mathbb{R}_+}\omega(\cdot;\bar{\theta},\lambda,\beta)$，均有

$$\inf_{\lambda,\beta\in\mathbb{R}_+}\omega(u,v,\tau;\bar{\theta},\lambda,\beta)>0$$

故

$$\omega(u,v,\tau;\bar{\theta},\lambda,\beta)>0\qquad\forall\lambda,\beta\in\mathbb{R}_+$$

从而

$$(u,v,\tau)\in\bigcap_{\lambda,\beta\in\mathbb{R}_+}\mathrm{lev}_{>0}\,\omega(\cdot;\bar{\theta},\lambda,\beta)$$

这意味着

$$\bigcap_{\lambda,\beta\in\mathbb{R}_+}\mathrm{lev}_{>0}\,\omega(\cdot;\bar{\theta},\lambda,\beta)\supseteq\mathrm{lev}_{>0}\inf_{\lambda,\beta\in\mathbb{R}_+}\omega(\cdot;\bar{\theta},\lambda,\beta)$$

下证式(4)的第二个包含关系. 任取$(u,v,\tau)\in\mathscr{H}$，由命题 1(ⅱ)和$0_{\mathbb{R}^m}\in(\{v\}-D)\cap(\{\tau\}-D)$知

$$\inf_{\lambda,\beta\in\mathbb{R}_+}\omega(u,v,\tau;\bar{\theta},\lambda,\beta)\geqslant\inf_{\lambda,\beta\in\mathbb{R}_+}[\bar{\theta}u-(\lambda+\beta)\xi_{e,D}(0_{\mathbb{R}^m})-2r\sigma(0_{\mathbb{R}^m})]=\bar{\theta}u>0$$

于是有

$$\mathrm{lev}_{>0}\inf_{\lambda,\beta\in\mathbb{R}_+}\omega(\cdot;\bar{\theta},\lambda,\beta)\supseteq\mathscr{H}$$

因此，式(4)成立.

注 1　若函数$\bar{\omega}(u,v,\tau;\bar{\theta},\lambda,\beta)=\bar{\theta}u-\lambda\xi_{e,D}(v)-\beta\,\xi_{e,D}(\tau)$ $(\lambda,\beta\in\mathbb{R}_+)$，那么等式(3)也成立.

定理 2.1　函数$P_i(x)(i=1,2)$是变分不等式(1)的间隙函数.

证　只需证$P_2(x)$是变分不等式(1)的间隙函数，$P_1(x)$的证明类似. 任取$x\in\mathbb{R}^n$，下面分为两种情形来讨论：

情形 1　设$x\in S$，则有$\mathscr{K}(x)\cap\mathscr{H}=\varnothing$. 又由式(3)知

$$\mathscr{H}=\mathrm{lev}_{>0}\inf_{\lambda,\beta\in\mathbb{R}_+}[\bar{\theta}(\cdot)+\sup_{z\in\{\cdot\}-D}(-\lambda\xi_{e,D}(z)-r\sigma(z))+\sup_{t\in\{\cdot\}-D}(-\beta\,\xi_{e,D}(t)-r\sigma(t))]$$

于是，

$$\mathcal{K}(x) \cap \mathrm{lev}_{>0} \inf_{\lambda,\beta \in \mathbb{R}_+} [\bar{\theta}(\cdot) + \sup_{z \in \{\cdot\}-D} (-\lambda \xi_{e,D}(z) - r\sigma(z)) + \sup_{t \in \{\cdot\}-D} (-\beta \xi_{e,D}(t) - r\sigma(t))] = \varnothing$$

即

$$\inf_{\lambda,\beta \in \mathbb{R}_+} [\bar{\theta} u + \sup_{z \in \{v\}-D} (-\lambda \xi_{e,D}(z) - r\sigma(z)) + \sup_{t \in \{\tau\}-D} (-\beta \xi_{e,D}(t) - r\sigma(t))] \leqslant 0 \qquad \forall (u, v, \tau) \in \mathcal{K}(x)$$

因此

$$P_2(x) = \sup_{(u,v,\tau) \in \mathcal{K}(x)} \inf_{\lambda,\beta \in \mathbb{R}_+} [\bar{\theta} u + \sup_{z \in \{v\}-D} (-\lambda \xi_{e,D}(z) - r\sigma(z)) + \sup_{t \in \{\tau\}-D} (-\beta \xi_{e,D}(t) - r\sigma(t))] \leqslant 0 \tag{7}$$

另一方面，由 $0_{\mathbb{R}^m} \in g(f(x)) - D$ 知

$$\begin{aligned} P_2(x) = & \sup_{(u,v,\tau) \in \mathcal{K}(x)} \inf_{\lambda,\beta \in \mathbb{R}_+} [\bar{\theta} u + \sup_{z \in \{v\}-D} (-\lambda \xi_{e,D}(z) - r\sigma(z)) + \sup_{t \in \{\tau\}-D} (-\beta \xi_{e,D}(t) - r\sigma(t))] = \\ & \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \inf_{\lambda,\beta \in \mathbb{R}_+} [\bar{\theta}((f(x) - y)^{\mathrm{T}} x) + \sup_{z \in g(y)-D} (-\lambda \xi_{e,D}(z) - r\sigma(z)) + \sup_{t \in g(f(x))-D} (-\beta \xi_{e,D}(t) - r\sigma(t))] \geqslant \\ & \inf_{\lambda,\beta \in \mathbb{R}_+} [\bar{\theta} \times 0 + \sup_{z \in g(f(x))-D} (-\lambda \xi_{e,D}(z) - r\sigma(z)) + \sup_{t \in g(f(x))-D} (-\beta \xi_{e,D}(t) - r\sigma(t))] \geqslant \\ & \inf_{\lambda,\beta \in \mathbb{R}_+} [-(\lambda + \beta) \xi_{e,D}(0_{\mathbb{R}^m}) - 2r\sigma(0_{\mathbb{R}^m})] = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

从而由(7)和(8)知，$P_2(x) = 0$.

反之，假设存在 $x \in \mathbb{R}^n$ 使得 $P_2(x) = 0$. 则有

$$\inf_{\lambda,\beta \in \mathbb{R}_+} [\bar{\theta} u + \sup_{z \in \{v\}-D} (-\lambda \xi_{e,D}(z) - r\sigma(z)) + \sup_{t \in \{\tau\}-D} (-\beta \xi_{e,D}(t) - r\sigma(t))] \leqslant 0 \qquad \forall (u, v, \tau) \in \mathcal{K}(x)$$

由(3)知

$$\mathcal{H} = \mathrm{lev}_{>0} \inf_{\lambda,\beta \in \mathbb{R}_+} [\bar{\theta}(\cdot) + \sup_{z \in \{\cdot\}-D} (-\lambda \xi_{e,D}(z) - r\sigma(z)) + \sup_{t \in \{\cdot\}-D} (-\beta \xi_{e,D}(t) - r\sigma(t))]$$

即

$$\inf_{\lambda,\beta \in \mathbb{R}_+} [\bar{\theta} u + \sup_{z \in \{v\}-D} (-\lambda \xi_{e,D}(z) - r\sigma(z)) + \sup_{t \in \{\tau\}-D} (-\beta \xi_{e,D}(t) - r\sigma(t))] > 0$$

对任意$(u, v, \tau) \in \mathcal{H}$. 因此，$\mathcal{K}(x) \cap \mathcal{H} = \varnothing$ 成立，即 $x \in S$.

情形 2　若 $x \in \mathbb{R}^n \backslash S$，即 $x \notin S$，那么系统(2)可行. 于是，存在 $y^* \in \mathbb{R}^n$ 使得$((f(x) - y^*)^{\mathrm{T}} x$, $g(y^*)$, $g(f(x))) \in \mathcal{H}$. 由(3)式中的等式知

$$\bigcap_{\lambda,\beta \in \mathbb{R}_+} \mathrm{lev}_{>0} [\bar{\theta}(\cdot) + \sup_{z \in \{\cdot\}-D} (-\lambda \xi_{e,D}(z) - r\sigma(z)) + \sup_{t \in \{\cdot\}-D} (-\beta \xi_{e,D}(t) - r\sigma(t))] = \mathcal{H}$$

于是对 $\forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}_+$，有

$$\bar{\theta}((f(x) - y^*)^{\mathrm{T}} x) + \sup_{z \in g(y^*)-D} (-\lambda \xi_{e,D}(z) - r\sigma(z)) + \sup_{t \in g(f(x))-D} (-\beta \xi_{e,D}(t) - r\sigma(t)) > 0$$

这意味着

$$\inf_{\lambda,\beta \in \mathbb{R}_+} [\bar{\theta}((f(x) - y^*)^{\mathrm{T}} x) + \sup_{z \in g(y^*)-D} (-\lambda \xi_{e,D}(z) - r\sigma(z)) + \sup_{t \in g(f(x))-D} (-\beta \xi_{e,D}(t) - r\sigma(t))] \geqslant 0$$

因此 $P_2(x) \geqslant 0$. 结合情形 1 和情形 2 可得 $P_2(x) \geqslant 0$ ($\forall x \in \mathbb{R}^n$).

下面的例子说明，定理 2.1 是可行的.

例 1　设 $\bar{\theta} > 0$，$D = \mathbb{R}^3_+$. 令

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & x < 0 \\ x & x \geqslant 0 \end{cases}$$

$$g(y) = (y - y^2, y - y^2, y^2 - y)^{\mathrm{T}}$$

则有 $\Omega = \{0, 1\}$. 通过计算得出

$$P_1(x) = P_2(x) = \begin{cases} -\bar{\theta} x^3 & x < 0 \\ \bar{\theta} x^2 & x \geqslant 0 \end{cases}$$

因此，由定理 2.1 知 $P_i(x)(i = 1, 2)$ 是变分不等式(1)的间隙函数.

3　误差界

本节利用上节得到的间隙函数，证明了在逆强伪单调假设条件下，变分不等式(1)的解集满足误差界. 设 $\Omega' = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \in \Omega\}$.

定义 3.1　设 $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 为一一映射. 称函数 f 是逆强伪单调的，若存在常数 $\mu > 0$ 使得

$$(f(x)-f(y))^{\mathrm{T}} y \geqslant 0 \Rightarrow (f(x)-f(y))^{\mathrm{T}} x \geqslant \mu \| f(x)-f(y) \|^2 \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

定义 3.2　称函数 $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 是扩张的，若

$$\| f(x)-f(y) \| \geqslant \| x-y \| \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

命题 3.1　设 $\bar{\theta} > 0$，则对任意 $x \in \mathbb{R}^n$，$P_2(x) \leqslant P_1(x)$.

证　由命题 1.1 可得

$$\sup_{z \in \{v\}-D} (-\lambda \xi_{e,D}(z)) = -\lambda \xi_{e,D}(v) \tag{9}$$

事实上，任取 $z \in \{v\}-D$，则有

$$\xi_{e,D}(v) \leqslant \xi_{e,D}(z)$$

即

$$-\lambda \xi_{e,D}(z) \leqslant -\lambda \xi_{e,D}(v)$$

于是，等式(9) 成立. 同理可得

$$\sup_{z \in \{\tau\}-D} (-\beta \xi_{e,D}(z)) = -\beta \xi_{e,D}(\tau)$$

另外，由 $\sigma(z) \geqslant 0$ ($\forall z \in \mathbb{R}^n$) 可得，对任意 $x \in \mathbb{R}^n$，有

$$\begin{aligned} P_2(x) = & \sup_{(u,v,\tau) \in \mathcal{K}(x)} \inf_{\lambda,\beta \in \mathbb{R}_+} [\bar{\theta} u + \sup_{z \in \{v\}-D} (-\lambda \xi_{e,D}(z) - r\sigma(z)) + \sup_{t \in \{\tau\}-D} (-\beta \xi_{e,D}(t) - r\sigma(t))] \leqslant \\ & \sup_{(u,v,\tau) \in \mathcal{K}(x)} \inf_{\lambda,\beta \in \mathbb{R}_+} [\bar{\theta} u + \sup_{z \in \{v\}-D} (-\lambda \xi_{e,D}(z)) + \sup_{t \in \{\tau\}-D} (-\beta \xi_{e,D}(t))] = \\ & \sup_{(u,v,\tau) \in \mathcal{K}(x)} \inf_{\lambda,\beta \in \mathbb{R}_+} [\bar{\theta} u - \lambda \xi_{e,D}(v) - \beta \xi_{e,D}(\tau)] = P_1(x) \end{aligned}$$

定理 3.1　设 $\bar{\theta} > 0$，$S \neq \varnothing$，函数 f 是扩张的且在 Ω' 上关于 $\mu > 0$ 是逆强伪单调的，则对任意 $x \in \Omega'$，有

$$d(x, S) \leqslant \sqrt{\frac{P_2(x)}{\bar{\theta}\mu}} \tag{10}$$

证　令 $x^* \in S$，则有 $f(x^*) \in \Omega$. 于是对任意 $y \in \Omega'$，即 $f(y) \in \Omega$，有

$$(f(y)-f(x^*))^{\mathrm{T}} x^* \geqslant 0$$

再由 f 在 Ω' 上关于 $\mu > 0$ 的逆强伪单调性知

$$(f(y)-f(x^*))^{\mathrm{T}} y \geqslant \mu \| f(y)-f(x^*) \|^2 \qquad \forall y \in \Omega' \tag{11}$$

对任意 $x \in \Omega'$，有

$$P_2(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \inf_{\lambda,\beta \in \mathbb{R}_+} [\bar{\theta}((f(x)-y)^{\mathrm{T}} x) + \sup_{z \in g(y)-D} (-\lambda \xi_{e,D}(z) - r\sigma(z)) + \sup_{t \in g(f(x))-D} (-\beta \xi_{e,D}(t) - r\sigma(t))]$$

在上式中令 $y = f(x^*) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$，可得

$$\begin{aligned} P_2(x) \geqslant & \inf_{\lambda,\beta \in \mathbb{R}_+} [\bar{\theta}((f(x)-f(x^*))^{\mathrm{T}} x) + \sup_{z \in g(f(x^*))-D} (-\lambda \xi_{e,D}(z) - r\sigma(z)) + \sup_{t \in g(f(x))-D} (-\beta \xi_{e,D}(t) - r\sigma(t))] \geqslant \\ & \bar{\theta}((f(x)-f(x^*))^{\mathrm{T}} x) + \inf_{\lambda,\beta \in \mathbb{R}_+} [-(\lambda+\beta) \xi_{e,D}(0_{\mathbb{R}^m}) - 2r\sigma(0_{\mathbb{R}^m})] = \\ & \bar{\theta}((f(x)-f(x^*))^{\mathrm{T}} x) \geqslant \\ & \bar{\theta}\mu \| f(x)-f(x^*) \|^2 \geqslant \\ & \bar{\theta}\mu \| x-x^* \|^2 \qquad \forall x \in \Omega' \end{aligned}$$

其中第二个不等式的依据是 $0_{\mathbb{R}^m} \in (g(f(x^*))-D) \cap (g(f(x))-D)$，最后一个不等式依据是 f 扩

张. 故

$$d(x, S) \leqslant \| x - x^* \| \leqslant \sqrt{\frac{P_2(x)}{\bar{\theta}\mu}} \qquad \forall x \in \Omega'$$

因此, 不等式(10) 成立.

下面的例子说明, 定理 3.1 中 f 的逆强伪单调性是必要的.

例 3.1 设 $\bar{\theta} > 0$, $D = \mathbb{R}_+^3$. 令 $f(x) = x^3$, $g(y) = (y, y, y+1)^{\mathrm{T}}$. 于是有 $\Omega = \Omega' = [0, +\infty[$. 先证 f 在 Ω' 上关于 $\mu > 0$ 的逆强伪单调不成立. 事实上, 假设 $(x^3 - y^3)y \geqslant 0$, 那么 $x \geqslant y \geqslant 0$. 若 f 在 Ω' 上关于 $\mu > 0$ 是逆强伪单调的, 则有

$$(x^3 - y^3)x \geqslant \mu(x^3 - y^3)^2 \qquad \forall x > y \geqslant 0$$

这意味着

$$\frac{x}{x^3 - y^3} \geqslant \mu \qquad \forall x > y \geqslant 0$$

固定 y, 于是有 $\mu \leqslant 0$, $x \longrightarrow +\infty$, 这与 $\mu > 0$ 矛盾. 通过计算可得

$$P_2(x) = \bar{\theta}x^4 \qquad \forall x \in \Omega' \qquad S = \{0\}$$

下证变分不等式(1) 关于函数 P_2 不满足误差界. 给定 $m > 0$, $x(m) = \dfrac{1}{m^2+1}$. 于是有

$$\sqrt{P_2(x(m))} = \bar{\theta}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{m^2+1}\right)^2 < \bar{\theta}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{m^2(m^2+1)} = \frac{\bar{\theta}^{\frac{1}{2}}}{m^2} d(x(m), S)$$

故(10) 式不成立.

推论 3.1 设 $\bar{\theta} > 0$, $S \neq \varnothing$, 函数 f 是扩张的, 并且 f 在 Ω' 上关于 $\mu > 0$ 是逆强伪单调的, 则对任意 $x \in \Omega'$, 有

$$d(x, S) \leqslant \sqrt{\frac{P_1(x)}{\bar{\theta}\mu}}$$

证 结合命题 3.1 和定理 3.1 立即得出结论.

下面的例子说明, 定理 3.1 和推论 3.1 是可行的.

例 3.2 本例沿用例 2.1 的假设. 通过计算得 $\Omega' = \{0, 1\}$. 显然, 函数 f 在 Ω' 上关于 $\mu = 1$ 是逆强伪单调的. 由例 2.1 知

$$P_i(x) = \bar{\theta}x^2 \qquad i = 1, 2 \qquad \forall x \in \Omega' \qquad S = \{0\}$$

故有

$$d(x, S) = \| x \| \leqslant \sqrt{\frac{P_i(x)}{\bar{\theta}\mu}} \qquad i = 1, 2 \qquad \forall x \in \Omega'$$

参考文献:

[1] FACCHINEI F, PANG J S. Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems. Springer Series in Operations Research [M]. New York(NY): Springer-Verlag, 2003.

[2] FERRIS M C, PANG J S. Engineering and Economic Applications of Complementarity Problems [J]. SIAM Rev, 1997, 39(4): 669-713.

[3] HARKER P T, PANG J S. Finite-Dimensional Variational Inequalities and Nonlinear Complementarity Problems: A Survey of Theory, Algorithms and Applications [J]. Math Program, 1990, 48: 161-220.

[4] CHARITHA C, DUTTA J. Regularized Gap Functions and Error Bounds for Vector Variational Inequalities [J]. Pac J Optim, 2011, 6(3): 497-510.

[5] LIGNOLA M B，MORGAN J. Convergence for Variational Inequalities and Generelized Variational Inequalities [J]. Atti Sem mat fis univ modena，1997，2：377－388.

[6] LI J，HUANG N J. Image Space Analysis for Variational Inequalities with Cone Constraints Applications to Traffic Equilibria [J]. Sci China Math，2012，55(4)：851－868.

[7] MASTROENI G，PANICUCCI B，PASSACANTANDO M，et al. A Separation Approach to Vector Quasi-Equilibrium Problems：Saddle Point and Gap Function [J]. Taiwan J Math，2009，13(2)：657－673.

[8] XU Y D. Nonlinear Separation Approach to Inverse Variational Inequalities [J]. Optimization，2016，28：1－21.

[9] GIANNESSI F. Constrained Optimization and Image Space Analysis. Vol. 1. Separation of Sets and Optimality Conditions [J]. New York(NY)：Springer，2006，48(2)：429－431.

[10] GERTH C，WEIDNER P. Nonconvex Separation Theorems and Some Applications in Vector Optimization [J]. J Optim Theory Appl，1990，67(2)：297－320.

[11] LUC D T. Theory of Vector Optimization [J]. Springer-Verlag，2006，319：1－70.

[12] CHEN G Y，HUANG X X，YANG X Q. Vector Optimization：Set-Valued and Variational Analysis. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems [M]. Berlin：Springer，2005，541.

Gap Functions and Error Bounds for a Class of Variational Inequalities with Cone Constraints

DONG Wen[1]， OU Xiao-qing[2]， LI Jing-fu[1]， CHEN Jia-wei[1]

1. *School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China；*

2. *School of Management，Chongqing College of Humanities，Science & Technology，Chongqing 401524，China*

Abstract：The gap function and the error bound play an important role in optimization methods and the error bound，especially，can characterize the effective estimated distance between a feasible point and the solution set of variational inequalities. In this article，by using the image space analysis，gap functions for a class of variational inequalities with cone constraints are proposed. Moreover，error bounds，which provide an effective estimated distance between a feasible point and the solution set，for the variational inequalities are established via the gap functions.

Key words：constrained variational inequality；image space analysis；gap function；error bound

责任编辑　汤振金