第 39 卷第 9 期　　西南大学学报(自然科学版)　　2017 年 9 月
Vol. 39　No. 9　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Sep.　2017

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2017.09.010

包含次临界和临界 Sobolev 指数及梯度项的合作椭圆方程组[①]

樊自安，　寇继生

湖北工程学院 数学与统计学院，湖北 孝感 432000

摘要：讨论了一类包含次临界和临界 Sobolev 指数及梯度项的合作椭圆方程组. 应用 Nehari 流形和变分方法，在不同情况下得到了方程至少存在一个解的结论.

关　键　词：临界 Sobolev 指数；合作椭圆方程组；Nehari 流形；山路引理；非平凡解

中图分类号：O175.25　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9868(2017)09-0066-09

考虑下列合作椭圆方程组

$$\begin{cases} -\Delta u = au + bv + F_u(u, v) & x \in \Omega \\ -\Delta v = bu + cv + F_v(u, v) & x \in \Omega \\ u = v = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

其中：$x \in \Omega$，$\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geqslant 4)$ 是一个具有光滑边界的有界区域，$0 \in \Omega$，$a, b, c \in \mathbb{R}$，$a > 0$，$c > 0$，$b^2 - ac < 0$. 设 $\nabla F(u, v) = (F_u(u, v), F_v(u, v))$ 满足条件：

(A) $F \in C^1((\mathbb{R})^2, \mathbb{R}^+)$，$F(0, 0) = 0$. 当 $(u, v) \neq (0, 0)$ 时，$F(u, v) > 0$，$F(tu, tv) = t^p F(u, v) (t > 0)$，$2 < p \leqslant 2^*$，$2^* = \dfrac{2N}{N-2}$ 是临界 Sobolev 指数.

设 $z = (u, v)$，条件(A)可推出欧拉恒等式：

$$z \nabla F(z) = pF(z) \tag{2}$$

$$F(z) \leqslant M |z|^p \tag{3}$$

其中：$M = \max\{F(u, v) \mid (u, v) \in \mathbb{R}^2, |u|^2 + |v|^2 = 1\} > 0$，$|z|^p = |u|^p + |v|^p$.

设空间 $H_0^1(\Omega)$ 以及 $L^p(\Omega)$ 中的范数

$$\| u \|_H = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\| u \|_p = \left(\int_\Omega |u|^p \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}}$$

设 $a > 0$，$c > 0$，$b^2 - ac < 0$，则矩阵

---

① 收稿日期：2016-04-05
基金项目：湖北省教育厅科学研究计划项目(B2015032)；国家自然科学基金项目(11301163).
作者简介：樊自安(1972-)，男，湖北广水人，副教授，主要从事偏微分方程的研究.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

存在两个特征值 $0<\lambda_1\leqslant\lambda_2$，$au^2+2buv+cv^2\geqslant 0$，且

$$\lambda_1(u^2+v^2)\leqslant au^2+2buv+cv^2\leqslant\lambda_2(u^2+v^2) \tag{4}$$

设特征值问题($-\Delta$，$H_0^1(\Omega)$)的第一特征值为 $\mu_1>0$，相应的特征函数 $\varphi_1>0$.

在 Banach 空间 $E=H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$ 中定义范数

$$\|(u,v)\|=(\|u\|_H^2+\|v\|_H^2)^{\frac{1}{2}}$$

近来，关于含临界指数椭圆方程组解的存在性得到了广泛的研究. 文献[1]研究了下列方程组

$$\begin{cases} -\Delta u=au+bv+\dfrac{2\alpha}{\alpha+\beta}|u|^{\alpha-2}u|v|^{\beta} & x\in\Omega \\ -\Delta v=bu+cv+\dfrac{2\beta}{\alpha+\beta}|u|^{\alpha}|v|^{\beta-2}v & x\in\Omega \\ u=v=0 & x\in\partial\Omega \end{cases}$$

正解的存在性，得到了当 $\alpha+\beta=2^*$，$b\geqslant 0$，$0<\lambda_1\leqslant\lambda_2<\mu_1$，$N\geqslant 4$，方程组存在一个正解. 文献[2-4]推广了上述结果. 相关论文还可见参文献[5-9]. 文献[10-15]利用 Nehari 流形的方法得到了椭圆方程的多解性. 本文应用 Nehari 流形和变分方法证明了当 $2<p<2^*$ 以及 $p=2^*$ 时方程至少存在一个非平凡解.

定义1 $(u,v)\in E$ 是问题(1)的一个解是指任意$(\phi_1,\phi_2)\in E$ 满足：

$$\int_\Omega(\nabla u\nabla\phi_1+\nabla v\nabla\phi_2)\mathrm{d}x=\int_\Omega(au\phi_1+bv\phi_1+bu\phi_2+cv\phi_2)\mathrm{d}x+\int_\Omega F_u(u,v)\phi_1\mathrm{d}x+\int_\Omega F_v(u,v)\phi_2\mathrm{d}x$$

下面给出本文的主要结果.

定理1 假设 $0<\lambda_1\leqslant\lambda_2<\mu_1$，$2<p<2^*$，条件(A)成立，则问题(1)在 E 中存在一个非平凡解.

定理2 假设 $0<\lambda_1\leqslant\lambda_2<\mu_1$，$p=2^*$，条件(A)成立，则问题(1)在 E 中存在一个非平凡解.

定义能量泛函：

$$J(u,v)=\frac{1}{2}\|(u,v)\|^2-\frac{1}{2}\int_\Omega(au^2+2buv+cv^2)\mathrm{d}x-\int_\Omega F(u,v)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\|(u,v)\|^2-\frac{1}{2}A(u,v)-K(u,v)$$

其中

$$A(u,v)=\int_\Omega(au^2+2buv+cv^2)\mathrm{d}x$$

$$K(u,v)=\int_\Omega F(u,v)\mathrm{d}x$$

类似于文献[10]的证明知道，$J\in C^1(E,\mathbb{R})$. 考虑 Nehari 流形：

$$N_\lambda=\{(u,v).\in E\backslash\{(0,0)\}\mid\langle J'(u,v),(u,v)\rangle=0\}$$

因此 $z=(u,v)\in N_\lambda$ 当且仅当

$$\langle J'(z),z\rangle=\|z\|^2-A(z)-\int_\Omega\nabla F(z)z\mathrm{d}x=\|z\|^2-A(z)-p\int_\Omega F(z)\mathrm{d}x=0$$

对于$(u,v)\in N_\lambda$

$$J(u,v)=\frac{1}{2}\|(u,v)\|^2-\frac{1}{2}A(u,v)-K(u,v)=$$
$$\left(\frac{p}{2}-1\right)K(u,v)\geqslant 0$$

于是 $J(u,v)$ 是有下界的.

定义

$$M(u,v)=\langle J'(u,v),(u,v)\rangle$$

对于$(u,v)\in N_\lambda$，

$$\langle M'(u,v),(u,v)\rangle=2(\|(u,v)\|^2-A(u,v))-p^2K(u,v)=$$
$$p(2-p)K(u,v)=(2-p)\|(u,v)\|^2-(2-p)A(u,v)\tag{5}$$

把 N_λ 分成 3 个部分：

$$N_\lambda^+=\{(u,v)\in N_\lambda\mid\langle M'(u,v),(u,v)\rangle>0\}$$
$$N_\lambda^0=\{(u,v)\in N_\lambda\mid\langle M'(u,v),(u,v)\rangle=0\}$$
$$N_\lambda^-=\{(u,v)\in N_\lambda\mid\langle M'(u,v),(u,v)\rangle<0\}$$

由于 $2<p\leqslant 2^*=\frac{2N}{N-2}$. 于是 $N_\lambda^+=N_\lambda^0=\varnothing$，$N_\lambda=N_\lambda^-$.

引理 1　假设(u_0,v_0)是 J 在 N_λ 里的一个极小值点，且$(u,{}_0,v_0)\notin N_\lambda^0$，则 $J'(u_0,v_0)=0$，即(u_0,v_0)是 $J(u,v)$ 的一个临界点.

证　此证明类似于文献[14]，这里略去证明.

由于$(u,v)\in N_\lambda$ 时，$J(u,v)$ 有下界，我们可以定义：

$$\xi^-=\inf_{(u,v)\in N_\lambda^-}J(u,v)$$

引理 2　存在 $C_0=C_0(\mu_1,\lambda_2,p,S_0)>0$ 使得 $\xi^->C_0$.

证　设$(u,v)\in N_\lambda^-$，当 $0<\lambda_1\leqslant\lambda_2<\mu_1$时，由(4)式知

$$J(u,v)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)(\|(u,v)\|^2-A(u,v))\geqslant\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\|(u,v)\|^2\left(1-\frac{\lambda_2}{\mu_1}\right)\tag{6}$$

设 $H_0^1(\Omega)\rightarrow L^p(\Omega)(2<p<2^*)$的最佳嵌入系数为 S_0，

$$K(u,v)=\int_\Omega F(u,v)\mathrm{d}x\leqslant M\int_\Omega|z|^p\mathrm{d}x=M(\int_\Omega|u|^p\mathrm{d}x+\int_\Omega|v|^p\mathrm{d}x)\leqslant$$
$$MS_0^p(\|u\|_H^p+\|v\|_H^p)\leqslant MS_0^p\|(u,v)\|^p\tag{7}$$

于是由(7)式有

$$J(u,v)=\left(\frac{p}{2}-1\right)K(u,v)\leqslant\left(\frac{p}{2}-1\right)MS_0^p\|(u,v)\|^p\tag{8}$$

由(6),(8)式有

$$\|(u,v)\|\geqslant\left(1-\frac{\lambda_2}{\mu_1}\right)^{\frac{1}{p-2}}(Mp)^{\frac{-1}{p-2}}S_0^{\frac{-p}{p-2}}\tag{9}$$

于是由(6),(9)式有 $\xi^->C_0$.

对于每个$(u,v)\in E$，且 $K(u,v)>0$，则$(u,v)\neq(0,0)$，当 $0<\lambda_1\leqslant\lambda_2<\mu_1$ 时，

$$\|(u,v)\|^2-A(u,v)\geqslant\|(u,v)\|^2\left(1-\frac{\lambda_2}{\mu_1}\right)>0$$

记

$$t_0=\left(\frac{\|(u,v)\|^2-A(u,v)}{pK(u,v)}\right)^{\frac{1}{p-2}}>0$$

则有下列引理3,4.

引理3 对于$(u,v)\in E$,且$K(u,v)>0$,则存在唯一的t_0使得$(t_0u,t_0v)\in N_\lambda^-$,且

$$J(t_0u,t_0v)=\sup_{t\geqslant 0}J(tu,tv)$$

证 设$(u,v)\in E$,且$K(u,v)>0$,设

$$h(t)=J(tu,tv)=\frac{t^2}{2}\|(u,v)\|^2-\frac{t^2}{2}A(u,v)-t^pK(u,v)$$

$$h'(t)=t(\|(u,v)\|^2-A(u,v))-pt^{p-1}K(u,v)$$

令$h'(t)=0$,得到$t=t_0$,$h(0)=0$,$t\to+\infty$,$h(t)\to-\infty$. 当$t\in[0,t_0)$,$h'(t)>0$,当$t\in(t_0,\infty)$,$h'(t)<0$,因此$h(t)$在$t=t_0$达到最大值. 由(5)式得到

$$\langle J'(t_0u,t_0v),(t_0u,t_0v)\rangle=t_0^2\|(u,v)\|^2-t_0^2A(u,v)-pt_0^pK(u,v)=0$$

$$\langle M'(t_0u,t_0v),(t_0u,t_0v)\rangle=p(2-p)t_0^pK(u,v)<0$$

于是

$$(t_0u,t_0v)\in N_\lambda^-,\ J(t_0u,t_0v)=\sup_{t\geqslant 0}J(tu,tv)$$

引理4 假设$0<\lambda_1\leqslant\lambda_2<\mu_1$,则泛函$J(u,v)$有一个极小值点$(u_0^-,v_0^-)\in N_\lambda^-$,且满足

(1) $J(u_0^-,v_0^-)=\xi^-$,

(2) (u_0^-,v_0^-)是方程(1)的一个非平凡解.

证 设$(u_n,v_n)\in N_\lambda^-$是$J(u,v)$的一个极小化序列,

$$\lim_{n\to\infty}J(u_n,v_n)=\inf_{u,v\in N_\lambda^-}J(u,v)$$

由(6)式知道

$$J(u_n,v_n)\geqslant\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\|(u_n,v_n)\|^2\left(1-\frac{\lambda_2}{\mu_1}\right)$$

因此$\{u_n,v_n\}$是有界的,存在一个子列(不妨仍记作$\{u_n,v_n\}$)以及$(u_0^-,v_0^-)\in E$,且在E里,$(u_n,v_n)\rightharpoonup(u_0^-,v_0^-)$,在$\Omega$里,$(u_n,v_n)\to(u_0^-,v_0^-)$ a.e.,于是当$n\to\infty$,由(7)式有,$K(u_n,v_n)\to K(u_0^-,v_0^-)$.

$$0<C_0<\xi^-\leqslant J(u_n,v_n)=\left(\frac{p}{2}-1\right)K(u_n,v_n)\to\left(\frac{p}{2}-1\right)K(u_0^-,v_0^-)$$

于是$(u_0^-,v_0^-)\neq(0,0)$,$K(u_0^-,v_0^-)>0$. 现在我们证明:在E里$(u_n,v_n)\to(u_0^-,v_0^-)$. 假如不是,由Fatou引理:

$$\|u_0^-\|<\liminf_{n\to\infty}\|u_n\|\qquad\|v_0^-\|<\liminf_{n\to\infty}\|v_n\|\tag{10}$$

由引理3知存在唯一的t_0^-使得$(t_0^-u_0^-,t_0^-v_0^-)\in N_\lambda^-$,又$(u_n,v_n)\in N_\lambda^-$,$J(tu_n,tv_n)$在$t=1$达到极大值,因此当$t\geqslant 0$时,$J(tu_n,tv_n)\leqslant J(u_n,v_n)$. 于是由(6),(10)式有

$$J(t_0^-u_0^-,t_0^-v_0^-)=\left(\frac{p}{2}-1\right)(t_0^-)^pK(u_0^-,v_0^-)<$$

$$\liminf_{n\to\infty}J(t_0^-u_n,t_0^-v_n)\leqslant\lim_{n\to\infty}J(u_n,v_n)=\xi^-$$

矛盾,因此在E里$(u_n,v_n)\to(u_0^-,v_0^-)$. 当$n\to\infty$,$J(u_n,v_n)\to J(u_0^-,v_0^-)=\xi^-$,又$(u_0^-,v_0^-)\neq(0,0)$,由引理1知$(u_0^-,v_0^-)$是方程(1)的一个非平凡解.

现在考虑$p=2^*=\dfrac{2N}{N-2}$的情形.

对于$u\neq 0$,设

$$S=\inf\frac{\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x}{\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{2^*}}}$$

则有

$$\|u\|_{2^*}^{2^*}\leqslant\|u\|_H^{2^*}S^{\frac{-2^*}{2}}\tag{11}$$

S 的达到函数

$$U_\varepsilon(x)=\frac{(N(N-2)\varepsilon^2)^{\frac{N-2}{4}}}{(\varepsilon^2+|x|^2)^{\frac{N-2}{2}}}$$

且 $U_\varepsilon(x)$ 满足下列方程：

$$-\Delta u=u|u|^{2^*-2},\ u\in H^1(\mathbb{R}^N)$$

因此有

$$\|U_\varepsilon\|^2=\|U_\varepsilon\|_{2^*}^{2^*}=S^{\frac{2^*}{2^*-2}}$$

设 $0\leqslant\varphi(x)\leqslant 1$，$\varphi(x)\in C_0^\infty(\Omega)$，定义：当 $|x|\leqslant r$，$\varphi(x)=1$；$|x|\geqslant 2r$，$\varphi(x)=0$，$|\nabla\varphi(x)|\leqslant C$，$B_{2r}(0)\subset\Omega$，$r$ 为常数，设

$$u_\varepsilon(x)=\varphi(x)U_\varepsilon(x)$$

则利用文献[5] 的方法，同样可得 $u_\varepsilon(x)$ 具有下列性质：

$$\int_\Omega|\nabla u_\varepsilon|^2\mathrm{d}x=S^{\frac{N}{2}}+O(\varepsilon^{N-2})\tag{12}$$

$$\int_\Omega|u_\varepsilon|^{2^*}\mathrm{d}x=S^{\frac{N}{2}}+O(\varepsilon^N)\tag{13}$$

以及

$$\int_\Omega|u_\varepsilon|^2\mathrm{d}x=\begin{cases}c\varepsilon^2+O(\varepsilon^{N-2}) & N\geqslant 5\\ c\varepsilon^2|\ln\varepsilon|+O(\varepsilon^2) & N=4\\ c\varepsilon+O(\varepsilon^{N-2}) & N=3\end{cases}\tag{14}$$

对于 $z=(u,v)\in E\backslash\{0\}$，设

$$\boldsymbol{S}_F=\inf\left\{\frac{\|z\|^2}{\left(\int_\Omega F(u,v)\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{2^*}}}:\int_\Omega F(u,v)\mathrm{d}x>0\right\}$$

因此

$$\boldsymbol{S}_F\geqslant S_0M^{\frac{-2}{2^*}}$$

定义能量泛函：

$$J(u,v)=\frac{1}{2}\|(u,v)\|^2-\frac{1}{2}\int_\Omega(au^2+2buv+cv^2)\mathrm{d}x-\int_\Omega F(u,v)\mathrm{d}x=$$

$$\frac{1}{2}\|(u,v)\|^2-\frac{1}{2}A(u,v)-K(u,v)$$

其中

$$A(u,v)=\int_\Omega(au^2+2buv+cv^2)\mathrm{d}x$$

$$K(u,v)=\int_\Omega F(u,v)\mathrm{d}x$$

定义 2 序列$\{(u_n, v_n)\} \subset E$叫做一个$(PS)_c$列，假如存在$c \in \mathbb{R}$有

$$I(u_n, v_n) \to c, \ I'(u_n, v_n) \to 0 \qquad n \to \infty$$

引理 5 对于$c \in \mathbb{R}$，若序列$\{z_n\} = \{(u_n, v_n)\} \subset E$是泛函$J$的一个$(PS)_c$列，则存在$\{z_n\} = \{(u_n, v_n)\} \rightharpoonup z = (u, v) \in E$，$(u, v)$是问题(1)的一个解，且$J'(u, v) = 0$.

证 由$(PS)_c$列的定义，存在$c \in \mathbb{R}$，有

$$J(u_n, v_n) \to c \qquad J'(u_n, v_n) \to 0 \qquad n \to \infty \tag{15}$$

$$J(u_n, v_n) = \frac{1}{2}\|z_n\|^2 - \frac{1}{2}A(u_n, v_n) - K(u_n, v_n) = c + o_n(1)$$

$$\langle J'(u_n, v_n), (u_n, v_n)\rangle = \|z_n\|^2 - A(u_n, v_n) - 2^* K(u_n, v_n) = o_n(1)$$

则当$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 < \mu_1$时，

$$\begin{aligned} c + o_n(1) = J(u_n, v_n) - \frac{1}{2^*}\langle J'(u_n, v_n), (u_n, v_n)\rangle = \\ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\right)\|z_n\|^2 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\right)A(u_n, v_n) \geqslant \\ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\right)\|z_n\|^2\left(1 - \frac{\lambda_2}{\mu_1}\right) \end{aligned}$$

因此$\{(u_n, v_n)\}$有界.

$\{(u_n, v_n)\}$有界，则在E里存在弱收敛的子列，不妨仍记为$\{(u_n, v_n)\}$，存在$(u, v) \in E$，当$n \to \infty$，$(u_n, v_n) \rightharpoonup (u, v)$在$E$里，$u_n \rightharpoonup u$以及$v_n \rightharpoonup v$在$L^{2^*}(\Omega)$里. $u_n \to u$以及$v_n \to v$在$L^2(\Omega)$里，$u_n \to u$以及$v_n \to v$ a.e.，$x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$. 因此$n \to \infty$，$A(u_n, v_n) \to A(u, v)$，由(15)式知道$(u, v)$是问题(1)的一个解，且$J'(u, v) = 0$.

引理 6 对于$c \in \mathbb{R}$，若序列$\{z_n\} = \{(u_n, v_n)\} \subset H$是泛函$J$的一个$(PS)_c$列，$(u_n, v_n) \rightharpoonup (u, v)$，则当

$$c < \frac{2}{N-2}\left(\frac{S_F}{2^*}\right)^{\frac{N}{2}}$$

时，$(u_n, v_n) \to (u, v)$.

证 由$(PS)_c$列的定义，存在$c \in \mathbb{R}$，有

$$J(u_n, v_n) \to c, \ J'(u_n, v_n) \to 0 \qquad n \to \infty$$

由引理5，(u, v)是问题(1)的一个解，且$J'(u, v) = 0$. 设$u_{n1} = u_n - u$，$v_{n1} = v_n - v$于是$u_{n1} \rightharpoonup 0$以及$v_{n1} \rightharpoonup 0$，由Brezis-lieb引理[7]推出

$$\|(u_n, v_n)\|^2 = \|(u_{n1}, v_{n1})\|^2 + \|(u, v)\|^2 + o_n(1)$$

由文献[9]得到

$$K(u_n, v_n) = K(u_{n1}, v_{n1}) + K(u, v) + o_n(1)$$

因此

$$J(u_n, v_n) = J(u, v) + \frac{1}{2}\|(u_{n1}, v_{n1})\|^2 - K(u_{n1}, v_{n1}) + o_n(1)$$

$$\langle J'(u_n, v_n), (u_n, v_n)\rangle = \|(u_{n1}, v_{n1})\|^2 - 2^* K(u_{n1}, v_{n1}) + o_n(1)$$

于是假设

$$\lim_{n\to\infty}\|(u_{n1}, v_{n1})\|^2 = 2^* l \qquad \lim_{n\to\infty} K(u_{n1}, v_{n1}) = l$$

由S_F的定义，$l^{\frac{2}{2^*}} \leqslant \dfrac{2^* l}{S_F}$时得$l = 0$或者$l \geqslant \left(\dfrac{S_F}{2^*}\right)^{\frac{N}{2}}$. 若$l \geqslant \left(\dfrac{S_F}{2^*}\right)^{\frac{N}{2}}$，则

$$J(u_n, v_n) - \frac{1}{2}\langle J'(u_n, v_n), (u_n, v_n)\rangle = J(u, v) + \left(\frac{2^*}{2} - 1\right)K(u_{n1}, v_{n1}) + o_n(1)$$

令 $n \to \infty$

$$J(u, v) = c - \left(\frac{2^*}{2} - 1\right)l \leqslant c - \frac{1}{2^*}\left(\frac{2^*}{2} - 1\right)\left(\frac{S_F}{2^*}\right)^{\frac{N}{2}} =$$

$$c - \frac{2}{N-2}\left(\frac{S_F}{2^*}\right)^{\frac{N}{2}} < 0$$

得到 $J(u, v) < 0$.

另一方面，由 (u, v) 是问题(1) 的一个解，$J'(u, v) = 0$.

$$J(u, v) = J(u, v) - \frac{1}{2}\langle J'(u, v), (u, v)\rangle = \left(\frac{2^*}{2} - 1\right)K(u, v) \geqslant 0$$

矛盾. 故 $l = 0$，$(u_n, v_n) \to (u, v)$.

引理 7　假设 $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 < \mu_1$，下面结论成立：

1) 存在 $\delta, \rho > 0$，使得当 $\forall z = (u, v) \in E$，$\| z \| = \rho$，$J(u, v) \geqslant \delta > 0$；

2) 存在 $(\phi_1, \phi_2) \in E$ 使得：

$$\lim_{t \to \infty} J(t\phi_1, t\phi_2) = -\infty$$

证　1) 当 $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 < \mu_1$ 时，由(4),(11) 式有

$$J(z) = \frac{1}{2}\| z \|^2 - \frac{1}{2}A(z) - K(z) \geqslant$$

$$\frac{1}{2}\| z \|^2\left(1 - \frac{\lambda_2}{\mu_1}\right) - M\| z \|^{2^*} S_0^{\frac{-2^*}{2}}$$

由于 $2^* > 2$，取 $\| z \| = \rho$ 足够小，存在 $\delta > 0$，$J(u, v) \geqslant \delta > 0$.

2) 取 $\phi = (\phi_1, \phi_2) \in E$，$\phi_1, \phi_2 \geqslant 0$，$(\phi_1, \phi_2) \neq (0, 0)$，注意到 $A(\phi_1, \phi_2) \geqslant 0$，由(2) 式有

$$J(t\phi_1, t\phi_2) = \frac{t^2}{2}(\| \phi \|^2 - A(\phi_1, \phi_2)) - t^{2^*} K(\phi_1, \phi_2) \leqslant$$

$$\frac{t^2}{2}(\| \phi \|^2) - t^{2^*} K(\phi_1, \phi_2)$$

即 $t \to \infty$，$J(t\phi_1, t\phi_2) \to -\infty$.

下面我们给出定理 2 的证明.

定理 2 的证明　设 $u_0 = \alpha u_\varepsilon$，$v_0 = \beta u_\varepsilon$，$\alpha^2 + \beta^2 = 1$，$z_0 = (u_0, v_0) \in E$. 考虑下列函数

$$g(t) = J(tu_0, tv_0) \leqslant$$

$$\frac{1}{2}t^2(\| u_\varepsilon \|_H^2 - \lambda_1\int_\Omega | u_\varepsilon |^2 \mathrm{d}x) - t^{2^*} K(\alpha u_\varepsilon, \beta v_\varepsilon)$$

由

$$\lim_{t \to +\infty} g(t) = -\infty \qquad \lim_{t \to 0+} g(t) > 0$$

当 $t \geqslant 0$，$\sup g(t)$ 在某个 $t_\varepsilon > 0$ 达到，由于

$$\max_{t \geqslant 0}\left(\frac{t^2}{2}A - t^{2^*} B\right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\right)A^{\frac{2^*}{2^*-2}}(2^* B)^{\frac{-2}{2^*-2}} =$$

$$\frac{1}{N}\left(A(2^* B)^{\frac{-2}{2^*}}\right)^{\frac{N}{2}} \qquad A, B > 0$$

注意到 $N \geqslant 4$，因此由(12),(13),(14) 式及 $F(\alpha, \beta) = M$ 得到

$$g(t_\varepsilon)\leqslant \frac{1}{N}\left(\frac{(\|u_\varepsilon\|_H^2-\lambda_1\int_\Omega |u_\varepsilon|^2\mathrm{d}x)}{(2^*K(\alpha u_\varepsilon,\beta v_\varepsilon))^{\frac{2}{2^*}}}\right)^{\frac{N}{2}}\leqslant \frac{1}{N}\left(\frac{(\|u_\varepsilon\|_H^2-\lambda_1\int_\Omega |u_\varepsilon|^2\mathrm{d}x)}{(2^*M\int_\Omega |u_\varepsilon|^{2^*}\mathrm{d}x)^{\frac{2}{2^*}}}\right)^{\frac{N}{2}}\leqslant$$

$$\frac{1}{N}(2^*M)^{\frac{2-N}{2}}\left(\frac{(S_0^{\frac{N}{2}}+O(\varepsilon^{N-2})-\lambda_1\int_\Omega |u_\varepsilon|^2\mathrm{d}x)}{(S_0^{\frac{N-2}{2}}+O(\varepsilon^N))}\right)^{\frac{N}{2}}\leqslant$$

$$\frac{1}{N}(2^*M)^{\frac{2-N}{2}}S_0^{\frac{N}{2}}+O(\varepsilon^{N-2})-\lambda_1\int_\Omega |u_\varepsilon|^2\mathrm{d}x<$$

$$\frac{2}{N-2}\left(\frac{S_F}{2^*}\right)^{\frac{N}{2}}$$

当 $t\geqslant 0$ 时,

$$\sup J(tu_0,tv_0)=g(u_\varepsilon)<\frac{2}{N-2}\left(\frac{S_F}{2^*}\right)^{\frac{N}{2}}$$

由引理 7 及山路引理知在 E 里存在$(\mathrm{PS})_c$ 列$\{(u_n,v_n)\}$使得

$$J(u_n,v_n)\to c_0,\ J'(u_n,v_n)\to 0 \qquad n\to\infty$$

其中

$$c_0=\inf_{\gamma\in\Gamma,\ t\in[0,1]}\max J(\gamma(t))$$

$$\Gamma=\{\gamma\in C([0,1],E),\ \gamma(0)=0,\ J(\gamma(1))<0\}$$

由引理 5,存在$(u_2,v_2)\in E$,$(u_n,v_n)\rightharpoonup(u_2,v_2)$,且 $J'(u_2,v_2)=0$,于是

$$c_0=\inf_{\gamma\in\Gamma,\ t\in[0,1]}\max J(\gamma(t))<\frac{2}{N-2}\left(\frac{S_F}{2^*}\right)^{\frac{N}{2}}$$

由引理 6 知$(u_n,v_n)\to(u_2,v_2)$,又 $J(u_2,v_2)=c_0>0$,因此问题(1)存在一个非平凡解,证毕.

参考文献:

[1] ALVES C O, MORAIS FILHO D C, SOUTO M A S. On Systems of Elliptic Equations Involving Subcritical or Critical Sobolev Exponents [J]. Nonlinear Anal, 2000, 42: 771-787.

[2] BOUCHEKIF M, NASRI Y. On Elliptic System Involving Critical Sobolev-Hardy Exponents [J]. Mediterr J math, 2008, 5: 237-252.

[3] BOUCHEKIF M, NASRI Y. On a Elliptic System at Resonance [J]. Annali di Matematica, 2010, 189: 227-240.

[4] KANG D, PENG S. Existence and Asymptotic Properties of Solutions to Elliptic Systems Involving Multiple Critical Exponents [J]. Science China Mathematics, 2011, 54(2): 243-256.

[5] HUANG Y, KANG D. On the Singular Elliptic Systems Involving Multiple Critical Sobolev Exponents [J]. Nonlinear Anal, 2010, 74(2): 400-412.

[6] NASRI Y. An Existence Result for Elliptic Problems with Singular Critical Growth [J]. Electronic Journal of Differential Equations, 2007, 84: 1-6.

[7] BREZIS H, LIEB E. A Relation Between Pointwise Convergence of Functions and Convergence of Functionals [J]. Proc AMS, 1983, 88: 486-490.

[8] DE M FILHO D C, SOUTO M A S. Systems of P-Laplacian Equations Involving Homogeneous Nonlinearities with Critical Sobolev Exponent Degrees [J]. Comm Partial Differential Equations, 1999, 24: 1537-1553.

[9] SHEN Y, ZHANG J H. Multiplicity of Positive Solutions for a Semilinear P-Laplacian System with Sobolev Critical Exponent [J]. Nonlinear Anal, 2011, 74(4): 1019-1030.

[10] BROWN K J，WU T F. A Semilinear Elliptic System Involving Nonlinear Boundary Condition and Sign Changing Weight Function [J]. J Math Anal Appl，2008，337：1326－1336.

[11] ADRIOUCH K，EL HAMIDI A. The Nehari Manifold for System of Nonlinear Elliptic Equations [J]. Nonlinear Anal，2006，64(5)：2149－2167.

[12] ALVES C O，EL HAMIDI A. Nehari Manifold and Existence of Positive Solutions to a Class of Quasilinear Problems [J]. Nonlinear Anal，2005，60：611－624.

[13] WU T F. On Semilinear Elliptic Equations Involving Concave-Convex Nonlinearities and Sign-Changing Weight Function [J]. J Math Anal Appl，2006，318：253－270.

[14] BROWN K. The Nehari Manifold for a Semilinear Elliptic Equation Involving a Sublinear Term [J]. Calc Var，2005，22：483－494.

[15] BROWN K，WU T F. A Fibering Map Approach to a Semilinear Elliptic Boundary Value Problem [J]. Electron J Differential Equations，2007，69：1－9.

On Gradient-Type Cooperative Elliptic Systems Involving Subcritical or Critical Sobolev Exponents

FAN Zi-an，　KOU Ji-sheng

Department of Mathematics and Statistics，Hubei Engineering University，Xiaogan Hubei 432000，China

Abstract：This paper is related to the discussion on a class of gradient-type cooperative elliptic systems involving subcritical or critical Sobolev exponents. With the Nehari manifold and variational methods，it is proved that there exists at least one nontrivial solution of the systems under different cases.

Key words：critical Sobolev exponent；cooperative elliptic system；Nehari manifold；mountain pass lemma；nontrivial solution

责任编辑　张　枸