DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2017.09.011

Benjamin-Bona-Mahony 方程在薄区域上的极限方程[①]

张强恒， 朱朝生

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要： 研究了 Benjamin-Bona-Mahony 方程在薄区域上的极限方程. 通过证明 Benjamin-Bona-Mahony 方程解的极限行为，得到该方程在薄区域上的极限方程.

关 键 词： Benjamin-Bona-Mahony 方程；薄区域；极限方程

中图分类号：O175.29 **文献标志码：A** **文章编号：** 1673-9868(2017)09-0075-06

近年来，抛物方程和椭圆方程在薄区域上的研究引起了学者们的关注[1-4,7,10]. 本文研究 Benjamin-Bona-Mahony方程在薄区域上的极限方程. 通过研究Benjamin-Bona-Mahony方程解的极限行为，推出该方程在薄区域上的极限方程. 令

$$\Omega^{\varepsilon}=\{(\boldsymbol{x},\ x_{n+1})\in\mathbb{R}^{n}\times\mathbb{R}:\ \boldsymbol{x}\in\omega,\ 0<x_{n+1}<\varepsilon g(\boldsymbol{x})\}\tag{1}$$

其中：ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中光滑有界区域，$g\in c^{2}(\overline{\omega};\ \mathbb{R})$ 且 $\exists M>0$，使得 $0<g<M$.

本文考虑满足第一初边值条件的 Benjamin-Bona-Mahony 方程

$$\begin{cases}u_t^{\varepsilon}-\delta\Delta u_t^{\varepsilon}-\mu\Delta u^{\varepsilon}+\nabla\cdot\boldsymbol{F}(u^{\varepsilon})=f^{\varepsilon} & (\boldsymbol{x},\ t)\in\Omega^{\varepsilon}\times(0,\ \infty)\\ u^{\varepsilon}=0 & (\boldsymbol{x},\ t)\in\partial\Omega^{\varepsilon}\times(0,\ \infty)\\ u^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},\ 0)=u_0^{\varepsilon}(\boldsymbol{x}) & \boldsymbol{x}\in\Omega^{\varepsilon}\end{cases}\tag{2}$$

其中：δ，μ 是正常数；$\boldsymbol{F}=(F_1(s),\ F_2(s),\ \cdots,\ F_{n+1}(s))$，$\nabla\cdot\boldsymbol{F}=\sum\limits_{i=1}^{n+1}\dfrac{\partial}{\partial x_i}F_i$ 且满足：

(i) $F_k(0)=0,\ k=1,2,\cdots,n+1$；

(ii) 在 $\mathbb{R}^1$ 中，$F_k,\ k=1,2,\cdots,n+1$ 是二阶连续可微函数；

(iii) $f_k(s)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F_k(s),\ k=1,2,\cdots,n+1$，且满足 $|f_k(s)|\leqslant C(1+|s|^m),\ k=1,2,\cdots,n+1$ 其中当

---

① 收稿日期：2016-09-07

基金项目：国家自然科学基金项目(11571283)；重庆市博士后科研项目特别资助项目(渝 XM201102006).

作者简介：张强恒(1990-)，男，山东菏泽人，硕士研究生，主要从事偏微分方程现代理论研究.

通信作者：朱朝生，副教授.

$n=1$ 时，$0 \leqslant m < \infty$，当 $n=2$ 时，$0 \leqslant m < 2$，当 $n \geqslant 3$ 时，$m=0$.

为了分析问题(2) 解的极限行为，首先确定问题(2) 的解，给定 $f^{\varepsilon} \in L^{2}(\Omega^{\varepsilon})$，$u_{0} \in H^{1}(\Omega^{\varepsilon})$，应用 Faedo-Galerkin 方法[5-6,8-9] 容易得到问题(2) 的唯一解 $u^{\varepsilon} \in H^{1}(\Omega^{\varepsilon})$；然后引入新区域 $\Omega := \omega \times (0, 1)$，可以通过坐标变换 ζ^{ε} 将 Ω 化为 Ω^{ε}，即 $\zeta^{\varepsilon}: \Omega \longrightarrow \Omega^{\varepsilon}$，$(\boldsymbol{x}, x_{n+1}) \longmapsto (\boldsymbol{x}, \varepsilon g(\boldsymbol{x}) x_{n+1})$. 同时得到 $H^{1}(\Omega^{\varepsilon})$ 到 $H^{1}(\Omega)$ 上的同构映射 Φ^{ε}，即 $\Phi^{\varepsilon}: u \longmapsto v := u \circ \zeta^{\varepsilon}$，则

$$u_{x_i} = v_{x_i} - \frac{x_{n+1} g_{x_i}}{g} v_{x_{n+1}} \qquad i = 1, 2, \cdots, n \qquad u_{x_{n+1}} = \frac{v_{x_{n+1}}}{\varepsilon g}$$

从而问题(2) 可化为

$$\begin{cases} v_t^{\varepsilon} - \dfrac{\delta}{g} \operatorname{div}(\boldsymbol{B}_{\varepsilon} v_t^{\varepsilon}) - \dfrac{\mu}{g} \operatorname{div}(\boldsymbol{B}_{\varepsilon} v^{\varepsilon}) + \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{T}_{\varepsilon} v^{\varepsilon} = h^{\varepsilon} & (\boldsymbol{x}, t) \in \Omega \times (0, \infty) \\ v^{\varepsilon} = 0 & (\boldsymbol{x}, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty) \\ v^{\varepsilon}(\boldsymbol{x}, 0) = v_0^{\varepsilon}(\boldsymbol{x}) & \boldsymbol{x} \in \Omega \end{cases} \tag{3}$$

其中：

$$h^{\varepsilon} = \Phi^{\varepsilon}(f^{\varepsilon})$$

$$\boldsymbol{f} = (f_1(u), f_2(u), \cdots, f_{n+1}(u))$$

$$\boldsymbol{T}_{\varepsilon} v = \left(v_{x_1} - \frac{g_{x_1} x_{n+1} v_{x_{n+1}}}{g}, \cdots, v_{x_n} - \frac{g_{x_n} x_{n+1} v_{x_{n+1}}}{g}, \frac{v_{x_{n+1}}}{\varepsilon g} \right)$$

$$\boldsymbol{B}_{\varepsilon} v = \begin{pmatrix} c g v_{x_1} - x_{n+1} g_{x_1} v_{x_{n+1}} \\ \vdots \\ g v_{x_n} - x_{n+1} g_{x_n} v_{x_{n+1}} \\ -\sum\limits_{i=1}^{n} x_{n+1} g_{x_i} v_{x_i} + \dfrac{1}{\varepsilon^2 g} \left[1 + \sum\limits_{i=1}^{n} (\varepsilon x_{n+1} g_{x_i})^2 \right] v_{x_{n+1}} \end{pmatrix}$$

因为 Φ^{ε} 是同构映射，所以 $u^{\varepsilon} \in H^{1}(\Omega^{\varepsilon})$ 是问题(2) 的唯一解当且仅当 $v^{\varepsilon} \in H^{1}(\Omega)$ 是问题(3) 的唯一解. 因此为了得到 u^{ε} 的极限行为只需分析 v^{ε} 的极限行为. 最后由于区域 Ω^{ε} 扰动的性质，当 $\varepsilon \to 0$ 时问题(3) 的解 v^{ε} 不依赖于 x_{n+1}，所以我们考虑如下问题

$$\begin{cases} v_t - \dfrac{\delta}{g} \operatorname{div}(g \nabla v_t) - \dfrac{\mu}{g} \operatorname{div}(g \nabla v) + \boldsymbol{f} \cdot \nabla v = \hat{h} & (\boldsymbol{x}, t) \in \omega \times (0, \infty) \\ v = 0 & (\boldsymbol{x}, t) \in \partial\omega \times (0, \infty) \\ v(\boldsymbol{x}, 0) = v_0(\boldsymbol{x}) & \boldsymbol{x} \in \omega \end{cases} \tag{4}$$

其中：$\hat{h} \in L^{2}(\omega)$，$v_0(x) \in H^{1}(\omega)$，应用 Faedo-Galerkin 方法，可以得到问题(4) 的唯一解 $v^{0} \in H^{1}(\omega)$.

本文的主要目的是证明在区域 Ω 上，问题(3) 的解 υ^{ε} 收敛于问题(4) 的解 $E\upsilon^{0}$. 区域 Ω^{ε} 随参量 ε 的变化而变化，当 $\varepsilon \to 0$ 时区域 Ω^{ε} 将变为区域 ω. 为了保留区域 Ω^{ε} 可测子集的相关性质，考虑 $L^{2}(\Omega^{\varepsilon})$ 空间并赋予等价范

$$|||u|||_{L^2(\Omega^{\varepsilon})} = \left(\varepsilon^{-1} \int_{\Omega^{\varepsilon}} |u|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x} \right)^{\frac{1}{2}}$$

和 $H^{1}(\Omega^{\varepsilon})$ 空间并赋予等价范

$$|||u|||_{H^1(\Omega^\varepsilon)}=\left(\varepsilon^{-1}\int_{\Omega^\varepsilon}|\nabla_x u|^2+|\nabla_{x_{n+1}}u|^2+|u|^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

同样，考虑 $L^2(\Omega)$ 的等价范 $|||u|||_{L^2(\Omega)}=\left(\int_\Omega g(x)|u|^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{\frac{1}{2}}$ 和 $H^1(\Omega)$ 的等价范

$$|||u|||_{H^1(\Omega)}=\left(\int_\Omega g(x)(|\nabla_x u|^2+\frac{1}{\varepsilon^2}|\nabla_{x_{n+1}}u|^2+|u|^2)\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

通过上述定义可知

$$|||u|||_{L^2(\Omega^\varepsilon)}=|||\Phi^\varepsilon(u)|||_{L^2(\Omega)}$$

并且存在正常数 C_1,C_2 有

$$C_1|||u|||_{H^1(\Omega^\varepsilon)}\leqslant|||\Phi^\varepsilon(u)|||_{H^1(\Omega)}\leqslant C_2|||u|||_{H^1(\Omega^\varepsilon)}$$

在本文中规定

$$\|u\|^2_{L^2(Q)}=\int_Q|u|^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

由于比较的函数定义在不同的区域，因此要引入平均算子：

$$M: H^1(\Omega)\longrightarrow H^1(\omega)$$

$$M(u)(\boldsymbol{x})=\int_0^1 u(\boldsymbol{x},x_{n+1})\mathrm{d}x_{n+1}$$

和延拓算子：

$$E: H^1(\omega)\longrightarrow H^1(\Omega)$$

$$E(u)(\boldsymbol{x},x_{n+1})=u(\boldsymbol{x})$$

本文的主要结果如下：

定理 1　设 $v^\varepsilon\in H^1(\Omega)$ 是问题(3)的解，$v^0\in H^1(\omega)$ 是问题(4)的解，则

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|v^\varepsilon-Ev^0\|_{H^1(\Omega)}=0$$

为了证明定理 1，我们先证明下面两个辅助引理：

引理 1　给定 $f^\varepsilon\in L^2(\Omega^\varepsilon)$，$u_0\in H^1(\Omega^\varepsilon)$，则系统(2)的唯一解 u^ε 是有界的.

证　用 u^ε 与问题(2)的第一个方程作内积可得：

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|u^\varepsilon\|^2+\delta\|\nabla u^\varepsilon\|^2)+\mu\|\nabla u^\varepsilon\|^2+\int_{\Omega_\varepsilon}u^\varepsilon\nabla\cdot\boldsymbol{F}(u^\varepsilon)\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}x_{n+1}=(f^\varepsilon,u^\varepsilon)$$

设 $\boldsymbol{G}$ 是 $\boldsymbol{F}$ 的原函数，即

$$\boldsymbol{G}=\int_0^s\boldsymbol{F}(t)\mathrm{d}t\qquad s\in\mathbb{R}$$

那么我们有 $\nabla\cdot\boldsymbol{G}(u)=\boldsymbol{F}(u)\cdot\nabla u$. 因此

$$\int_{\Omega_\varepsilon}u^\varepsilon\nabla\cdot\boldsymbol{F}(u^\varepsilon)\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}x_{n+1}=-\int_{\Omega_\varepsilon}\nabla u^\varepsilon\cdot\boldsymbol{F}(u^\varepsilon)\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}x_{n+1}=-\int_{\Omega_\varepsilon}\nabla\cdot\boldsymbol{G}(u^\varepsilon)\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}x_{n+1}=0$$

所以我们就有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|u^\varepsilon\|^2+\delta\|\nabla u^\varepsilon\|^2)+\mu\|\nabla u^\varepsilon\|^2\leqslant\frac{\mu\lambda_1}{2}\|u^\varepsilon\|^2+\frac{1}{2\mu\lambda_1}\|f^\varepsilon\|^2$$

由 Poincaré 不等式

$$\| u^{\varepsilon} \|^2 \leqslant \frac{1}{\lambda_1} \| \nabla u^{\varepsilon} \|^2$$

得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\| u^{\varepsilon} \|^2 + \delta \| \nabla u^{\varepsilon} \|^2) + \mu \| \nabla u^{\varepsilon} \|^2 \leqslant \frac{1}{\mu\lambda_1} \| f^{\varepsilon} \|^2$$

又

$$\mu \| \nabla u^{\varepsilon} \|^2 = \frac{\mu}{2} \| \nabla u^{\varepsilon} \|^2 + \frac{\mu}{2} \| \nabla u^{\varepsilon} \|^2 \geqslant \frac{\mu\lambda_1}{2} \| u^{\varepsilon} \|^2 + \frac{\mu}{2\delta}\delta \| \nabla u^{\varepsilon} \|^2 \geqslant C_3(\| u^{\varepsilon} \|^2 + \delta \| \nabla u^{\varepsilon} \|^2)$$

其中：$C_3 = \min\left(\frac{\mu\lambda_1}{2}, \frac{\mu}{2\delta}\right)$. 于是有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\| u^{\varepsilon} \|^2 + \delta \| \nabla u^{\varepsilon} \|^2) + C_3(\| u^{\varepsilon} \|^2 + \delta \| \nabla u^{\varepsilon} \|^2) \leqslant \frac{1}{\mu\lambda_1} \| f^{\varepsilon} \|^2$$

再由Gronwall不等式得

$$\| u^{\varepsilon} \|^2 + \delta \| \nabla u^{\varepsilon} \|^2 \leqslant \mathrm{e}^{-C_3 t}(\| u^{\varepsilon}(0) \|^2 + \delta \| \nabla u^{\varepsilon}(0) \|^2) + \frac{1}{C_3\mu\lambda_1} \| f^{\varepsilon} \|^2 (1 - \mathrm{e}^{-C_3 t})$$

又因为 $u_0 \in H^1(\Omega^{\varepsilon})$，所以结论成立.

引理2 设 $h^{\varepsilon} \in L^2(\Omega)$，且在 $L^2(\Omega)$ 中 $h^{\varepsilon} \rightharpoonup h^0$，又设 $v^{\varepsilon} \in H^1(\Omega)$ 是问题(3)的唯一解，则存在问题(4)的唯一解 $v^0 \in H^1(\omega)$，当 $\hat{h} = M(h^0)$，使得

$$v^{\varepsilon} \to E v^0, \text{ as } \varepsilon \to 0$$

在 $H^1(\Omega)$ 上是弱收敛，在 $L^2(\Omega)$ 上是强收敛.

证 因为 $\| \cdot \|_{H^1(\Omega^{\varepsilon})}$ 与 $|||\cdot|||_{H^1(\Omega^{\varepsilon})}$ 是等价范，所以由引理1知 $||| u^{\varepsilon} |||_{H^1(\Omega^{\varepsilon})}$ 是有界的. 又

$$c_1 |||u|||_{H^1(\Omega^{\varepsilon})} \leqslant ||| \Phi^{\varepsilon}(u) |||_{H^1(\Omega)} \leqslant c_2 |||u|||_{H^1(\Omega^{\varepsilon})}$$

所以 $\{||| v^{\varepsilon} |||_{H^1(\Omega)}\}_{\varepsilon}$ 是有界的. 因为 $H^1(\Omega)$ 是自反空间且 $H^1(\Omega)$ 是紧嵌入到 $L^2(\Omega)$，所以存在 $\tilde{v}^0 \in H^1(\Omega)$，当 $\varepsilon \to 0$ 时，$v^{\varepsilon} \to \tilde{v}^0$. 在 $H^1(\Omega)$ 上是弱收敛，在 $L^2(\Omega)$ 上是强收敛. 又 $\| \nabla_{x_{n+1}} v^{\varepsilon} \| = O(\varepsilon)$，因此在 $L^2(\Omega)$ 中，当 $\varepsilon \to 0$ 时，$\nabla_{x_{n+1}} v^{\varepsilon} \to 0$，即 $\nabla_{x_{n+1}} \tilde{v}^0 = 0$ 在区域 Ω 上几乎处处成立. 则存在 $v^0 \in H^1(\omega)$，使得 $\tilde{v}^0(\boldsymbol{x}, x_{n+1}) = v^0(\boldsymbol{x})$ 在区域 Ω 上几乎处处成立，即 $\tilde{v}^0(\boldsymbol{x}, x_{n+1}) = E v^0$.

下面说明 $v^0 \in H^1(\Omega)$ 是问题(4)的解. 当 $\varepsilon \to 0$ 时，

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} g h^{\varepsilon} E(\varphi)\mathrm{d}\boldsymbol{x} = & \int_{\Omega} g\left[v_t^{\varepsilon} - \frac{\delta}{g}\mathrm{div}(\boldsymbol{B}_{\varepsilon} v_t^{\varepsilon}) - \frac{\mu}{g}\mathrm{div}(\boldsymbol{B}_{\varepsilon} v^{\varepsilon}) + \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{T}_{\varepsilon} v^{\varepsilon}\right] E(\varphi)\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \\ & \int_{\Omega} g v_t^{\varepsilon} E(\varphi) + \delta \boldsymbol{B}_{\varepsilon} v_t^{\varepsilon} \cdot \nabla E(\varphi) + \mu \boldsymbol{B}_{\varepsilon} v^{\varepsilon} \cdot \nabla E(\varphi) + g \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{T}_{\varepsilon} v^{\varepsilon} E(\varphi)\mathrm{d}\boldsymbol{x} \to \\ & \int_{\Omega} g \tilde{v}_t^0 E(\varphi) + g\delta \nabla \tilde{v}_t^0 \cdot \nabla E(\varphi) + g\mu \nabla \tilde{v}^0 \cdot \nabla E(\varphi) + g \boldsymbol{f} \cdot \nabla \tilde{v}^0 E(\varphi)\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \\ & \int_{\omega} g v_t^0 \varphi + g\delta \nabla v_t^0 \cdot \nabla \varphi + g\mu \nabla v^0 \cdot \nabla \varphi + g \boldsymbol{f} \cdot \nabla v^0 \varphi \mathrm{d}\boldsymbol{x}, \ \forall \varphi \in H^1(\omega)\end{aligned}$$

又当 $\varepsilon \to 0$ 时，

$$\int_{\Omega} g h^{\varepsilon} E(\varphi) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \longrightarrow \int_{\omega} g M(h^{0}) \varphi \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

所以

$$v_t^0 - \frac{\delta}{g} \operatorname{div}(g \nabla v_t^0) - \frac{\mu}{g} \operatorname{div}(g \nabla v^0) + \boldsymbol{f} \cdot \nabla v^0 = \hat{h}$$

从而结论成立.

定理 1 的证明　由引理 2 知，在 $H^1(\Omega)$ 上 $v^{\varepsilon} \rightharpoonup \tilde{v}^0$. 则

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} g(|\nabla \tilde{v}^0|^2 + |\tilde{v}^0|^2) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant \\
&\liminf_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega} g(|\nabla_x v^{\varepsilon}|^2 + |\nabla_{x_{n+1}} v^{\varepsilon}|^2 + |v^{\varepsilon}|^2) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant \\
&\limsup_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega} g(|\nabla_x v^{\varepsilon}|^2 + |\nabla_{x_{n+1}} v^{\varepsilon}|^2 + |v^{\varepsilon}|^2) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant \\
&\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega} g(|\nabla_x v^{\varepsilon}|^2 + |\nabla_{x_{n+1}} v^{\varepsilon}|^2 + |v^{\varepsilon}|^2) \mathrm{d}\boldsymbol{x}
\end{aligned}$$

由 Lebesgue 控制收敛定理得

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega} g(|\nabla_x v^{\varepsilon}|^2 + |\nabla_{x_{n+1}} v^{\varepsilon}|^2 + |v^{\varepsilon}|^2) \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\Omega} g(|\nabla \tilde{v}^0|^2 + |\tilde{v}^0|^2) \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

又

$$\nabla_{x_{n+1}} \tilde{v}^0 = 0$$

所以

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \| v^{\varepsilon} - E v^0 \|_{H^1(\Omega)} = 0$$

推论 1　设 $v^{\varepsilon} \in H^1(\Omega)$ 是问题(3) 的解，$v^0 \in H^1(\omega)$ 是问题(4) 的解，则

$$\lim_{\varepsilon \to 0} ||| v^{\varepsilon} - E v^0 |||_{H^1(\Omega)} = 0$$

由推论 1 以及 Φ^{ε} 是同构映射可知，当 $\varepsilon \to 0$ 时，Benjamin-Bona-Mahony 方程在薄区域上的极限方程为问题(4) 的第一个方程.

参考文献：

[1] ARRIETA M J，CARVALHO A N，PEREIRA M C，et al. Semilinear Parabolic Problems in Thin Domains with a Highly Oscillatory Boundary [J]. Nonlinear Analysis：Theory，Methods and Applications，2011，74(15)：5111－5132.

[2] ARRIETA M J，PEREIRA M C. Homogenization in a Thin Domain with an Oscillatory Boundaries [J]. Journal des Mathmatiques Pures et Appliquees，2011，96(1)：29－57.

[3] ARRIETA M J，PEREIRA M C. Thin Domain with Extremely High Oscillatory Boundaries [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2013，404(1)：86－104.

[4] SILVA R P. Behavior of the P-Laplacian on Thin Domains [J]. International Journal of Differential Equations，2013，2013(1)：210－270.

[5] CELEBI A O，KALANTAROV V K，POLAT M. Attractors for the Generalize Benjamin-Bona-Mahony Equation [J]. Journal of Differential Equations，1999，157(2)：439－451.

[6] TEMAM R. Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics [M]. New York: Springer-Verlag, 1988.

[7] ELSKEN T. Limiting Behavior of Attractors for Systems on Thin Domains [J]. Hiroshima Mathematical Journal, 2002, 32(3): 425－457.

[8] 张升萍，朱朝生. 带牛顿引力势湍流反褶积模型的吸引子 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2016，38(6)：40－44.

[9] 赵立娟，朱朝生. 扩散 Perterlin 粘弹模型的全局吸引子 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2016，38(6)：34－39.

[10] HALE J K, RAUGEL G. Reaction-Diffusion Equations on Thin Domains [J]. Journal des Mathmatiques Pures et Appliquees, 1992, 9(71): 33－95.

Limit Equation of the Benjamin-Bona-Mahony Equations on Thin Domains

ZHANG Qiang-heng，　ZHU Chao-sheng

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: In this paper, we consider the limit equation of the Benjamin-Bona-Mahony equations on thin domains. By showing the limit behavior of the solution of the Benjamin-Bona-Mahony equations, we can obtain the limit equation on thin domains.

Key words: Benjamin-Bona-Mahony equation; thin domain; limit equation

责任编辑　张　枸