第 39 卷第 9 期　　西南大学学报（自然科学版）　　2017 年 9 月
Vol. 39　No. 9　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Sep.　2017

DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2017.09.012

可分 Asplund 空间中随机集值隐函数的下半连续性及应用①

蒋观敏[1]，　杨明歌[2]

1. 重庆邮电大学移通学院，重庆 合川 401520；2. 上海大学 管理学院，上海 200444

摘要：在可分 Asplund 空间中讨论随机集值隐函数的下半连续性及应用，所使用的工具主要有 Ekeland 变分原理、Fermat 原理、Lipschitz 函数的次微分以及次梯度的加法原理等. 首先，给出随机集值隐函数的下半连续性成立的充分条件. 其次，给出其在随机参数广义方程解映射的稳定性分析中的应用. 所得结果改进了已有文献中的相关结果.

关　键　词：正规上导数；随机集值隐函数；下半连续性；Asplund 空间

中图分类号：O224　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9868(2017)09-0081-07

最近，文献[1] 研究了下面的随机集值隐函数定理. 设$(\Omega,\ \mathscr{A})$ 是可测空间，X，P 是拓扑空间，Y 是拓扑向量空间，$F:\Omega \times X \times P \rightrightarrows Y$ 是集值映射，$(x_0,\ p_0) \in X \times P$ 满足对所有的$\omega \in \Omega$，有

$$0 \in F(\omega,\ x_0,\ p_0)$$

成立. 定义集值映射 $G:\Omega \times P \rightrightarrows X$ 如下：

$$G(\omega,\ p) := \{x \in X \mid 0 \in F(\omega,\ x,\ p)\} \tag{1}$$

若对任意的 $p \in P$，$G(\cdot,\ p):\Omega \rightrightarrows X$ 是可测的，则称集值映射 G 为由包含关系

$$0 \in F(\omega,\ x,\ p)$$

定义的随机集值隐函数. Yang 和 Huang[1] 在可分 Asplund空间给出了随机集值隐函数(1) 的局部度量正则性、度量正则性、Lipschitz 性质、非空性和下半连续性成立的充分条件. 文献[1] 中的结果推广了文献[2－3] 中的相关结果. 值得注意的是，文献[1] 必须假设度量投射的内半紧性. 本文的目的是在不假设度量投射的内半紧性的情况下，证明随机集值隐函数的下半连续性.

1　预备知识

引理 1[4]　设$(X,\ d)$ 是完备度量空间，$\varphi: X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ 是真下半连续下有界函数. 任给 $\varepsilon > 0$ 和 $x_0 \in X$ 满足 $\varphi(x_0) \leqslant \inf_X \varphi + \varepsilon$. 则对任意的 $\lambda > 0$，存在 $\bar{x} \in X$ 满足

(a) $\varphi(\bar{x}) \leqslant \varphi(x_0)$，

(b) $d(\bar{x},\ x_0) \leqslant \lambda$，

(c) $\varphi(x) + \dfrac{\varepsilon}{\lambda} d(x,\ \bar{x}) > \varphi(\bar{x})$，$\forall\, x \neq \bar{x}$.

---

①　收稿日期：2016-10-04
基金项目：国家自然科学基金项目(11301254)；中国博士后科学基金项目(2014M551312)；河南省高等学校重点科研项目(15A110036).
作者简介：蒋观敏(1981-)，女，重庆市人，讲师，主要从事非线性泛函分析及应用的研究.
通信作者：杨明歌，副教授.

引理 2[4] 设 $\varphi: X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ 在 $\bar{x}$ 具有有限值. 若 $\bar{x}$ 是 φ 的局部极小值点，则

$$0 \in \hat{\partial}\varphi(\bar{x}) \subset \partial\varphi(\bar{x})$$

引理 3[4] 设 $\varphi: X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ 在 $\bar{x}$ 的某邻域内是 Lipschitz 连续的且系数为 $l \geqslant 0$，则

$$\partial^{\infty}\varphi(\bar{x}) = \{0\}$$

且

$$\| x^* \| \leqslant l, \ \forall x^* \in \partial\varphi(\bar{x})$$

引理 4[4] 设 X 是 Asplund 空间，$\varphi_i: X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $i=1,2,\cdots,n \geqslant 2$ 在 $\bar{x}$ 的某邻域内是下半连续的. φ_i 中除一个外其余的在 $\bar{x}$ 是序列正规上紧(SNEC). 若

$$[x_1{}^* + \cdots + x_n{}^* = 0, \ x_i^* \in \partial^{\infty}\varphi_i(\bar{x})] \Rightarrow x_i^* = 0 \qquad i=1,2,\cdots,n$$

则

$$\partial(\varphi_1 + \cdots + \varphi_n)(\bar{x}) \subset \partial\varphi_1(\bar{x}) + \cdots + \partial\varphi_n(\bar{x})$$

$$\partial^{\infty}(\varphi_1 + \cdots + \varphi_n)(\bar{x}) \subset \partial^{\infty}\varphi_1(\bar{x}) + \cdots + \partial^{\infty}\varphi_n(\bar{x})$$

引理 5[5] 设$(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$是完全 σ-有限可测空间，X 是完备可分度量空间，$G \in \mathscr{A} \times \mathscr{B}(X)$，则投射

$$\pi_{\Omega}(G) := \{\omega \in \Omega: \exists \in X, (\omega, x) \in G\} \in \mathscr{A}$$

是可测的.

引理 6[1] 设$(\Omega, \mathscr{A})$是可测空间，X 是可分 Banach 空间，$f_1: \Omega \longrightarrow X$ 是可测映射，$F_2: \Omega \rightrightarrows X$ 是具有闭值的弱可测集值映射，则 $f_1 + F_2: \Omega \rightrightarrows X$ 是弱可测的.

2 随机集值隐函数的下半连续性

定理 1 设 X, Y 是可分 Asplund 空间，P 是拓扑空间，$(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$是完全 σ-有限可测空间，集值映射 $F: \Omega \times X \times P \rightrightarrows Y$ 满足对任意的 $p \in P$，$F(\cdot, \cdot, p): \Omega \times X \rightrightarrows Y$ 是可测的. 设 $G: \Omega \times P \rightrightarrows X$ 是由(1)式定义的集值映射，$(x_0, p_0) \in X \times P$ 满足对任意 $\omega \in \Omega$ 有 $0 \in F(\omega, x_0, p_0)$. 记 $F_{\omega,p}(\cdot) := F(\omega, \cdot, p)$. 若对任意的 $\omega \in \Omega$，存在常数 $r > 0$ 和 $\sigma > 0$ 使得

(i) 任意的 $p \in B(p_0, r)$，集值映射 $F_{\omega,p}(\cdot)$ 是闭的；

(ii) 任意的$(x, p) \in B(x_0, r) \times B(p_0, r)$ 且 $0 \notin F(\omega, x, p)$，

$$\sigma \leqslant \inf\{\| x^* \|: x^* \in D_N^* F_{\omega,p}(x, y)(y^*), \ y \in B(0, r) \cap F_{\omega,p}(x), \ \| y^* \| = 1\}$$

(iii) 任意的$(x, p) \in B(x_0, r) \times B(p_0, r)$，集值映射 $F(\omega, x, \cdot)$ 在 p 是下半连续的. 则

1) 任意的 $p \in P$，$G(\cdot, p): \Omega \rightrightarrows X$ 是 $\mathscr{B}$-可测的；

2) 任意的 $\omega \in \Omega$，存在常数 $s \in (0, r)$，使得由

$$\widetilde{G}_{\omega}(p) := G(\omega, p) \cap \operatorname{int} B(x_0, r)$$

定义的集值映射 $\widetilde{G}_{\omega}: P \rightrightarrows X$ 在 $B(p_0, s)$ 上是非空的和下半连续的.

证 1) 任意的 $p \in P$，考虑 $G(\cdot, p): \Omega \rightrightarrows X$ 的图像

$$\begin{aligned} \operatorname{gph} G(\cdot, p) = & \{(\omega, x) \in \Omega \times X: x \in G(\omega, p)\} = \\ & \{(\omega, x) \in \Omega \times X: 0 \in F(\omega, x, p)\} = \\ & \{(\omega, x) \in \Omega \times X: F(\omega, x, p) \cap \{0\} \neq \varnothing\} \end{aligned}$$

因为 $F(\cdot, \cdot, p): \Omega \times X \rightrightarrows Y$ 可测，所以

$$\{(\omega, x) \in \Omega \times X: F(\omega, x, p) \cap \{0\} \neq \varnothing\} \in \mathscr{A} \times \mathscr{B}(X)$$

从而

$$\operatorname{gph} G(\cdot, p) \in \mathscr{A} \times \mathscr{B}(X)$$

任给 $B \in \mathscr{B}(X)$，由引理 5 得

$$\pi_\Omega(\mathrm{gph}G(\cdot, p) \cap (\Omega \times B)) \in \mathscr{A}$$

因为

$$\begin{aligned}\pi_\Omega(\mathrm{gph}G(\cdot, p) \cap (\Omega \times B)) = &\{\omega \in \Omega: \exists \in X, (\omega, x) \in \mathrm{gph}G(\cdot, p) \cap (\Omega \times B)\} = \\ &\{\omega \in \Omega: \exists \in B, x \in G(\omega, p)\} = \\ &\{\omega \in \Omega: G(\omega, p) \cap B \neq \varnothing\}\end{aligned}$$

所以

$$\{\omega \in \Omega: G(\omega, p) \cap B \neq \varnothing\} \in \mathscr{A}$$

从而 $G(\cdot, p): \Omega \rightrightarrows X$ 是 $\mathscr{B}$-可测的.

2）任意的 $\omega \in \Omega$. 因为 $0 \in F(\omega, x_0, p_0)$，由条件 (iii)，存在 p_0 的邻域 $\widetilde{U}$ 使得对任意的 $p \in \widetilde{U}$ 有

$$F(\omega, x_0, p) \cap \mathrm{int}B\left(0, \frac{r\sigma}{1+\sigma}\right) \neq \varnothing$$

成立. 故对任意的 $p \in \widetilde{U}$，有

$$\mathrm{dist}(0, F(\omega, x_0, p)) < \frac{r\sigma}{1+\sigma}$$

任取 $s \in (0, r)$ 满足 $B(p_0, s) \subset \widetilde{U}$. 接下来证明 s 满足定理 1 的结论 2).

(a) 任意的 $p \in B(p_0, s)$，证明 $\widetilde{G}_\omega(p)$ 是非空的. 定义函数 $f_p: X \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ 为

$$f_p(x, y) := \| y \| + \delta((x, y); \mathrm{gph}F_{w,p}), \ \forall (x, y) \in X \times Y$$

由条件 (i)，f_p 在 $X \times Y$ 上是下半连续的. 特别地，在 $B(x_0, r) \times B(0, r)$ 上是下半连续的. 若 $f_p(x_0, 0) = 0$，则 $0 \in F_{\omega,p}(x_0)$，从而 $x_0 \in G(\omega, p)$，故 $x_0 \in G(\omega, p) \cap \mathrm{int}B(x_0, r)$，即 $\widetilde{G}_\omega(p) \neq \varnothing$. 若 $f_p(x_0, 0) \neq 0$，则 $0 \notin F_{\omega,p}(x_0)$，故 $\mathrm{dist}(0, F(\omega, x_0, p)) > 0$. 可以假设 $\alpha := \mathrm{dist}(0, F(\omega, x_0, p))$，其中 $0 < \alpha < \dfrac{r\sigma}{1+\sigma} < r$.

任意的 $\varepsilon \in (0, r-\alpha)$ 且 $\dfrac{\alpha+\varepsilon}{r} < \dfrac{\sigma}{1+\sigma}$，由距离函数的定义，存在 $\bar{y} \in F_{\omega,p}(x_0)$ 满足 $\|\bar{y}\| < \alpha + \varepsilon < r$. 令 $\beta := f_p(x_0, \bar{y}) = \|\bar{y}\|$，任意的 $t \in \left(\dfrac{\alpha+\varepsilon}{r}, \dfrac{\sigma}{1+\sigma}\right)$，易知

$$f_p(x_0, \bar{y}) = t \cdot \frac{\beta}{t}$$

显然，

$$f_p(x_0, \bar{y}) \leqslant \inf_{(x, y) \in B(x_0, r) \times B(0, r)} f_p(x, y) + t \cdot \frac{\beta}{t}$$

由引理 1 中的 Ekeland 变分原理，存在 $(\hat{x}, \hat{y}) \in B(x_0, r) \times B(0, r)$ 满足

$$f_p(\hat{x}, \hat{y}) \leqslant f_p(x_0, \bar{y}), \ \|(\hat{x}, \hat{y}) - (x_0, \bar{y})\| \leqslant \frac{\beta}{t}$$

和

$$f_p(\hat{x}, \hat{y}) \leqslant f_p(x, y) + t \cdot \|(x, y) - (\hat{x}, \hat{y})\|, \ \forall (x, y) \in B(x_0, r) \times B(0, r)$$

这意味着

$$(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathrm{gph}F_{w,p}, \ \|\hat{y}\| \leqslant \|\bar{y}\|, \ \|\hat{x} - x_0\| + \|\hat{y} - \bar{y}\| \leqslant \frac{\beta}{t}$$

且对任意的 $(x, y) \in B(x_0, r) \times B(0, r)$，有

$$\|\hat{y}\| \leqslant \|y\| + t(\|x - \hat{x}\| + \|y - \hat{y}\|) + \delta((x, y); \mathrm{gph}F_{w,p}) \tag{3}$$

显然，$\hat{x} \in B(x_0, r)$，$\hat{y} \in B(0, r)$. 因为

$$\| \hat{x} - x_0 \| \leqslant \frac{\beta}{t} < \frac{\alpha + \varepsilon}{t} < r, \quad \| \hat{y} \| \leqslant \| \bar{y} \| < r$$

所以

$$(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathrm{int}B(x_0, r) \times \mathrm{int}B(0, r) = \mathrm{int}(B(x_0, r) \times B(0, r))$$

下面证明 $0 \in F_{\omega, p}(\hat{x})$. 假设 $0 \notin F_{\omega, p}(\hat{x})$，则 $\hat{y} \neq 0$. 定义函数 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3: X \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ 分别为

$$\varphi_1(x, y) := \| y \|$$

$$\varphi_2(x, y) := t(\| x - \hat{x} \| + \| y - \hat{y} \|),$$

$$\varphi_3(x, y) := \delta((x, y); \mathrm{gph}F_{w, p}), \ \forall (x, y) \in X \times Y$$

由(3)式知$(\hat{x}, \hat{y})$是函数 $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$ 在 $X \times Y$ 上的极小值点. 由引理 2 得

$$(0, 0) \in \partial(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)(\hat{x}, \hat{y})$$

显然，φ_1 和 φ_2 在 $X \times Y$ 上是局部 Lipschitz 连续的，且 φ_3 在 $X \times Y$ 上是下半连续的. 由引理 3 易知 $\partial^{\infty}\varphi_1(\hat{x}, \hat{y}) = \{(0, 0)\}$，$\partial^{\infty}\varphi_2(\hat{x}, \hat{y}) = \{(0, 0)\}$ 和 $\partial\varphi_2(\hat{x}, \hat{y}) \subset tB_{X^*} \times \{0\} + \{0\} \times tB_{Y^*}$. 由引理 4 得

$$(0, 0) \in \partial\varphi_1(\hat{x}, \hat{y}) + \partial\varphi_2(\hat{x}, \hat{y}) + \partial\varphi_3(\hat{x}, \hat{y})$$

由函数 φ_1 和 φ_3 的定义得

$$\partial\varphi_1(\hat{x}, \hat{y}) = \{0\} \times \partial \| \cdot \| (\hat{y}), \ \partial\varphi_3(\hat{x}, \hat{y}) = N((\hat{x}, \hat{y}); \mathrm{gph}F_{w, p})$$

因为 $\hat{y} \neq 0$，由文献[6] 命题 2.124 得

$$\partial \| \cdot \| (\hat{y}) = \{y^* \in Y^*: \| y^* \| = 1, \langle y^*, \hat{y} \rangle = \| \hat{y} \| \}$$

故存在 $y_1^* \in Y^*$ 和$(x_3^*, y_3^*) \in N((\hat{x}, \hat{y}); \mathrm{gph}F_{w, p})$ 使得

$$\| y_1^* \| = 1, \ \langle y_1^*, \hat{y} \rangle = \| \hat{y} \|, \ \| x_3^* \| \leqslant t, \ \| y_1^* + y_3^* \| \leqslant t$$

从而，

$$\| y_3^* \| \geqslant 1 - t > 0$$

令

$$x^* := \frac{x_3^*}{\| y_3^* \|} \qquad y^* := -\frac{y_3^*}{\| y_3^* \|}$$

则

$$(x^*, -y^*) \in N((\hat{x}, \hat{y}); \mathrm{gph}F_{w, p})$$

从而

$$x^* \in D_N^* F_{\omega, p}(\hat{x}, \hat{y})(y^*)$$

易知

$$\| y^* \| = 1, \ \| x^* \| = \frac{\| x_3^* \|}{\| y_3^* \|} \leqslant \frac{t}{1 - t} < \sigma$$

这与条件 (ii) 矛盾，故 $0 \in F_{\omega, p}(\hat{x})$，即 $\hat{x} \in G(\omega, p)$，从而 $\widetilde{G}_{\omega}(p) \neq \varnothing$.

(b) 任意的 $p \in B(p_0, s)$，证明 $\widetilde{G}_{\omega}(\cdot)$ 在 p 是下半连续的，只需证明：任意的 $x \in \widetilde{G}_{\omega}(p)$ 和任意的 $\varepsilon > 0$，存在常数 $t > 0$ 满足

$$\widetilde{G}_{\omega}(p') \cap \mathrm{int}B(x, \varepsilon) \neq \varnothing, \ \forall p' \in B(p, t)$$

因为 $x \in \widetilde{G}_{\omega}(p)$，所以 $0 \in F(\omega, x, p)$，$x \in \mathrm{int}B(x_0, r)$. 任取 $0 < \eta < \varepsilon$ 满足 $B(x, \eta) \subset B(x_0, r)$ 和 $B(p, \eta) \subset B(p_0, r)$. 用$(x, p)$替代$(x_0, p_0)$，用常数 η 替代 r，用球 $B(x, \eta)$,$B(0, \eta)$，$B(p, \eta)$ 和 $B\left(0, \frac{\eta\sigma}{1 + \sigma}\right)$ 分别替代 $B(x_0, r)$,$B(0, r)$,$B(p_0, r)$ 和 $B\left(0, \frac{r\sigma}{1 + \sigma}\right)$，类似于上面的证明，存在常数

$0<t<\eta$ 满足

$$G(\omega,p')\cap \mathrm{int}B(x,\eta)\neq\varnothing \qquad \forall p'\in B(p,t) \tag{4}$$

因为 $\mathrm{int}B(x,\eta)\subset \mathrm{int}B(x_0,r)\cap \mathrm{int}B(x,\varepsilon)$，由(4)式得

$$G(\omega,p')\cap \mathrm{int}B(x_0,r)\cap \mathrm{int}B(x,\varepsilon)\neq\varnothing,\ \forall p'\in B(p,t)$$

即

$$\widetilde{G}_\omega(p')\cap \mathrm{int}B(x,\varepsilon)\neq\varnothing \qquad \forall p'\in B(p,t)$$

注 1　定理 1 与文献[1]定理 3.12 类似，但是值得注意的是文献[1]定理 3.12 需要假设度量投射的内半紧性，而定理 1 不需要.

考虑定理 1 的确定性情形，得到下面的推论.

推论 1　设 X, Y 是 Asplund 空间，P 是拓扑空间，$F: X\times P\rightrightarrows Y$ 是集值映射，$G: P\rightrightarrows X$ 是由 $G(p):=\{x\in X\mid 0\in F(x,p)\}$ 定义的集值隐函数，$(x_0,p_0)\in X\times P$ 且 $0\in F(x_0,p_0)$. 记 $F_p(\cdot):=F(\cdot,p)$. 若存在常数 $r>0$ 和 $\sigma>0$ 使得

(i) 任意的 $p\in B(p_0,r)$，集值映射 $F_p(\cdot)$ 是闭的；

(ii) 任意的 $(x,p)\in B(x_0,r)\times B(p_0,r)$ 且 $0\notin F(x,p)$，

$$\sigma\leqslant\inf\{\|x^*\|: x^*\in D_N^*F_p(x,y)(y^*),\ y\in B(0,r)\cap F_p(x),\ \|y^*\|=1\}$$

(iii) 任意的 $(x,p)\in B(x_0,r)\times B(p_0,r)$，集值映射 $F(x,\cdot)$ 在 p 是下半连续的.

则存在常数 $s\in(0,r)$，使得由

$$\widetilde{G}(p):=G(p)\cap \mathrm{int}B(x_0,r)$$

定义的集值映射 $\widetilde{G}: P\rightrightarrows X$ 在 $B(p_0,s)$ 上是非空的和下半连续的.

注 2　推论 1 说明文献[7]推论 3.3 和文献[8]定理 5.1 中的条件“$F(x_0,\cdot)$ 在 $(p_0,0)$ 是内半连续的”可以去掉. 进一步，推论 1 包含文献[3]定理 3.1 为特例，可以从下述 4 个方面阐述：

(a) 文献[3]定理 3.1 中的条件“F 在 (x_0,p_0) 周围具有非空值”被去掉；

(b) 文献[3]定理 3.1 中的条件“任意的 $p\in P$，集值映射 $F_p(\cdot)$ 是闭的”被推论 1 中较弱的条件“任意的 $p\in B(p_0,r)$，集值映射 $F_p(\cdot)$ 是闭的”取代；

(c) 文献[3]定理 3.1 中的条件(A1)显然意味着推论 1 中的条件(ii)成立；

(d) 文献[3]定理 3.1 中的条件(A2)被去掉.

3　随机参数广义方程解映射的稳定性分析

本节考虑(2)式中的 F 具有如下的特殊形式：

$$F(\omega,x,p)=f(\omega,x,p)+Q(\omega,x,p)$$

其中 $f: \Omega\times X\times P\longrightarrow Y$ 是单值映射，$Q: \Omega\times X\times P\rightrightarrows Y$ 是集值映射. 此时，(2)式退化为

$$0\in f(\omega,x,p)+Q(\omega,x,p) \tag{5}$$

这个随机广义方程的确定性形式是由 Robinson[9] 提出的. 众所周知，(5)式的确定性情形为数学规划、补问题、变分不等式、最优控制、数理经济、均衡和其他与优化相关的领域的最优解的统一研究提供了方便的框架.

与(5)式相关的解映射 $G: \Omega\times P\rightrightarrows X$ 定义为

$$G(\omega,p)=\{x\in X: 0\in f(\omega,x,p)+Q(\omega,x,p)\} \tag{6}$$

下面将建立关于(6)式中解映射的下半连续性的充分条件.

定理 2　设 X 是可分 Asplund 空间，Y 是 σ-紧可分 Asplund 空间，P 是拓扑空间，$(\Omega,\mathscr{A},\mu)$ 是完全 σ-有限可测空间，$f: \Omega\times X\times P\longrightarrow Y$ 是单值映射，集值映射 $Q: \Omega\times X\times P\rightrightarrows Y$ 满足对任意的 $p\in P$，$f(\cdot,\cdot,p)$ 是可测的，$Q(\cdot,\cdot,p)$ 是弱可测的且具有闭值. 设 $G: \Omega\times P\rightrightarrows X$ 是由(6)式定义的解映射，

$(x_0, p_0) \in X \times P$ 且对所有的 $\omega \in \Omega$ 有 $(\omega, x_0, p_0, -f(\omega, x_0, p_0)) \in \mathrm{gph}Q$ 成立. 令 $f_{\omega, p}(\cdot) := f(\omega, \cdot, p)$, $Q_{\omega, p}(\cdot) := Q(\omega, \cdot, p)$. 若对任意的 $\omega \in \Omega$, 存在常数 $r > 0$ 和 $\sigma > 0$ 满足:

(i) 任意的 $p \in B(p_0, r)$, 映射 $f_{\omega, p}(\cdot)$ 在 X 上是严格可微的, 集值映射 $Q_{\omega, p}(\cdot)$ 是闭的;

(ii) 任意的 $(x, p) \in B(x_0, r) \times B(p_0, r)$ 且 $(\omega, x, p, -f(\omega, x, p)) \notin \mathrm{gph}Q$,

$$\sigma \leqslant \inf\{\|x^*\| : x^* \in \nabla f_{\omega, p}(x)^* y^* + D_N^* Q_{\omega, p}(x, y - f_{\omega, p}(x))(y^*),$$
$$y \in B(0, r) \cap (f_{\omega, p}(x) + Q_{\omega, p}(x)), \|y^*\| = 1\}$$

(iii) 任意的 $(\omega, x, p) \in \Omega \times B(x_0, r) \times B(p_0, r)$, 映射 $f(\omega, x, \cdot)$ 在 p 是连续的, 集值映射 $Q(\omega, x, \cdot)$ 在 p 是下半连续的. 则

1) 任意的 $p \in P$, $G(\cdot, p): \Omega \rightrightarrows X$ 是 $\mathscr{B}$-可测的;

2) 任意的 $\omega \in \Omega$, 存在常数 $s \in (0, r)$ 使得由

$$\widetilde{G}_\omega(p) := G(\omega, p) \cap \mathrm{int}B(x_0, r)$$

定义的集值映射 $\widetilde{G}_\omega: P \rightrightarrows X$ 在 $B(p_0, s)$ 上是非空的和下半连续的.

证 定义映射 $F: \Omega \times X \times P \rightrightarrows Y$ 为

$$F(\omega, x, p) = f(\omega, x, p) + Q(\omega, x, p), \ \forall (\omega, x, p) \in \Omega \times X \times P$$

令

$$F_{\omega, p}(\cdot) := F(\omega, \cdot, p)$$

则

$$F_{\omega, p}(\cdot) = f_{\omega, p}(\cdot) + Q_{\omega, p}(\cdot)$$

显然,

$$(\omega, x_0, p_0, -f(\omega, x_0, p_0)) \in \mathrm{gph}Q$$

等价于 $0 \in F(\omega, x_0, p_0)$. 由引理 6, 任意的 $p \in P$, $F(\cdot, \cdot, p): \Omega \times X \rightrightarrows Y$ 是弱可测的. 因为 Y 是 σ-紧的, 由文献[10]定理 3.2(ii), $F(\cdot, \cdot, p): \Omega \times X \rightrightarrows Y$ 是可测的. 任意的 $\omega \in \Omega$, 存在常数 $r > 0$ 和 $\sigma > 0$ 满足条件(i)和(ii). 由条件(i), 容易验证: 任意的 $p \in B(p_0, r)$, 集值映射 $F_{\omega, p}(\cdot)$ 是闭的. 由条件(ii)和文献[4]定理 1.62 知任意的 $(x, p) \in B(x_0, r) \times B(p_0, r)$ 且 $0 \notin F(\omega, x, p)$, 有

$$\sigma \leqslant \inf\{\|x^*\| : x^* \in D_N^* F_{\omega, p}(x, y)(y^*), y \in B(0, r) \cap F_{\omega, p}(x), \|y^*\| = 1\}$$

由条件(iii), 任意的 $(\omega, x, p) \in \Omega \times B(x_0, r) \times B(p_0, r)$, 集值映射 $F(\omega, x, \cdot)$ 在 p 是下半连续的. 综上可知, 定理 1 的所有条件均满足, 由定理 1 可得定理 2 成立.

注 3 定理 2 的确定性情形与文献[1]定理 4.9 类似, 但是值得注意的是文献[1]定理 4.9 需要假设度量投射的内半紧性, 而定理 2 不需要.

参考文献:

[1] YANG M G, HUANG N J. Random Implicit Function Theorems in Asplund Spaces with Applications [J]. Journal of Nonlinear and Convex Analysis, 2013, 14(3): 497-517.

[2] HUY N Q, YAO J C. Stability of Implicit Multifunctions in Asplund Spaces [J]. Taiwanese Journal of Mathematics, 2009, 13(1): 47-65.

[3] LEE G M, TAM N N, YEN N D. Normal Coderivative for Multifunctions and Implicit Function Theorems [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2008, 338(1): 11-22.

[4] MORDUKHOVICH B S. Variational Analysis and Generalized Differentiation, Vol. I: Basic Theory, Vol. II: Applications [M]. Berlin: Springer, 2006.

[5] AUBIN J P, FRANKOWSKA H. Set-Valued Analysis [M]. Berlin: Birkhäuser, 1990.

[6] BONNANS J F, SHAPIRO A. Perturbation Analysis of Optimization Problems [M]. New York: Springer, 2000.

[7] DUREA M. Openness Properties for Parametric Set-Valued Mappings and Implicit Multifunctions [J]. Nonlinear Analy-

sis：Theory，Methods and Applications，2010，72(2)：571－579.
[8] DUREA M，STRUGARIU R. Quantitative Results on Openness of Set-Valued Mappings and Implicit Multifunction Theorems [J]. Pacific Journal of Optimization，2010，6(3)：533－549.
[9] ROBINSON S M. Stability Theory for Systems of Inequalities，II. Differentiable Nonlinear Systems [J]. SIAM Journal on Numerical Analysis，1976，13(4)：497－513.
[10] HIMMELBERG C J. Measurable Relations [J]. Fundamenta Mathematicae，1975，87(1)：53－72.

Lower Semicontinuity of Random Implicit Multifunctions and Its Applications in Separable Asplund Spaces

JIANG Guan-min[1]，　YANG Ming-ge[2]

1. *College of Mobile Telecommunications，Chongqing University of Posts and Telecom，Hechuan，Chongqing 401520，China；*
2. *School of Management，Shanghai University，Shanghai 200444，China*

Abstract：This paper is mainly devoted to discussing lower semicontinuity of random implicit multifunctions in separable Asplund spaces. The tools involved are Ekeland′s variational principle，Fermat′s rules，subdifferentials of Lipschitzian functions and sum rules for basic and singular subgradients. Firstly，the new sufficient conditions for the lower semicontinuity of random implicit multifunctions are given. Secondly，applications to stability analysis of solution maps for random parametric generalized equations are given. The results obtained improve the corresponding known results in literature.

Key words：normal coderivative；random implicit multifunction；lower semicontinuity；Asplund space

责任编辑　张　枸