第 39 卷第 9 期　　西南大学学报(自然科学版)　　2017 年 9 月
Vol. 39　No. 9　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Sep.　2017

DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2017.09.015

耦合吊桥方程指数吸引子的存在性①

罗 旭 东

西北师范大学 数学与统计学院，兰州 730070

摘要：运用所谓的加强的平坦性条件，证明了耦合吊桥方程指数吸引子的存在性，并且改进和推广了一些已有结果.

关 键 词：耦合吊桥方程；加强的平坦性条件；指数吸引子

中图分类号：O175.29　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9868(2017)09-0102-05

我们考虑耦合吊桥方程

$$
\begin{cases}
u_{tt}+\alpha_1 u_t+\Delta^2 u+k(u-v)^+ + f_1(u)=g_1(x),\ x\in\Omega \\
v_{tt}+\alpha_2 v_t-\Delta v-k(u-v)^+ + f_2(v)=g_2(x),\ x\in\Omega \\
u=\Delta u=0,\ v=0,\ x\in\partial\Omega \\
u(x,0)=u_1(x),\ u_t(x,0)=u_2(x) \\
v(x,0)=v_1(x),\ v_t(x,0)=v_2(x)
\end{cases}
\tag{1}
$$

指数吸引子的存在性，其中：$\Omega\subset\mathbb{R}^2$ 是具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界开区域；$\alpha_1,\alpha_2>0$；$k>0$. 吊桥方程由 McKenna 和 Lazer 作为非线性分析领域的一个新问题被首次提出. 文献[1] 证明了单个吊桥方程指数吸引子的存在性；文献[2] 研究了吊桥方程的强解和强全局吸引子的存在性；文献[3] 中当非线性项满足的条件比文献[1-2] 的条件弱时，作者进一步证明了耦合吊桥方程的强解和强全局吸引子的存在性. 与吊桥方程整体解的长时间行为相关的其它文献可参看[4-7]. 本文运用文献[8] 提出的加强的平坦性条件获得了问题(1) 在弱拓扑空间中指数吸引子的存在性，然而，非线性函数满足的条件比文献[1] 弱.

1　函数集和准备工作

不失一般性，令

$$
Y_0=L^2(\Omega)\qquad Y_1=H_0^1(\Omega)\qquad Y_2=D(A)=H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)
$$
$$
Y_3=D(A^2)=\{u\in H^4(\Omega)\mid A^2u\in L^2(\Omega),\ u|_{\partial\Omega}=\Delta u|_{\partial\Omega}=0\}
$$

记 $V_1=Y_2\times Y_0$，$V_2=Y_1\times Y_0$. 记 Y_0 的内积和范数为$(\cdot,\cdot)$，$|\cdot|$. 记 Y_1,Y_2,Y_3 的范数分别为 $\|\cdot\|$，$|Au|$，$|A^2u|$，其中 $A=-\Delta$，$A^2=\Delta^2$. 根据 Poincaré 不等式得

$$
\begin{gathered}
\lambda_1|u|^2\leqslant\|u\|^2,\ \forall u\in Y_1 \\
|Au|^2\geqslant\lambda_1\|u\|^2,\ \forall u\in Y_2
\end{gathered}
\tag{2}
$$

其中 $\lambda_1>0$ 是 Δ^2 的第一特征值. 为了书写方便，记 $E_0=V_2\times V_1$，并且赋予范数

---

① 收稿日期：2017-06-15
基金项目：国家自然科学基金项目(115561064)；西北师范大学科研创新团队项目(NWNU-LKQN-14-6).
作者简介：罗旭东(1992-)，男，甘肃兰州人，硕士研究生，主要从事无穷维动力系统研究.

$$\| z \|_{E_0} = \| (u, v, u_t, v_t) \|_{E_0} = \left(\frac{1}{2} (|Au|^2 + \| v \|^2 + | u_t |^2 + | v_t |^2) \right)^{\frac{1}{2}}$$

为了证明本文的主要结论，假设非线性函数 $f_1 \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 和 $f_2 \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 并且满足下面的条件：

$$\liminf_{|s| \to \infty} \frac{f_1(s)}{s} \geqslant \lambda_1 \qquad \liminf_{|s| \to \infty} \frac{f_2(s)}{s} \geqslant \lambda_1 \tag{3}$$

$$| f_1(s) | \leqslant C(1 + | s |^p) \qquad \forall p \geqslant 1, s \in \mathbb{R} \tag{4}$$

$$| f_2(s) | \leqslant C(1 + | s |^p) \qquad \forall p \geqslant 1, s \in \mathbb{R} \tag{5}$$

除此以外，还需要下面一些抽象结果.

定义1(加强的平坦性条件) 设 X 为一致凸的Banach空间，对任意的有界子集 $B \subset X$，存在 X 的有限维子空间 $X_1 \subset X$ 及 $k, l > 0$ 和 $T > 0$ 使得

(i) $P_m(\bigcup_{s \geqslant t} S(s)B)$ 有界；

(ii) $\| (I - P_m)(\bigcup_{s \geqslant t} S(s)x) \|_X \leqslant k\mathrm{e}^{-lt} + \phi(m)$，$\forall x \in B, t \geqslant T$.

其中：$P_m: X \longrightarrow X_1$ 为有界投影，$\dim X_1 = m$，$\phi(m)$ 为一实函数，满足 $\lim_{s \to \infty} \phi(s) = 0$.

引理1[8] 设 $\{S(t)\}_{t \geqslant 0}$ 为完备度量空间 X 中的半群，B 为 $\{S(t)\}_{t \geqslant 0}$ 在空间 X 中的有界吸收集，则以下条件等价：

(i) $\bigcup_{s \geqslant t} S(s)B$ 的非紧性测度是指数衰退的，即存在 $k, l > 0$ 使得

$$\alpha(\bigcup_{s \geqslant t} S(s)B) \leqslant k\mathrm{e}^{-lt}$$

(ii) 半群 $\{S(t)\}_{t \geqslant 0}$ 在 X 中拥有指数吸引子.

引理2[8] 设 X 中的半群 $\{S(t)\}_{t \geqslant 0}$ 满足加强的平坦性条件，则 $\bigcup_{s \geqslant t} S(s)B$ 的非紧性测度是指数衰退的.

引理3[8] 设 X 为一致凸的Banach空间，$\{S(t)\}_{t \geqslant 0}$ 为 X 中的强连续或强弱连续半群. 则 $\{S(t)\}_{t \geqslant 0}$ 在 X 中拥有指数吸引子，如果它满足：

(i) $\{S(t)\}_{t \geqslant 0}$ 在 X 中存在有界吸收集 $B \subset X$；

(ii) $\{S(t)\}_{t \geqslant 0}$ 满足加强的平坦性条件.

引理4[5-6] 假设条件(3)-(5)成立，$\alpha_1 > 0$，$\alpha_2 > 0$，$k > 0$，若 $g_1(x)$，$g_2(x) \in L^2(\Omega)$，$(u_1, u_2) \in V_1$，$(v_1, v_2) \in V_2$，则问题(1)存在唯一解 (u, v) 满足

$$u \in C([0, T], Y_2) \qquad u_t \in C([0, T], Y_0)$$

$$v \in C([0, T], Y_1) \qquad v_t \in C([0, T], Y_0)$$

$\forall T > 0$，并且 $\{u_1, v_1, u_2, v_2\} \longrightarrow \{u(t), u_t(t), v(t), v_t(t)\}$ 在 $V_1 \times V_2$ 中连续.

利用引理4，可以定义与问题(1)相关的 C^0 半群 $S(t)$，即

$$S(t): \{u_1, v_1, u_2, v_2\} \longrightarrow \{u(t), v(t), u_t(t), v_t(t)\} \qquad t \geqslant 0$$

且 $S(t)$ 将 $V_1 \times V_2$ 映射到它本身.

2 指数吸引子的存在性

由引理2，为了证明指数吸引子的存在性，首先需要下面的结论.

引理5[5](有界吸收集) 设 $\alpha_1 > 0$，$\alpha_2 > 0$，$k > 0$，$g_1, g_2 \in L^2(\Omega)$，$f_1 \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$，$f_2 \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 满足条件(3)-(5)，则与问题(1)相关的解半群 $S(t)$ 在 $V_1 \times V_2$ 中存在有界吸收集.

引理6[9] 设 $\alpha_1 > 0$，$\alpha_2 > 0$，$k > 0$，$f_1 \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$，$f_2 \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 满足条件(3)-(5)，则 $(f_1, f_2): Y^2 \times Y^1 \longrightarrow Y^0 \times Y^0$ 为紧连续.

下面证明半群 $S(t)$ 满足引理2中的加强的平坦性条件.

定理1 设 $\alpha_1 > 0$，$\alpha_2 > 0$，$\alpha_3 > 0$，$g_1, g_2 \in L^2(\Omega)$，$f_1 \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$，$f_2 \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 满足条件(3)-

(5)，则问题(1) 对应的解半群 $S(t)$ 在 $V_1 \times V_2$ 中满足加强的平坦性条件.

证　设(γ_i, λ_j)，$i, j = 1,2,\cdots$ 为算子 $A^2 \times A$ 在空间 $Y_2 \times Y_1$ 中的特征值，满足

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_j \leqslant \cdots$$

$$0 < \gamma_1 < \gamma_2 \leqslant \cdots \leqslant \gamma_i \leqslant \cdots$$

且当 $j \to \infty$ 时，$\lambda_j \to \infty$；当 $i \to \infty$ 时 $\gamma_i \to \infty$，(x_j, ω_i) 为特征值(λ_j, γ_i) 对应的特征向量，它们构成空间 $Y_2 \times Y_1$ 的一组正交基，满足：

$$A^2 x_j = \lambda_j x_j, \ \forall j \in \mathbb{N}$$

$$A\omega_i = \gamma_i \omega_i, \ \forall i \in \mathbb{N}$$

设 $H_m = span\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$，$Q_n = span\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$，$P_m: Y_2 \longrightarrow H_m$ 为正交投影，$Q_n: Y_1 \longrightarrow G_n$ 也为正交投影，对 $\forall (u, u_t, v, v_t) \in V_1 \times V_2$，我们作如下分解

$$(u, u_t, v, v_t) = (u_1, u_{1t}, v_1, v_{1t}) + (u_2, u_{2t}, v_2, v_{2t})$$

其中

$$(u_1, u_{1t}, v_1, v_{1t}) = (P_m u, P_m u_t, Q_n v, Q_n v_t)$$

选取 $0 < \varepsilon < 1$，且 $0 < \varepsilon(\alpha - \varepsilon) < \lambda_1$. 用 $\phi = u_{2t} + \varepsilon u_2$，$\psi = v_{2t} + \varepsilon v_2$ 分别作为试验函数与(1) 式中的两个式子在空间 $L^2(\Omega)$ 中作内积，计算后得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(|\psi|^2 + |\phi|^2 + |Au_2|^2 + \|v_2\|^2) + (\alpha_2 - \varepsilon)|\psi|^2 + \\&(\alpha_1 - \varepsilon)|\phi|^2 - \varepsilon(\alpha_2 - \varepsilon)(\psi, v_2) - \varepsilon(\alpha_1 - \varepsilon)(\phi, u_2) + \\&\varepsilon(|Au_2|^2 + \|v_2\|^2) + k((u-v)^+, \phi - \psi) + \\&(f_1(u), \phi) + (f_2(v), \psi) = (g_1(x), \phi) + (g_2(x), \psi)\end{aligned} \tag{6}$$

其中

$$(f_1(u), \phi) \leqslant \frac{\alpha_1 - \varepsilon}{8}|\phi|^2 + 2(\alpha_1 - \varepsilon)^{-1}|(I - P_m)f_1(u)|^2 \tag{7}$$

$$(f_2(v), \psi) \leqslant \frac{\alpha_2 - \varepsilon}{8}|\psi|^2 + 2(\alpha_2 - \varepsilon)^{-1}|(I - Q_n)f_2(v)|^2 \tag{8}$$

$$(g_1(x), \phi) \leqslant \frac{\alpha_1 - \varepsilon}{8}|\phi|^2 + 2(\alpha_1 - \varepsilon)^{-1}|(I - P_m)g_1(x)|^2 \tag{9}$$

$$(g_2(x), \psi) \leqslant \frac{\alpha_2 - \varepsilon}{8}|\psi|^2 + 2(\alpha_2 - \varepsilon)^{-1}|(I - Q_n)g_2(x)|^2 \tag{10}$$

显然，我们可以得到

$$\varepsilon(\alpha_1 - \varepsilon)(\phi, u_2) \leqslant \frac{\alpha_1 - \varepsilon}{4}|\phi|^2 + (\alpha_1 - \varepsilon)\varepsilon^2\|u_2\|^2 \tag{11}$$

$$\varepsilon(\alpha_2 - \varepsilon)(\psi, v_2) \leqslant \frac{\alpha_2 - \varepsilon}{4}|\psi|^2 + (\alpha_2 - \varepsilon)\varepsilon^2|v_2|^2 \tag{12}$$

$$k((u-v)^+, \phi - \psi) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}k|(u_2 - v_2)^+|^2 + \varepsilon k|(u_2 - v_2)^+|^2 \tag{13}$$

所以，结合(6)－(12) 式，根据(2) 式可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(|\psi|^2 + |\phi|^2 + |Au_2|^2 + \|v_2\|^2 + k|(u_2 - v_2)^+|^2) + \frac{1}{2}(\alpha_1 - \varepsilon)|\phi|^2 + \\&\frac{1}{2}(\alpha_2 - \varepsilon)|\psi|^2 - \varepsilon(\lambda_1^{-1})2[(\alpha_1 - \varepsilon)\varepsilon]|Au_2|^2 - \varepsilon\lambda_1^{-1}[(\alpha_2 - \varepsilon)\varepsilon]\|v_2\|^2 + \varepsilon k|(u_2 - v_2)^+|^2 \leqslant \\&2(\alpha_1 - \varepsilon)^{-1}[|(I - P_m)f_1(u)| + |(I - P_m)g_1(x)|] + \\&2(\alpha_2 - \varepsilon)^{-1}[|(I - Q_n)f_2(v)| + |(I - Q_n)g_2(x)|]\end{aligned} \tag{14}$$

因为 $g_1, g_2 \in L^2(\Omega)$，且根据引理 6 可知(f_1, f_2)：$Y^2 \times Y^1 \longrightarrow Y^0 \times Y^0$ 紧连续，所以对任意的 $0 < \delta < \sqrt{\frac{C}{\lambda_m}}$，存在 $m > 0$，使得

$$|(I - P_m)g_1(x)| < \delta \leqslant \sqrt{\frac{C}{\lambda_m}} \tag{15}$$

$$|(I - Q_n)g_2(x)| < \delta \leqslant \sqrt{\frac{C}{\lambda_m}} \tag{16}$$

$$|(I - P_m)f_1(u)| < \delta \leqslant \sqrt{\frac{C}{\lambda_m}}, \tag{17}$$

$$|(I - Q_n)f_2(v)| < \delta \leqslant \sqrt{\frac{C}{\lambda_m}} \tag{18}$$

定义泛函：

$$I(t) = \frac{1}{2}(|\psi|^2 + |\phi|^2 + |Au_2|^2 + \|v_2\|^2 + k|(u_2 - v_2)|^2)$$

并取

$$\omega = \min\{2\varepsilon^2(\lambda_1^{-1})^2(\alpha_1 - \varepsilon),\ 2\varepsilon^2\lambda_1^{-1}(\alpha_2 - \varepsilon),\ \alpha_1 - \varepsilon,\ \alpha_2 - \varepsilon,\ 2\varepsilon\}$$

则有

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I(t) + \omega I(t) \leqslant 2(\alpha_1 - \varepsilon)^{-1}[|(I - P_m)f_1(u)| + |(I - P_m)g_1(x)|] + \\ &2(\alpha_2 - \varepsilon)^{-1}[|(I - Q_n)f_2(v)| + |(I - Q_n)g_2(x)|] \leqslant \\ &\frac{C^*}{\lambda_m} \qquad t \geqslant t_0\end{aligned} \tag{19}$$

根据 Gronwall 引理，可得

$$I(t) \leqslant I(t_0)\mathrm{e}^{-\omega(t-t_0)} + \frac{C^*}{\lambda_m} \qquad t \geqslant t_0 \tag{20}$$

不难验证，存在常数 $C_1 > 1$，使得

$$\|z(t)\|_{E_0}^2 \leqslant I(t) \leqslant C_1\|z(t)\|_{E_0}^2$$

其中

$$z(t) = (u(t),\ v(t),\ u_t(t),\ v_t(t))$$

故

$$\|z(t)\|_{E_0}^2 \leqslant C_1\|z(t_0)\|_{E_0}^2\mathrm{e}^{-\omega(t-t_0)} + \frac{C^*}{\lambda_m} \tag{21}$$

因此，问题(1) 的解半群$\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 在空间 $V_1 \times V_2$ 中满足加强的平坦性条件.

于是，由引理 3,5 和定理 1 即得我们的主要结论：

定理 2(指数吸引子) 设 $\alpha_1 > 0$，$\alpha_2 > 0$，$k > 0$，$g_1, g_2 \in V_1$，$f_1 \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$，$f_2 \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 满足条件(3)－(5)，则与问题(1) 相关的解半群$\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 在空间 $V_1 \times V_2$ 中拥有指数吸引子.

参考文献：

[1] 汪 璇，马 群，马巧珍. 吊桥方程指数吸引子的存在性 [J]. 西北师范大学学报(自然科学版)，2015，51(5)：4－8.

[2] ZHONG C K，MA Q Z，SUN C Y. Existence of Strong Solutions and Global Attractors for the Suspension Bridge Equations [J]. Nonlinear Anal，2007，67：442－454.

[3] MA Q Z，ZHONG C K. Existence of Strong Solutions and Attractors for the Coupled Suspension Bridge Equations [J]. J Diff Equas，2009，246：3755－3775.

[4] 马巧珍，张　翠. 无界区域 R 上吊桥方程的全局吸引子 [J]. 西北师范大学学报(自然科学版)，2014，50(6)：1－4.
[5] 马巧珍，周富敏. 具有双非线性项的吊桥方程一致吸引子的存在性 [J]. 西北师范大学学报(自然科学版)，2013，49(5)：7－9.
[6] MA Q Z，WANG S P，CHEN X B. Uniform Compact Attractors for the Coupled Suspension Bridge Equations [J]. Applied Mathematics and Computeation，2011，217(16)：6604－6615.
[7] LAZER A C，MCKENNA P J. Large-Amplitude Periodic Oscillations in Suspension Bridges：Some New Connection with Nonlinear Analysis [J]. SIAM Rev，1990，32(4)：537－578.
[8] LI Y，WU H，ZHAO T. Necessary and Sufficient Conditions for the Existence of Exponential Attractors for Semigroups and Applications [J]. Nonlinear Anal，2012，75：6297－6305.

The Existence of Exponential Attractors for Coupled Suspension Bridge Equations

LUO Xu-dong

College of Mathematics and Statistics，*Northwest Normal University*，*Lanzhou 730070*，*China*

Abstract：In this paper，the existence of exponential attractors for the coupled suspension bridge equation is proved by using the so called enhanced flattening property，and some known results are improved and extended.

Key words：coupled suspension bridge equation；enhanced flattening property；exponential attractor

责任编辑　张　枸