DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2017.09.016

剩余格上几类 n 重模糊滤子的等价刻画[①]

刘莉君[1,2]

1. 陕西理工大学 数学与计算机科学学院，陕西 汉中 723000；
2. 陕西师范大学 数学与信息科学学院，西安 710062

摘要：滤子是研究逻辑代数的有效工具.文章在剩余格上引入了 n-重模糊蕴涵滤子、n-重模糊极滤子和 n-重模糊正蕴涵滤子的概念，通过研究它们的特征和性质，获得了剩余格上这几类 n-重模糊滤子之间相互转化的条件，研究结果拓展了剩余格上的模糊滤子理论，使剩余格上 n-重模糊滤子概念间的层次关系更加清晰和完善.

关　键　词：剩余格；n-重模糊蕴涵滤子；n-重模糊极滤子；n-重模糊正蕴涵滤子

中图分类号：O159　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9868(2017)09-0107-06

1　预备知识

为给不确定信息处理理论提供可靠且合理的逻辑基础，许多学者提出并研究了非经典逻辑系统，同时，作为非经典逻辑语义系统的各种逻辑代数也被广泛研究.目前，大多数学者都认同剩余格为一种最广泛的逻辑代数结构[1-3]，而滤子是非经典逻辑代数研究领域的一个重要概念，它们对各种逻辑系统及与之匹配的逻辑代数的完备性问题的研究发挥着极其重要的作用.文献[4]在剩余格上引入了布尔滤子和正蕴涵滤子的概念，文献[5]在 BL-代数上深入的研究了模糊正蕴涵滤子和模糊布尔滤子的特性和模糊化问题，文献[6]在剩余格上引入 MTL-滤子并研究了它们的性质，文献[7-8]讨论了各类滤子概念间的相互关系，而文献[9]又在剩余格 BL-代数上提出了重滤子的理论.鉴于此，本文在上述有关工作的基础上，将 BL-代数上的重滤子理论进一步推广到剩余格上的模糊滤子，引入了剩余格上 n-重模糊蕴涵滤子、n-重模糊极滤子和 n-重模糊正蕴涵滤子的概念，考察了它们的若干性质，并利用它们的性质获得了剩余格上这几类 n-重模糊滤子的特征定理，最后系统梳理了这几类 n-重模糊滤子之间的相互关系，获得了一些有意义的结果.研究结果使得剩余格上的模糊滤子理论得到进一步充实和丰富，概念间的层次关系更加的清晰和完善.

下面先给出本文将用到的几个定义.

定义 1[1]　称 $(2,2,2,2,0,0)$-型代数 $L=(M,\wedge,\vee,\otimes,\rightarrow,0,1)$ 为剩余格，若满足以下条件：

(1) $(M,\wedge,\vee,0,1)$ 是有界格；

(2) $(M,\otimes,1)$ 是交换的幺半群；

(3) 对于任意的 $x,y,z\in M$，$x\otimes y\leqslant z\Leftrightarrow y\leqslant x\rightarrow z$.

性质 1[1]　设 $L=(M,\wedge,\vee,\otimes,\rightarrow,0,1)$ 为剩余格，则对于任意的 $x,y,z\in L$，以下条件成立：

(1) $x\rightarrow y=1$ 当且仅当 $x\leqslant y$；

---

① 收稿日期：2016-12-07
基金项目：国家自然科学基金资助项目(11401357)；陕西省教育厅专项科研项目(17JK0145).
作者简介：刘莉君(1980-)，女，陕西汉中人，讲师，主要从事模糊数学与逻辑代数研究.

(2) $1 \to x = x$, $x \to x = 1$, $x \to 1 = 1$, $0 \to x = 1$;

(3) $x \otimes (x \to y) \leqslant y$, $y \leqslant (y \to x) \to x$;

(4) $(x \to y) \otimes (y \to z) \leqslant x \to z$;

(5) $x \to (y \to z) = y \to (x \to z) = (x \otimes y) \to z$;

(6) 若 $x \leqslant y$, 则 $y \to z \leqslant x \to z$, $z \to x \leqslant z \to y$;

(7) $y \to x \leqslant (z \to y) \to (z \to x)$, $x \to y \leqslant (y \to z) \to (x \to z)$;

(8) 约定 $x^n = \underbrace{x \otimes \cdots \otimes x}_{n}$, $n \in \mathbb{N}$, $x^n \to x = 1$;

(9) $x \vee y = ((x \to y) \to y) \wedge ((y \to x) \to x)$, $x \vee y \leqslant (y \to x) \to x$.

定义 2[3] 设 $L = (M, \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1)$ 为剩余格, $\mu: L \to [0, 1]$ 为 L 上的一个模糊集, 如果对于任意的 $x, y \in L$, 满足:

(FF1) $\mu(1) \geqslant \mu(x)$;

(FF2) $\mu(x) \wedge \mu(x \to y) \leqslant \mu(y)$.

那么模糊集 μ 被称为是剩余格 L 上的模糊滤子.

性质 2[3] 设 $L = (M, \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1)$ 为剩余格, 模糊集 μ 为剩余格 L 上的模糊滤子, 则对于任意的 $x, y, z \in L$, 下列性质成立:

(1) 如果 $x \leqslant y$, 则 $\mu(x) \leqslant \mu(y)$, 即 μ 是保序的;

(2) $\mu(x \to y) \leqslant \mu(y \to z) \to \mu(x \to z)$;

(3) $\mu(y \to x) \leqslant \mu(z \to y) \to \mu(z \to x)$;

(4) $\mu(y \otimes x) = \mu(x \wedge y) = \mu(x) \wedge \mu(y)$;

(5) $\mu((x \to y) \otimes (y \to z)) \leqslant \mu(x \to z)$.

定义 3 设 L 是剩余格, 模糊集 μ 为 L 上的模糊滤子, 若对于任意的 $x, y, z \in L$, 满足

$$\mu(1) \geqslant \mu(x)$$

且

$$\mu(x^n \to z) \geqslant \mu(x^n \to (y \to z)) \wedge \mu(x^n \to y)$$

则称 μ 是 L 上的一个 n-重模糊蕴涵滤子($n = 1, 2, \cdots$).

定义 4 设 L 是剩余格, 模糊集 μ 为 L 上的模糊滤子, 若对于任意的 $x, y, z \in L$, 满足

$$\mu(1) \geqslant \mu(x)$$

且

$$\mu(((x^n \to y) \to y) \to x) \geqslant \mu(z \to (y \to x)) \wedge \mu(z)$$

则称 μ 是 L 上的一个 n-重模糊极滤子($n = 1, 2, \cdots$).

定义 5 设 L 是剩余格, 模糊集 μ 为 L 上的模糊滤子, 若对于任意的 $x, y, z \in L$, 满足

$$\mu(1) \geqslant \mu(x)$$

且

$$\mu(y) \geqslant \mu(x \to ((y^n \to z) \to y) \wedge \mu(x)$$

则称 μ 是 L 上的一个 n-重模糊正蕴涵滤子($n = 1, 2, \cdots$).

2 剩余格上几类 n-重模糊滤子的结构与关系

引理 1 设 L 是剩余格, 模糊集 μ 为 L 上的 n-重模糊蕴涵滤子, 则对于任意的 $x \in L$, 有

$$\mu(x^n \to x^{2n}) = \mu(1)$$

证 因为模糊集 μ 为 L 上的 n-重模糊蕴涵滤子, 则对于任意的 $x \in L$, 满足

$$\mu(1) = \mu(x^{2n} \to x^{2n}) \wedge \mu(x^n \to x^n) =$$

$$\mu(x^n \to (x^n \to x^{2n})) \wedge \mu(x^n \to x^n) \leqslant \mu(x^n \to x^{2n})$$

即

$$\mu(x^n \to x^{2n}) \geqslant \mu(1)$$

再结合($FF1$)式可知

$$\mu(x^n \to x^{2n}) = \mu(1)$$

证毕.

引理 2 设 L 是剩余格，模糊集 μ 为 L 上的模糊滤子，则 μ 是 L 上的 n -重模糊正蕴涵滤子的充要条件是：对于任意的 $x, y \in L$，有 $\mu(x) = \mu((x^n \to y) \to x)$.

证 (1) 必要性：设模糊滤子 μ 是剩余格 L 上的 n -重模糊正蕴涵滤子，由定义 5 可知

$$\mu(x) \geqslant \mu(1 \to ((x^n \to y) \to x)) \wedge \mu(1) = \mu(1 \to ((x^n \to y) \to x)) = \mu((x^n \to y) \to x)$$

即

$$\mu(x) \geqslant \mu((x^n \to y) \to x)$$

而另一方面，对于任意的 x，$y \in L$，在剩余格上有

$$x \leqslant (x^n \to y) \to x$$

进而由性质 2 可知

$$\mu(x) \leqslant \mu((x^n \to y) \to x)$$

故综上可得：

$$\mu(x) = \mu((x^n \to y) \to x)$$

(2) 充分性：因为 μ 是剩余格 L 上的模糊滤子，且对于任意 x，$y \in L$，有

$$\mu(x) = \mu((x^n \to y) \to x)$$

那么由定义 2 知

$$\mu(x) \wedge \mu(x \to ((y^n \to z) \to y) \leqslant \mu((y^n \to z) \to y) = \mu(y)$$

即

$$\mu(y) \geqslant \mu(x) \wedge \mu(x \to ((y^n \to z) \to y))$$

由定义 5 可得模糊滤子 μ 是剩余格 L 上的 n -重模糊正蕴涵滤子. 证毕.

定理 1 设 L 是剩余格，模糊集 μ 为 L 上的模糊滤子，若 μ 为剩余格 L 上的 n -重模糊正蕴涵滤子，则 μ 也为剩余格 L 上的 n -重模糊极滤子.

证 因为对于任意的 x，$y \in L$，在剩余格上有

$$x \leqslant ((x^n \to y) \to y) \to x$$

则

$$x^n \leqslant (((x^n \to y) \to y) \to x)^n$$

进而

$$(((x^n \to y) \to y) \to x)^n \to y \leqslant x^n \to y$$

因此

$$\begin{aligned}\mu(1 \to (y \to x)) \wedge \mu(1) = \mu(y \to x) \leqslant \mu[((x^n \to y) \to y) \to ((x^n \to y) \to x)] = \\ \mu[(x^n \to y) \to (((x^n \to y) \to y) \to x)] \leqslant \\ \mu[((((x^n \to y) \to y) \to x)^n \to y) \to (((x^n \to y) \to y) \to x)]\end{aligned}$$

而又因为 μ 为剩余格 L 上的 n -重模糊正蕴涵滤子，故由引理 2 可得：

$$\mu[((((x^n \to y) \to y) \to x)^n \to y) \to (((x^n \to y) \to y) \to x)] = \mu(((x^n \to y) \to y) \to x)$$

因此综上可知

$$\mu(((x^n \to y) \to y) \to x) \geqslant \mu(1 \to (y \to x)) \wedge \mu(1)$$

即 μ 为剩余格 L 上的 n -重模糊极滤子. 证毕.

注1　若模糊集 μ 为 L 上的 n-重模糊极滤子，但并不是 L 上的 n-重模糊正蕴涵滤子.

例1　设 $M=\{0, a, b, 1\}$，其中 $0\leqslant a\leqslant b\leqslant 1$，令 $x\wedge y=\min\{x, y\}$，$x\vee y=\max\{x, y\}$，且在 M 中定义二元运算 $\rightarrow$ 和 $\otimes$ 如表所示：

$\rightarrow$	0	a	b	1
0	1	1	1	1
a	1	1	a	1
b	a	b	1	1
1	0	a	b	1

$\otimes$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	a	0	a
b	0	0	b	b
1	0	a	b	1

则 $L=(M, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1)$ 构成一个剩余格. 在 L 上定义模糊集 $\mu: L\rightarrow[0, 1]$，使 $\mu(0)=\mu(a)=\mu(b)=\beta$，$\mu(1)=\alpha$，其中 $0\leqslant\beta<\alpha\leqslant 1$. 可以验证模糊集 μ 为剩余格 L 上的 n-模糊极滤子，但非 n-重模糊正蕴涵滤子，这是因为 $\mu((b^n\rightarrow 0)\rightarrow b)\neq\mu(b)$，由引理2可知模糊集 μ 不是剩余格 L 上的 n-重模糊正蕴涵滤子.

定理2　设 L 是剩余格，模糊集 μ 为 L 上的模糊滤子，若 μ 为剩余格 L 上的 n-重模糊正蕴涵滤子，则 μ 为剩余格 L 上的 n-重模糊蕴涵滤子.

证　设 L 是剩余格，μ 是 L 上的 n-重模糊正蕴涵滤子，对于任意的 $x, y, z\in L$，由定义2、定义5和引理1有

$$\begin{aligned}&\mu(x^n\rightarrow(y\rightarrow z))\wedge\mu(x^n\rightarrow y)=\mu(y\rightarrow(x^n\rightarrow z))\wedge\mu(x^n\rightarrow y)\leqslant\\&\mu[(x^n\rightarrow y)\rightarrow(x^n\rightarrow(x^n\rightarrow z))]\wedge\mu(x^n\rightarrow y)\leqslant\\&\mu(x^n\rightarrow(x^n\rightarrow z))\leqslant\mu[((x^n\rightarrow z)\rightarrow z)\rightarrow(x^n\rightarrow z)]\leqslant\\&\mu[((x^n\rightarrow z)^n\rightarrow z)\rightarrow(x^n\rightarrow z)]=\mu(x^n\rightarrow z)\end{aligned}$$

即

$$\mu(x^n\rightarrow(y\rightarrow z))\wedge\mu(x^n\rightarrow y)\leqslant\mu(x^n\rightarrow z)$$

综上由定义3可得模糊滤子 μ 为剩余格 L 上的 n-重模糊蕴涵滤子. 证毕.

定理3　设 L 是剩余格，模糊集 μ 是 L 上的 n-重模糊蕴涵滤子，则对于任意的 $x, y\in L$，当 $\mu(x^n\rightarrow(x^n\rightarrow y))=\mu(1)$ 时，μ 为剩余格 L 上的 n-重模糊正蕴涵滤子.

证　因为 μ 为剩余格 L 上的 n-重模糊蕴涵滤子，且对于任意的 $x, y, z\in L$，有

$$\mu(x^n\rightarrow(x^n\rightarrow y))=\mu(1)$$

故由定义2及性质2可知：

$$\begin{aligned}&\mu[(x^n\rightarrow(x^n\rightarrow y))\rightarrow(x^n\rightarrow y)]=\mu(1)\wedge\mu[(x^n\rightarrow(x^n\rightarrow y))\rightarrow(x^n\rightarrow y)]=\\&\mu(x^n\rightarrow(x^n\rightarrow y))\wedge\mu[(x^n\rightarrow(x^n\rightarrow y))\rightarrow(x^n\rightarrow y)]\leqslant\\&\mu(x^n\rightarrow y)\end{aligned}$$

因此就有

$$\mu[(x^n\rightarrow(x^n\rightarrow y))\rightarrow(x^n\rightarrow y)]\leqslant\mu(x^n\rightarrow y)$$

从而可得

$$\begin{aligned}&\mu((x^n\rightarrow y)\rightarrow x)\leqslant\mu[((x^n\rightarrow(x^n\rightarrow y))\rightarrow(x^n\rightarrow y))\rightarrow x]=\\&\mu[((x^{2n}\rightarrow y)\rightarrow(x^n\rightarrow y))\rightarrow x]\leqslant\\&\mu[(x^{2n}\rightarrow x^n)\rightarrow x]=\mu(1)\wedge\mu((x^{2n}\rightarrow x^n)\rightarrow x)=\\&\mu(x^{2n}\rightarrow x^n)\wedge\mu[(x^{2n}\rightarrow x^n)\rightarrow x]\leqslant\mu(x)\end{aligned}$$

即

$$\mu(x)\geqslant\mu((x^n\rightarrow y)\rightarrow x)=\mu(1\rightarrow((x^n\rightarrow y)\rightarrow x))\wedge\mu(1)$$

由定义5可知模糊滤子 μ 为剩余格 L 上的 n-重模糊正蕴涵滤子. 证毕.

注2　剩余格 L 上的 n-重模糊极滤子与 n-重模糊蕴涵滤子之间没有必然等价关系.

例 2　在例 1 所给的剩余格 L 上定义模糊集 $\mu: L\to[0,1]$ 使 $\mu(0)=\mu(a)=\mu(b)=\beta$，$\mu(1)=\alpha$，其中 $0\leqslant\beta<\alpha\leqslant 1$，可以验证模糊集 μ 为剩余格 L 上的 n-重模糊极滤子，但非 n-重模糊蕴涵滤子，这是因为

$$\mu(a^n\to b)=\mu(a)=\beta<\mu(a^n\to(0\to b))\wedge\mu(a^n\to 0)=\mu(1)=\alpha$$

例 3　设 $M=\{0,a,b,1\}$，其中 $0\leqslant a\leqslant b\leqslant 1$，令 $x\wedge y=\min\{x,y\}$，$x\vee y=\max\{x,y\}$，且在 M 中定义二元运算 $\to$ 和 $\otimes$ 如表所示：

$\to$	0	a	b	1
0	1	1	1	1
a	0	1	a	1
b	0	a	1	1
1	0	a	b	1

$\otimes$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	a	a	a
b	0	a	b	b
1	0	a	b	1

则 $L=(M,\wedge,\vee,\otimes,\to,0,1)$ 是一个剩余格. 在 L 上定义模糊集 $\mu: L\to[0,1]$ 使 $\mu(0)=\mu(b)=\beta$，$\mu(1)=\mu(a)=\alpha$，其中 $0\leqslant\beta<\alpha\leqslant 1$，可以验证模糊集 μ 为剩余格 L 上的 n-重模糊蕴涵滤子，但非 n-重模糊极滤子，这是因为

$$\mu(((b^n\to a)\to a)\to b)=\mu(b)=\beta,\ \mu(1\to(a\to b))\wedge\mu(1)=\mu(a)=\alpha$$

显然，$\mu(((b^n\to a)\to a)\to b)<\mu(1\to(a\to b))\wedge\mu(1)$.

定理 4　设 L 是剩余格，若模糊集 μ 既是 L 上的 n-重模糊极滤子又是 L 上的 n-重模糊蕴涵滤子，则 μ 必是 L 上的 n-重模糊正蕴涵滤子.

证　因为 μ 是剩余格 L 上的 n-重模糊极滤子，由定义 4 可知对于任意的 $x,y,z\in L$，有

$$\mu(z\to(y\to x))\wedge\mu(z)\leqslant\mu(((x^n\to y)\to y)\to x)$$

在该式中令 $z=1$，$y=x^n\to y$，则就有

$$\begin{aligned}&\mu((x^n\to y)\to x)\leqslant\mu(((x^n\to(x^n\to y))\to(x^n\to y))\to x)=\\&\mu(((x^{2n}\to y)\to(x^n\to y))\to x)\leqslant\\&\mu((x^{2n}\to x^n)\to x)\end{aligned}$$

又因为 μ 也是剩余格 L 上的 n-重模糊蕴涵滤子，由引理 1 可得

$$\mu(x^{2n}\to x^n)=\mu(1)$$

因此

$$\mu((x^{2n}\to x^n)\to x)=\mu(x^{2n}\to x^n)\wedge\mu((x^{2n}\to x^n)\to x)\leqslant\mu(x)$$

从而

$$\mu(x)\geqslant\mu((x^n\to y)\to x)=\mu(1\to((x^n\to y)\to x))\wedge\mu(1)$$

即 μ 是剩余格 L 上的 n-重模糊正蕴涵滤子. 证毕.

3　结束语

众所周知，滤子是研究逻辑代数的有效工具，文章在剩余格中引入了 n-重模糊蕴涵滤子、n-重模糊极滤子和 n-重模糊正蕴涵滤子的概念，通过研究它们的特征及性质，获得了这几类 n-重模糊滤子之间的相互转化的条件，在下一步的工作中我们将继续研究剩余格上的其它 n-重模糊滤子的特征及性质，使其为非经典逻辑代数的深入研究奠定基础.

参考文献：

[1]　周红军. 概率计量逻辑及其应用[M]. 北京：科学出版社，2015.

[2]　BLOUNT K，TSINAKIS C. The Structure of Residuated Lattices [J]. International Journal of Algebra and Computation，2003，13(4)：437－461.

[3]　ZHU Y Q，XU Y. On Filter Theory of Residuated Lattices [J]. Information Sciences，2010，180(19)：3614－3632.

[4] LIU L Z, LI K T. Boolean Filter and Positive Implicative Filter of Residuated Lattices [J]. Information Sciences, 2007, 177(24): 5725-5738.

[5] LIU L Z, LI K T. Fuzzy Boolean Filter and Positive Implicative Filter of BL-Algebras [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2005, 152(2): 333-348.

[6] HAVESHKI M. A Note on Some Types of Filters in MTL-Algerbras [J]. Fuzzy Set and Systems, 2014, 247(1): 135-137.

[7] BUSNEAG D, PICIU D. Some Types of Filters in Residuated Lattices [J]. Soft Computer, 2014, 18(5): 825-837.

[8] WANG W, SAEID A B. Solutions to Open Problems on Fuzzy Filter of BL Algebras [J]. International Journal of Computational Intelligence Systems, 2015, 8(1): 106-113.

[9] KADJI A, LELE C, NGANOU J B, et al. Fold Theory Applied to Residuated Lattices [J]. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2014(4): 1-12.

The Equivalent Characterization of Several Kinds of *n*-Fold Fuzzy Filters in the Residuated Lattice

LIU Li-jun[1,2]

1. School of Mathematics and Computer Science, Shaanxi University of Technology, Hanzhong Shaanxi 723000, China;

2. School of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xian 710062, China

Abstract: Filter is an effective tool to study the logic algebras. In this paper, the concepts of n-fold fuzzy implicative filter, n-fold fuzzy fantastic filter and n-fold fuzzy positive implicative filter are introduced in the residuated lattice. Some of their properties and characterizations are given. And the conditions for the inter-transformation of these n-fold fuzzy filters in the residuated lattice are obtained. These results extend the theory of fuzzy filters in residuated lattices, and make the relationship between them more clear.

Key words: residuated lattice; n-fold fuzzy implicative filter; n-fold fuzzy fantastic filter; n-fold fuzzy positive implicative filter

责任编辑 包 颖