第 39 卷第 10 期 西 南 大 学 学 报(自然科学版) 2017年10月
Vol. 39 No. 10 Journal of Southwest University (Natural Science Edition) Oct. 2017

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2017.10.006

在偏 b -度量空间中几乎广义 C -压缩映象的不动点存在性①

张志敏， 邓 磊

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：在偏 b -度量空间中引入几乎广义 C -压缩映象，并在一定条件下，证明了偏 b -度量空间中该压缩映象的不动点存在性，该结果改进和推广了近期的相关结果.

关 键 词：偏 b -度量空间；几乎广义 C -压缩；不动点

中图分类号：O177.91 **文献标志码**：A **文章编号**：1673-9868(2017)10-0042-05

文献[1]引入了广义压缩映象，并在度量空间中证明了该映象的不动点定理. 文献[2]在度量空间中证明了非线性弱 C -压缩映象的不动点定理，随后，文献[3]在完备的偏度量空间中引入了几乎广义 C -压缩映象，并在完备偏度量空间中证明了该压缩映象的不动点定理，本文在文献[3]的基础上将几乎广义 C -压缩映象引入到偏 b -度量空间中，并在完备偏 b -度量空间中证明了该压缩映象的不动点的存在性.

1 预备知识

定义 1[3] 设映射 ψ: $\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$，若满足以下条件：

(1) ψ 是连续的；

(2) ψ 非减的；

(3) $\psi(x)=0 \Leftrightarrow x=0$.

则称 ψ 为一个改变距离的映射，Ψ 为改变距离的映射族.

定义 2[3] 设 ϕ: $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ 为一个映射，若满足以下条件：

(1) ϕ 是下半连续的；

(2) ϕ 是非减的；

(3) $\phi(s, t)=0 \Leftrightarrow s=t=0$.

则称 ϕ 为一个满足性质(P)的映射，Φ 为满足性质(P)的映射族.

定义 3[4] 设 X 是非空集合，$s \geqslant 1$ 是给定的实数，设 d: $X \times X \longrightarrow [0, +\infty)$，若 $\forall x, y, z \in X$ 满足以下条件：

(1) $d(x, y)=0 \Leftrightarrow x=y$；

(2) $d(x, y)=d(y, x)$；

(3) $d(x, z) \leqslant s[d(x, y)+d(y, z)]$.

---

① 收稿日期：2016-12-05

基金项目：国家自然科学基金资助项目(11226228).

作者简介：张志敏(1993-)，女，湖北襄阳人，硕士研究生，主要从事非线性泛函分析的研究.

通信作者：邓 磊，教授.

则称(X,d)为一个b-度量空间,s称为(X,d)的系数.

注1 当$s=1$时,(X,d)称为度量空间.

定义4[5] 设X是非空集合,若满足以下条件:

(1) (X,d)是一个b-度量空间;

(2) $(X,\preccurlyeq)$是半序集.

则称$(X,\preccurlyeq,d)$是一个偏b-度量空间.

定义5[3] 设$(X,\preccurlyeq,d)$是偏度量空间,给定$f:X\longrightarrow X$的映射,若$\exists\xi\geqslant 0$和$(\psi,\phi)\in\Psi\times\Phi$,使得$\forall x,y\in X$,$x\preccurlyeq y$有

$$\psi(d(fx,fy))\leqslant\psi(M(x,y))-\phi(M'(x,y),M''(x,y))+\xi\psi(N(x,y))$$

其中

$$M(x,y)=\max\left\{d(x,y),d(x,fx),d(y,fy),\frac{d(x,fy)+d(y,fx)}{2}\right\}$$

$$M'(x,y)=\max\{d(x,y),d(x,fx),d(x,fy)\}$$

$$M''(x,y)=\max\{d(x,y),d(y,fy),d(y,fx)\}$$

$$N(x,y)=\min\{d(x,fx),d(y,fx)\}$$

则称f是偏度量空间中几乎广义C-压缩映象.

定义6 设$(X,\preccurlyeq,d)$是偏b-度量空间,给定$f:X\longrightarrow X$的映射,若$\exists\xi\geqslant 0$和$(\psi,\phi)\in\Psi\times\Phi$,使得$\forall x,y\in X$,$x\preccurlyeq y$有

$$\psi(s^3d(fx,fy))\leqslant\psi(M(x,y))-\phi(M'(x,y),M''(x,y))+\xi\psi(N(x,y))\tag{1}$$

其中

$$M(x,y)=\max\left\{d(x,y),d(x,fx),d(y,fy),\frac{d(x,fy)+d(y,fx)}{2s}\right\}$$

$$M'(x,y)=\max\{d(x,y),d(x,fx),d(x,fy)\}$$

$$M''(x,y)=\max\{d(x,y),d(y,fy),d(y,fx)\}$$

$$N(x,y)=\min\{d(x,fx),d(y,fx)\}$$

则称f是偏b-度量空间中几乎广义C-压缩映象.

注2 当$s=1$时,为文献[3]中几乎广义C-压缩映象.

2 主要结果

定理1 设$(X,\preccurlyeq,d)$是完备偏b-度量空间,设$f:X\longrightarrow X$是非减,连续,几乎广义C-压缩映象,若存在$x_1\in X$,使得$x_1\preccurlyeq fx_1$,则f有不动点.

证 设X中序列$\{x_n\}$满足$\forall n\in\mathbb{N}$,$x_{n+1}=fx_n$,又因为$x_1\preccurlyeq fx_1=x_2$,f非减,则有$x_2=fx_1\preccurlyeq fx_2=x_3$,以此类推有

$$x_1\preccurlyeq x_2\preccurlyeq\cdots\preccurlyeq x_n\preccurlyeq x_{n+1}\preccurlyeq\cdots$$

若$\exists n_0\in\mathbb{N}$,使得$x_{n_0}=x_{n_0+1}=fx_{n_0}$,则$x_{n_0}$是$f$的不动点.假设$\forall n\in\mathbb{N}$,$x_n\neq x_{n+1}$则有

$$\begin{aligned}M(x_{n-1},x_n)=&\max\left\{d(x_{n-1},x_n),d(x_{n-1},fx_{n-1}),d(x_n,fx_n),\frac{d(x_{n-1},fx_n)+d(x_n,fx_{n-1})}{2s}\right\}\leqslant\\&\max\left\{d(x_{n-1},x_n),d(x_n,x_{n+1}),\frac{sd(x_{n-1},x_n)+sd(x_n,x_{n+1})}{2s}\right\}=\\&\max\{d(x_{n-1},x_n),d(x_n,x_{n+1})\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M'(x_{n-1},x_n)=&\max\{d(x_{n-1},x_n),d(x_{n-1},fx_{n-1}),d(x_{n-1},fx_n)\}=\\&\max\{d(x_{n-1},x_n),d(x_{n-1},x_{n+1})\}\geqslant\\&d(x_{n-1},x_n)\end{aligned}$$

$$M''(x_{n-1},x_n)=\max\{d(x_{n-1},x_n),d(x_n,fx_n),d(x_n,fx_{n-1})\}=$$

$$\max\{d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1})\}$$

$$N(x_{n-1}, x_n)=\min\{d(x_{n-1}, fx_{n-1}), d(x_n, fx_{n-1})\}=0$$

由式(1) 知 $\exists(\xi, \psi, \phi)\in[0, \infty]\times\Psi\times\Phi$，$\forall x, y\in X$，$x\leqslant y$ 使得

$$\psi(d(fx, fy))\leqslant\psi(s^3 d(fx, fy))\leqslant$$
$$\psi(M(x, y))-\phi(M'(x, y), M''(x, y))+\xi\psi(N(x, y))$$

则有

$$\psi(d(x_n, x_{n+1}))=\psi(d(fx_{n-1}, fx_n))\leqslant\psi(s^3 d(fx_{n-1}, fx_n))\leqslant$$
$$\psi(M(x_{n-1}, x_n))-\phi(M'(x_{n-1}, x_n), M''(x_{n-1}, x_n))+\xi\psi(N(x_{n-1}, x_n))$$

因此 $\forall n\in\mathbb{N}$，由上述不等式知：

$$\psi(d(x_n, x_{n+1}))\leqslant\psi\left(\max\left\{d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1}), \frac{d(x_{n-1}, x_{n+1})}{2s}\right\}\right)-$$
$$\phi(\max\{d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1})\}, \max\{d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1})\})$$

因为 Φ，Ψ 非减，可以得出 $\forall n\in\mathbb{N}$，有

$$\psi(d(x_n, x_{n+1}))\leqslant\psi(\max\{d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1})\})-$$
$$\phi(d(x_{n-1}, x_n), \max\{d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1})\})$$

又因为

$$d(x_n, x_{n+1})>0$$

所以

$$\phi(d(x_{n-1}, x_n), \max\{d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1})\})>0$$

表明 $\forall n\in\mathbb{N}$，有

$$\psi(d(x_n, x_{n+1}))<\psi(\max\{d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1})\})$$

因为 ψ 非减，所以 $\forall n\in\mathbb{N}$，有

$$d(x_n, x_{n+1})<\max\{d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1})\}$$

即 $\forall n\in\mathbb{N}$，有 $d(x_n, x_{n+1})<d(x_{n-1}, x_n)$，因此 $\{d(x_n, x_{n+1})\}$ 递减，因为 $d(x_n, x_{n+1})\geqslant 0$，所以序列收敛于非负数 a，则 $\forall n\in\mathbb{N}$，有

$$\psi(d(x_n, x_{n+1}))\leqslant\psi(d(x_{n-1}, x_n))-\phi(d(x_{n-1}, x_n), d(x_{n-1}, x_n))$$

即：

$$\limsup_{n\to+\infty}\psi(d(x_n, x_{n+1}))\leqslant\limsup_{n\to+\infty}\psi(d(x_{n-1}, x_n))-\liminf_{n\to+\infty}\phi(d(x_{n-1}, x_n), d(x_{n-1}, x_n))$$

因此有

$$\psi(a)\leqslant\psi(a)-\phi(a, a)$$

由此知 $\phi(a, a)=0$，即 $a=0$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n, x_{n+1})=0$.

下证序列 $\{x_n\}$ 是柯西序列，假设序列 $\{x_n\}$ 不是柯西列，$\exists\varepsilon>0$，序列 $\{p(n)\}_{n=1}^{\infty}$ 和序列 $\{q(n)\}_{n=1}^{\infty}$，使得 $\forall n\in N$，当 $p(n)>q(n)>n$ 时，有

$$d(x_{p(n)}, x_{q(n)})\geqslant\varepsilon \qquad d(x_{p(n)-1}, x_{q(n)})<\varepsilon$$

则有

$$\varepsilon\leqslant d(x_{p(n)}, x_{q(n)})\leqslant s[d(x_{p(n)}, x_{p(n)-1})+d(x_{p(n)-1}, x_{q(n)})]\leqslant$$
$$sd(x_{p(n)}, x_{p(n)-1}))+s\varepsilon$$

则有

$$\varepsilon\leqslant\limsup_{n\to+\infty} d(x_{p(n)}, x_{q(n)})\leqslant s\varepsilon \tag{2}$$

由 b -度量空间不等式的性质知

$$\varepsilon\leqslant d(x_{p(n)}, x_{q(n)})\leqslant s[d(x_{p(n)}, x_{q(n)+1})+d(x_{q(n)+1}, x_{q(n)})]$$
$$d(x_{p(n)}, x_{q(n)+1})\leqslant s[d(x_{p(n)}, x_{q(n)})+d(x_{q(n)}, x_{q(n)+1})]$$

由以上两式可知

$$\frac{\varepsilon}{s} \leqslant \limsup_{n \to +\infty} d(x_{p(n)}, x_{q(n)+1}) \leqslant s^2 \varepsilon \tag{3}$$

同理可知

$$\frac{\varepsilon}{s} \leqslant \limsup_{n \to +\infty} d(x_{p(n)+1}, x_{q(n)}) \leqslant s^2 \varepsilon \tag{4}$$

又因为

$$\varepsilon \leqslant d(x_{p(n)}, x_{q(n)}) \leqslant s[d(x_{p(n)}, x_{p(n)+1}) + d(x_{p(n)+1}, x_{q(n)})] \leqslant$$
$$sd(x_{p(n)}, x_{p(n)+1}) + s^2 d(x_{p(n)+1}, x_{q(n)+1}) + s^2 d(x_{q(n)+1}, x_{q(n)})$$

同样有

$$d(x_{p(n)+1}, x_{q(n)+1}) \leqslant s[d(x_{p(n)+1}, x_{q(n)}) + d(x_{q(n)}, x_{q(n)+1})] \leqslant$$
$$s^2 d(x_{p(n)+1}, x_{p(n)-1}) + s^2 d(x_{p(n)-1}, x_{q(n)}) + sd(x_{q(n)}, x_{q(n)+1}) \leqslant$$
$$s^3 d(x_{p(n)+1}, x_{p(n)}) + s^3 d(x_{p(n)}, x_{p(n)-1}) + s^2 d(x_{p(n-1)}, x_{q(n)}) + sd(x_{q(n)}, x_{q(n)+1})$$

则有

$$\frac{\varepsilon}{s^2} \leqslant \limsup_{n \to +\infty} d(x_{p(n)+1}, x_{q(n)+1}) \leqslant s^2 \varepsilon \tag{5}$$

由式(1)知

$$\psi(s^3 d(x_{p(n)+1}, x_{q(n)+1})) = \psi(s^3 d(fx_{p(n)}, fx_{q(n)})) \leqslant$$
$$\psi(M(x_{p(n)}, x_{q(n)})) -$$
$$\phi(M'(x_{p(n)}, x_{q(n)}), M''(x_{p(n)}, x_{q(n)})) + \xi\psi(N(x_{p(n)}, x_{q(n)}))$$

其中

$$d(x_{p(n)}, x_{q(n)}) \leqslant M(x_{p(n)}, x_{q(n)}) = \max\{d(x_{p(n)}, x_{q(n)}), d(x_{p(n)}, fx_{p(n)}),$$
$$d(x_{q(n)}, fx_{q(n)}), \frac{d(x_{p(n)}, fx_{q(n)}) + d(x_{q(n)}, fx_{p(n)})}{2s}\} \leqslant$$
$$\max\{d(x_{p(n)}, x_{q(n)}), d(x_{p(n)}, x_{p(n)+1}),$$
$$d(x_{q(n)}, x_{q(n)+1}), \frac{d(x_{p(n)}, x_{q(n)+1}) + d(x_{q(n)}, x_{p(n)+1})}{2s}\}$$

$$\varepsilon \leqslant \limsup_{n \to +\infty} M(x_{p(n)}, x_{q(n)}) \leqslant s\varepsilon \tag{6}$$

$$M'(x_{p(n)}, x_{q(n)}) = \max\{d(x_{p(n)}, x_{q(n)}), d(x_{p(n)}, fx_{p(n)}), d(x_{p(n)}, fx_{q(n)})\} =$$
$$\max\{d(x_{p(n)}, x_{q(n)}), d(x_{p(n)}, x_{p(n)+1}), d(x_{p(n)}, x_{q(n)+1})\}$$

$$\frac{\varepsilon}{}\} \leqslant \limsup_{n \to +\infty} M'(x_{p(n)}, x_{q(n)}) \leqslant s^2 \varepsilon \tag{7}$$

$$M''(x_{p(n)}, x_{q(n)}) = \max\{d(x_{p(n)}, x_{q(n)}), d(x_{q(n)}, fx_{q(n)}), d(x_{q(n)}, fx_{p(n)})\} =$$
$$\max\{d(x_{p(n)}, x_{q(n)}), d(x_{q(n)}, x_{q(n)+1}), d(x_{q(n)}, x_{p(n)+1})\}$$

$$\frac{\varepsilon}{s} \leqslant \limsup_{n \to +\infty} M''(x_{p(n)}, x_{q(n)}) \leqslant s^2 \varepsilon \tag{8}$$

$$N(x_{p(n)}, x_{q(n)}) = \max\{d(x_{p(n)}, fx_{p(n)}), d(x_{q(n)}, fx_{p(n)})\} =$$
$$\max\{d(x_{p(n)}, x_{p(n)+1}), d(x_{q(n)}, x_{p(n)+1})\} = 0$$

则有

$$\psi(s\varepsilon) = \psi\left(s^3 \frac{\varepsilon}{s^2}\right) \leqslant \psi(s^3 \limsup_{n \to +\infty} d(x_{p(n)+1}, x_{q(n)+1})) \leqslant$$
$$\psi(\limsup_{n \to +\infty} M(x_{p(n)}, x_{q(n)})) - \phi(\limsup_{n \to +\infty} M'(x_{p(n)}, x_{q(n)}), \limsup_{n \to +\infty} M''(x_{p(n)}, x_{q(n)})) +$$
$$\xi\psi(\limsup_{n \to +\infty} N(x_{p(n)}, x_{q(n)})) \leqslant$$
$$\psi(s\varepsilon) - \phi\left(\frac{\varepsilon}{s}, \frac{\varepsilon}{s}\right)$$

则 $\phi\left(\frac{\varepsilon}{s},\frac{\varepsilon}{s}\right)=0$，故 $\frac{\varepsilon}{s}=0$，$\varepsilon=0$ 与 $\varepsilon>0$ 矛盾，所以序列 $\{x_n\}$ 是柯西列.

因为 X 是完备的，所以 $\exists z\in X$，当 $n\longrightarrow\infty$ 时，$x_n\longrightarrow z$，由 f 的连续性可知，当 $n\longrightarrow\infty$ 时，$x_{n+1}=fx_n=fz$，由极限的唯一性可知 $fz=z$. 则 f 有不动点.

在定理 1 中，当 $s=1$ 时为文献[3] 中定理 2. 5

推论 1　设 $(X,\preccurlyeq,d)$ 是完备偏度量空间，设 $f:X\longrightarrow X$ 是非减，连续，几乎广义 C -压缩映象，若存在 $x_1\in X$，使得 $x_1\preccurlyeq fx_1$，则 f 有不动点.

参考文献：

[1] MUJAHID A，HASSEN A. On Common Fixed Point of Generalized Contractive Mappings in Metric Spaces [J]. Surveys in Mathematics and Its Applications，2012(7)：39－47.

[2] SHATANAWI W. Fixed Point Theorems for Nonlinear Weakly C-Contractive Mappings in Metric Spaces [J]. Math Comput Model，2011，54(11－12)：2816－2826.

[3] AZIZI A，MOOSAEI M，ZAREI G. Fixed Point Theorems for Almost Generalized C-Contractive Mappings in Ordered Complete Metric Spaces [J]. Fixed Point Theory and Applications，2016，80(1)：1－21.

[4] CZERWIK S. Contraction Mappings in b-Metric Spaces [J]. Acta Mathematical Et Informationcal Universitatis Ostraviensis，1993，1(1)：5－11.

[5] HUANG H，RADENOVIC S，VUJAKOVIC J. On Some Recent Coincidence and Immediate Consequences in Partially Ordered b-Metric Spaces [J]. Fixed Point Theory and Applications，2015，63(1)：1－18.

The Existence of the Fixed Points of Almost Generalized *C*-Contractions in Partially Ordered b-Metric Spaces

ZHANG Zhi-min，　DENG　Lei

School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：In this paper，we introduce almost generalized C-contractions into partially ordered b-metric spaces，and prove the existence of fixed points for almost generalized C-contractions in partially ordered b-metric spaces. As a result，we obtain some related fixed point theorems，which largely improve and extend some related results that have been published recently on partially ordered b-metric spaces.

Key words：partially ordered b-metric space；almost generalized C-contraction；fixed point

责任编辑　周仁惠

崔玉洁